

МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ПОНЯТЬ (РОЗВИВАЛЬНИЙ ПІДХІД)

С.П.Семенець,
доктор педагог. наук, доцент,
Житомирський державний університет ім. Івана Франка,
м. Житомир, УКРАЇНА

У контексті розвивального підходу розкрито особливості змістового і процесуального компонентів методики формування математичних понять, розроблено навчально-методичну модель управління навчально-математичною діяльністю учнів у ході їх засвоєння.

Ключові слова: *розвивальне навчання, методика навчання математики, формування математичних понять.*

Постановка проблеми. Основою кожної наукової теорії та навчальної дисципліни є система теоретичних понять, якими вони оперують. Психологічним закономірностям формування в дітей наукових понять присвячені роботи Л.С.Виготського, Г.С.Костюка, В.В.Давидова, П.Я.Гальперіна, Є.М.Кабанової-Меллер, Н.Ф.Талізінної, Н.А.Менчинської та інших. Вагомий внесок у розроблення методики формування в учнів математичних понять зробили українські науковці: Г.П.Бевз, В.Г.Бевз, М.І.Бурда, О.І.Скафа, С.О.Скворцова, З.І.Слепкань, Н.А.Тарасенкова, В.О.Швець та інші.

Мета статті – у контексті концепції розвивальної освіти розкрити особливості змістового і процесуального компонентів методики формування математичних понять, розробити навчально-методичну модель управління навчально-математичною діяльністю учнів у ході їх засвоєння.

Під поняттям розуміють форму мислення, в якій відображено загальні істотні, специфічні властивості й особливості предметів або явищ навколишньої дійсності. Зокрема, в українському тлумачному словнику поняття трактується як одна з форм мислення, результат узагальнення суттєвих ознак об'єкта вивчення. Терміном „поняття” оперують для позначення розу-

мового образу певного об'єкта чи явища або класів об'єктів і явищ [1]. Фундатор теорії розвивального навчання В.В.Давидов наголошував: „Формування в дітей узагальнень і понять вважається однією з головних цілей шкільного викладання” [2, с. 11]. Особливістю математичних понять є те, що вони стосуються просторових форм і кількісних відношень об'єктивної реальності, відображених у мисленні на основі змістово-теоретичних дій абстрагування та узагальнення.

Вивчення понять, об'єктів та їх означень може здійснюватися в різних контекстах: логічному, змістовому (предметному), пізнавальному (гносеологічному), семантичному та інших. У методиці навчання математики доцільно вибрати логічну основу, що враховує специфіку математичних висловлень. Ураховуючи, що навчання можливе тільки в діяльності, формування математичних понять забезпечується, якщо виконується цілісна навчальна діяльність, тобто задіяні всі її структурні компоненти: потреби \Leftrightarrow мотиви \Leftrightarrow цілі \Leftrightarrow умови і засоби досягнення цілей \Leftrightarrow дії \Leftrightarrow операції [3].

Одним із провідних принципів педагогічної психології є принцип єдності знань і дій. Виділяють два роди знань:

знання про предмети і явища дійсності (поняття) та знання про дії, які з ними потрібно виконувати. З цього приводу З.І.Слепкань зауважує: „Недоліком традиційного і сучасного навчання математики є недостатня увага до знань другого роду. Часто учні та студенти, які добре знають означення математичних понять, не вміють застосовувати їх до доведення теорем і розв'язування задач, у тому числі й прикладного змісту. Тому дії, адекватні знанням, зокрема поняттям, мають стати не тільки засобом, але й предметом засвоєння” [4, с. 51]. Саме в розвивальній математичній освіті ставиться завдання навчити не тільки знанням (знанням про поняття), але й знанням про способи їх одержання та застосування.

З огляду на вищезазначене, необхідно розв'язувати проблему походження математичних понять, їх структури та способів застосування в задачних ситуаціях, а отже, визначити дії, що адекватні видам означень математичних понять, обґрунтувати їх властивості. Ми поділяємо думку Н.Ф.Тализіної, що „формування понять передбачає, по-перше, засвоєння системи спеціальних операцій для встановлення необхідних і достатніх ознак понять. По-друге, засвоєння системи операцій: підведення під дане поняття і одержання наслідків із належності об'єкта даного класу. Операційна частина і становить власне психологічний механізм поняття. Без нього поняття не може бути ні сформоване, ні застосоване до розв'язування різних задач. Через зазначену систему операцій і відбувається управління формуванням понять” [5, с. 32].

Найпоширеніший спосіб означення понять у математиці через найближчий рід і видову ознаку. Структура цієї дії може бути представлена в символічній формі так:

$$\forall x \in X \ A(x) \Leftrightarrow B(x).$$

Або словесно: *найближчий рід* \Rightarrow *термін* \Leftrightarrow *видова ознака*.

Операції, що розкривають дію означення, є такими: 1) вибір найближчого

родового об'єкта; 2) накладання на об'єкт обмеження, що розкривається у видових характеристиках.

Згідно з діяльнісним підходом необхідно акцентувати увагу на специфіці дій, що дозволяють виділити родові об'єкти, видові відмінності. Означення через найближчий рід та видові ознаки можуть мати такі різновиди: 1) означення об'єктів шляхом виділення характеристичної властивості; 2) означення, що формулюються на основі операції заперечення; 3) конструктивні і рекурсивні означення; 4) неявні означення первісних понять через систему аксіом.

Означення математичних об'єктів шляхом описання характеристичної властивості ґрунтується на логічних операціях, пов'язаних із встановленням найближчого роду, видових ознак і з'ясуванням логічного зв'язку між ними. Логічна природа таких означень може бути кон'юнктивною, диз'юнктивною, ґрунтуватися на операції заперечення або такою, що зводиться до названих логічних операцій. Заперечувальні означення формулюються тоді, коли певний клас об'єктів розбитий на множини й об'єкти однієї множини мають певні властивості (їм присвоєно термін), але існують об'єкти цього класу, що не мають таких властивостей. У конструктивних і рекурсивних означеннях характерні властивості об'єктів розкриваються через операції, на основі яких ці об'єкти конструюються. Особливістю рекурсивних означень є те, що спочатку вказуються деякі базові об'єкти деякого класу та задаються операції, що дозволяють одержати нові об'єкти цього ж класу. Неявне означення первісних понять розкривається через систему аксіом, у якій висвітлюються їхні змістові характеристики.

Таким чином, означення формулюються на основі однієї й тієї ж логічної дії, хоча її змістове наповнення в кожному конкретному випадку може бути різним (за допомогою характеристичної властивості, заперечення властивостей, конструктивних дій, неявного задання).

Формування математичних понять має здійснюватися відповідно до визначеної структури логічної дії, а вивчення видів означень проходити згідно з логікою сходження від абстрактного до конкретного й передбачати застосування понять на практиці (у ході розв'язування задач, застосування фактів теорії).

До означень висуваються вимоги, на яких наголошує З.І.Слепкань [6]:

1. Відсутність порочного кола. Це означає, що поняття, яке означається, не повинне явно чи неявно міститись у новому понятті, через яке воно означається.

2. Відсутність омоніма. Це означає, що кожний термін (символ) має траплятися не більше одного разу як такий, що відповідає означуваному поняттю. У разі порушення цієї вимоги один і той самий термін (символ) позначатиме різні поняття.

3. Означення не має містити понять, які ще не означалися.

Концепція розвивальної освіти передбачає виділення „клітинки” – генетично вихідного теоретичного поняття, на основі якого розкривається сутність усієї різноманітності навчального матеріалу в структурах його теоретичної та практичної (задачної) складових. На нашу думку, такою „клітинкою” курсу шкільної математики слугує поняття „математичної моделі”, яке виконує роль генетично вихідного.

Загальне означення математичної моделі X деякого об'єкта (системи об'єктів) U може бути сформульоване на основі поняття математичної структури. Множина (система) математичних об'єктів $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ із введеними в ній математичними операціями (відношеннями) $X = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, що задовольняють властивості $X = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k\}$, є математичною моделлю множини (системи) об'єктів $U = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ із виконуваними в ній діями $U = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$, які мають властивості $U = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$, якщо:

1) між елементами, операціями (діями) та властивостями, що виконуються в цих множинах, можна встановити взаємно однозначну відповідність;

2) результат дії між двома елементами в множині X відповідає елементу множини U , що є результатом відповідної дії між відповідними елементами цієї ж множини.

Таким чином, означення математичної моделі формулюється через поняття ізоморфізму між множинами різної природи, задовольняє властивості відношення еквівалентності (рефлексивність, симетричність і транзитивність). Саме це дає змогу:

- зробити висновок про існування різних математичних моделей об'єкта, процесу, явища, адже за властивістю еквівалентності, якщо X_1 – математична інтерпретація моделі X , то X_1 буде математичною об'єкта U ;

- вивчати найрізноманітніші процеси, які за своїми зовнішніми характеристиками не мають нічого спільного (наприклад, генетичний код, світлові та електромагнітні явища, теплота та коливання в ядрі атома);

- відображати кількісні характеристики та конструктивні особливості предметів, процесів, явищ, що інтерпретуються в алгебричних, трансцендентних, функціональних, диференціальних, інтегральних рівняннях, геометричних конструкціях тощо;

- формувати змістово-теоретичні абстракції та узагальнення в процесі навчального пізнання, що відіграє важливу роль і займає особливе місце в розвивальній математичній освіті.

З урахуванням вищезазначених теоретичних засад, розробляється методика формування математичних понять, в основі якої діяльнісний підхід, репрезентований у розробленому нами розвивально-задачному методі навчання математики. Ключовими завданнями цієї методики є розв'язання таких освітньо-математичних проблем:

- походження теоретичних понять шкільної математики;

- формування поняття „математичної моделі” та навчання методу математичного моделювання;

- навчання способам дій у процесі формулювання різних видів означень математичних понять (розв'язування навчальних задач);

- формування логічної дії, що розкриває зміст і структуру означення математичних об'єктів (розв'язування навчально-теоретичної задачі);

- реалізація стильового підходу (на рівні стилів кодування інформації) у процесі формування математичних понять;

- формування вмінь застосовувати математичні поняття в процесі розв'язування задач, вивчення теоретичного матеріалу;

- рефлексія (самоаналіз, самооцінка, самоконтроль) рівня засвоєння математичних понять.

Згідно з концепцією розвивальної освіти (діяльнісним підходом) формування математичних понять у школярів досягається завдяки організації їх навчальної діяльності, що націлена на розв'язання двох взаємопов'язаних завдань: вивчення способів означень математичних понять і формування на цій основі узагальненої схеми дій; формування вмінь застосовувати математичні поняття під час розв'язування задач, розвитку математичних теорій. Тому вивчення понять у розвивальній математичній освіті передбачає постановку та розв'язування двох навчальних задач, які, з огляду на свою загальнопредметну роль і значущість, можна віднести до категорії навчально-теоретичних.

Формування математичних понять у розвивальній математичній освіті здійснюється на основі навчальної технології, що репрезентує структуру розвивально-задачного методу навчання математики [7].

I етап. Постановка та розв'язування задач на основі сформованого способу дій (спеціальна орієнтація на успіх). Створення проблемної задачної ситуації, що має практичний (прикладний) зміст і

розв'язання якої передбачає введення нового теоретичного поняття. Рефлексія першого етапу навчального пізнання.

II етап. Постановка прикладної чи практичної задачі, що потребує введення нового теоретичного поняття. Створення математичної моделі, виділення генетично вихідного відношення, яке лежить в основі нового поняття. Вивчення математичної моделі, визначення характеристичних властивостей означуваного об'єкта. Уведення математичного терміна та відповідного йому символу. Розв'язування задачі методом математичного моделювання, застосування взаємно обернених дій підведення під поняття та виведення наслідків із факту належності об'єкта пізнання до поняття. Рефлексія другого етапу навчального пізнання.

III етап. Постановка першої навчальної задачі, пов'язаної з формуванням способу дій у процесі формулювання означень математичних понять певного виду. Конструювання навчальної моделі (способу дій) формулювання означень математичних понять: 1) змістовий аналіз задачної ситуації, виділення початкового загального відношення, яке виявляється в багатьох інших частинних випадках; 2) формування змістової абстракції: створення математичної моделі - інтерпретації поняття (його генетично вихідного відношення) у знаковій, геометричній (графічній) формах; 3) формування змістових узагальнень: вивчення математичної моделі, виділення загальних істотних і специфічних властивостей поняття, визначення його найближчого роду та видових ознак; 4) введення терміну (відповідного йому символу); 5) формулювання означення поняття за схемою: *термін* → *рід* ↔ *видові ознаки*; 6) побудова таблиці, що розкриває зміст і структуру поняття, його різновид:

Скорочений запис формулювання означення поняття	
Структура означення	Термін:
	Рід:
Видові ознаки:	
Різновид означення	

7) контроль за виконанням попередніх дій, оцінка рівня засвоєння способу означення математичних понять.

Застосування математичних понять у ході розв'язування задач, вивчення фактів теорії передбачає виконання двох взаємно обернених дій: підведення під поняття та виведення наслідків із факту належності об'єкта пізнання до поняття. Знаходження способу виконання названих специфічних дій є змістом другої навчальної задачі.

Дія підведення математичного об'єкта під поняття складається з таких операцій: 1) виділення всіх характеристичних властивостей поняття (рід, видові ознаки); 2) встановлення логічних зв'язків між родом і видовими ознаками поняття; 3) перевірка, чи має математичний об'єкт такий же рід, чи характеризується він такими ж видовими ознаками та зв'язками; 4) формулювання висновку про те, чи належить або не належить математичний об'єкт до класу об'єктів, що зафіксовані в означенні.

Дія виведення наслідків із того, що об'єкт належить до класу об'єктів, які охарактеризовані в понятті, включає операції: 1) виділення роду, до якого належить математичний об'єкт; 2) встановлення характеристичних властивостей (видових ознак) усіх об'єктів указанного класу; 3) з'ясування логічних зв'язків між родом і видовими ознаками поняття.

Для візуалізації змісту й структури дій у процесі застосування математичних понять будується таблиця:

<i>Застосування математичних понять</i>	
<i>Дія підведення під поняття</i>	<i>1) виділення змістових характеристик поняття: рід, видові ознаки; 2) встановлення логічного зв'язку між родом і видовими ознаками; 3) перевірка математичного об'єкта на наявність першої та другої характеристики поняття; 4) формулювання висновку</i>

Дія виведення наслідків

*1) виділення роду, до якого належить математичний об'єкт;
2) встановлення характеристичних властивостей (видових ознак), які мають усі об'єкти вказаного класу;
3) встановлення логічних зв'язків між родом і видовими ознаками поняття*

На третьому етапі формування математичних понять здійснюється рефлексія (самоаналіз, самооцінка, самоконтроль) засвоєння способів розв'язування навчальних задач.

IV етап. Реалізація побудованих навчальних моделей згідно з логікою сходження від абстрактного до конкретного: постановка (складання) та розв'язування системи частинних задач на застосування введеного поняття. Контроль виконання навчальних дій та операцій у процесі розв'язування кожної задачі. Змістова, процесуальна оцінки рівня засвоєння узагальненого способу дій (навчальної моделі, побудованої на третьому етапі навчання). Референтна, ціннісна самооцінки виконаної навчально-математичної діяльності.

V етап. Змістовий аналіз попередніх етапів навчання. Самоконтроль і самооцінка (змістова, процесуальна, референтна, ціннісна) процесу учіння математики. Реалізація варіативності та альтернативності стосовно означення математичних понять. Введення поняття еквівалентності двох означень одного й того ж математичного об'єкта. Формування способу дій: підведення під друге означення математичний об'єкт, що розкритий у першому означенні; підведення під перше означення математичний об'єкт, що розкритий у другому означенні. Постановка нової задачі (прикладної, практичної), що передбачає введення нового теоретичного поняття, зміст якого ширший.

У посібнику [8] наведено реалізацію представленої навчально-методичної мо-

делі з метою формування в учнів математичних понять (означуваних; первісних; понять, що вводяться описово).

Таким чином, розроблена методика формування математичних понять утілює основні концептуальні положення розвивальної математичної освіти: обґрунтування походження теоретичних знань і актуалізація науково-теоретичного типу мислення; задачний підхід до організації процесу учіння математики; навчання математики у формі навчально-математичної діяльності; виділення системотвірного поняття та сходження від абстрактного до конкретного в ході навчального пізнання; рефлексія (самоаналіз, самооцінка, самоконтроль) засвоєння способу дій у процесі розв'язування типових (навчальних) задач. Особливостям змістового і процесуального компонентів методики вивчення теорем у розвивальній математичній освіті будуть присвячені наші подальші роботи.

1. Великий тлумачний словник української мови / уклад. і гол. ред. В.Г.Бусел. – К. – Ірпінь: Перун, 2003. – 1440 с.

2. Давыдов В.В. Виды обобщения в обучении (логико-психологические проблемы по-

строения учебных предметов) / В.В.Давыдов. – М.: Педагогика, 1972. – 424 с.

3. Давыдов В.В. Теория развивающего обучения / В.В.Давыдов. – М.: Интор, 1996. – 544 с.

4. Слєпкань З. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики / З.Слєпкань. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2006. – 240 с.

5. Талызина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний / Н.Ф.Талызина. – М.: МГУ, 1975. – 343 с.

6. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: підручник для студентів математичних спеціальностей педагогічних навчальних закладів / З.І.Слєпкань. – К.: Зодіак-Еко, 2000. – 512 с.

7. Семенець С.П. Особистісно розвивальний підхід до математичної освіти: розвивально-задачний метод навчання / С.П.Семенець // Математика в школі. – 2008. – № 11–12. – С. 26–30.

8. Семенець С.П. Методика навчання математики (підготовлено на основі концепції розвивальної освіти): навчальний посібник / С.П.Семенець. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І.Франка, 2009. – 536 с.

Резюме. Семенец С.П. МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ (РАЗВИВАЮЩИЙ ПОХОД). В контексте развивающего подхода раскрыты особенности содержательного и процессуального компонентов методики формирования математических понятий, разработано учебно-методическую модель управления учебно-математической деятельностью учащихся при их усвоении.

Ключевые слова: развивающее обучение, методика обучения математики, формирование математических понятий.

Abstract. Semenets S. THE METHOD OF MATHEMATICAL CONCEPTS FORMATION (DEVELOPING APPROACH). The features of substantial and procedural components of the method of mathematical concepts formation have been revealed in the context of the developing approach. The educational and methodological model of management the educational and mathematical activity of students during their assimilation has been developed.

Key words: developing training, methods of teaching mathematics, formation mathematical concepts.

Стаття надійшла до редакції 21.01.2012 р.

Постановою Президії ВАК України від 10.11.99 № 3-05/11 затверджено перелік № 3 наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук. До розділу «Педагогічні науки» включено наш збірник наукових робіт «Дидактика математики: проблеми і дослідження» (Бюлетень ВАК України, 1999, № 6), який є продовженням видання «Евристика та дидактика точних наук» міжнародного збірника наукових робіт. Нумерація випусків продовжується.

ЗМІСТ

Євсєєва О.Г. Проектування методичної системи навчання математики студентів технічного університету на засадах діяльного підходу.....	7	Антонєць А.В. Дослідницька робота як фактор формування прогностичних умінь менеджєрів аграріїв.....	57
Ковальчук М.Б., Хом'юк І.В. Деякі аспекти євристичної розумової діяльності студентів.....	17	Босовський М.В., Бочко О.П. Навченість та компетентність студентів у контексті математичної підготовки.....	62
Непомняща Т.В. Підвищення рівня мотивації майбутніх інженєрів до вивчення математичних дисциплін.....	21	Семенєць С.П. Методика формування математичних понять (розвивальний підхід).....	68
Орлова Н.Д., Попова Л.К. Об интенсификации процесса обучения высшей математике.....	26	Гончарова І.В. Вивчення методики формування математичних понять методом case-study...	74
Власєнко К.В., Реутова І.М. Методика створення мультимедійного супроводу лекцій з вищої математики для студентів технічних ВНЗ.....	30	Скафа О.І., Тимошенко О.В. Психолого-педагогічні передумови управління дослідницькою діяльністю студентів-біологів у курсі математики.....	82
Ємченко О.А. Ефективність використання електронного навчального курсу під час вивчення вищої математики.....	37	Subbotin I., Bilotskii N.N. Fuzzy logic application to assessment of results of iterative learning (Применение нечеткой логики к оценке результатов процесса итерационного обучения).....	89
Ковалєнко Н.В., Бичкова Т.В. Прийоми управління роботою студентів за курсом «Диференціальна геометрія» у системі дистанційного навчання..	44	Кірман В.К. Конструктивний підхід до формування поняття дійсного числа.....	94
Горда І.М. Оцінка якості діяльності викладачів математики ВНЗ аграрного профілю в умовах здійснення управлінського кафедрального моніторингу.....	51	Voskoglou M. Some comments on teaching the decimal representations of real numbers at school...	99
		Сердюк З.О. Особливості вивчення теми «Паралелепіпед» у класах суспільно-гуманітарного напрямку.....	103

Редакція зберігає за собою право на редагування і скорочення статей. Думки авторів не завжди збігаються з точкою зору редакції. За достовірність фактів, цитат, імен, назв та інших відомостей відповідають автори.