МАТЕМАТИКА
В СУЧАСНІЙ ШКОЛІ

НАУКОВО-МЕТОДИЧНИЙ ЖУРНАЛ

№ 9 (144) 2013, ВЕРЕСЕНЬ

ЩОМІСЯЧНИК

Передплатний індекс **74326**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНЕ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИРОБНИЧЕ ПІДПРИЄМСТВО
ВИДАВНИЦТВО «ПЕДАГОГІЧНА ПРЕСА»

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ ПЕДАГОГІЧНИХ НАУК УКРАЇНИ

Заснований у 1997 р.
До 2012 р. журнал виходив у світ під назвою «Математика в школі»

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації, серія КВ №18310-7110 пр від 25.10.2011 р.

Схвалено вченою радою Інституту педагогіки НАПН України (протокол від 27.08.2013 р. № 10)

ЗМІСТ

КОМПЛЕКСНІ ОДНО- АБО ДВОКАРТИННІ ЗОБРАЖЕННЯ В ЗАДАЧАХ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Іван ЛЕНЧУК — професор кафедри математики Житомирського державного університету ім. І. Франка, кандидат технічних наук

Анотація. Пропонується варіювати способами зображення тіл і їх комбінацій у стереометрії та, при нагоді, користуватися простими у виконанні проекціями Г. Монжа. Приклади задач, розв'язаних аналітичним методом, доповнюють алгоритмічні схеми.

Ключові слова: стереометрія, задача, зображення тіл, комбінації тіл, проекції Г. Монжа, аналітичний метод, алгоритмічні схеми.

Иван ЛЕНЧУК

КОМПЛЕКСНЫЕ ОДНО- ИЛИ ДВУХКАРТИННЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ СТЕРЕОМЕТРИИ

Аннотация. Предлагается варьировать способами изображения тел и их комбинаций в стереометрии и, при возможности, пользоваться простыми в выполнении проекциями Г. Монжа. Примеры задач, решённых аналитическим методом, дополняют алгоритмические схемы.

Ключевые слова: стереометрия, задача, изображения тел, комбинации тел, проекции Г. Монжа, аналитический метод, алгоритмические схемы.

Ivan LENCHUK

COMPLEX ONE (TWO) PICTURE IMAGES IN THE TASKS OF STEREOMETRY

Summary. It is suggested to vary methods the image of bodies and their combinations in stereometry and, as chance offers, to use the simple in implementation projections of G. Monge. The examples of tasks, untied the analytical method, complements algorithmic charts.

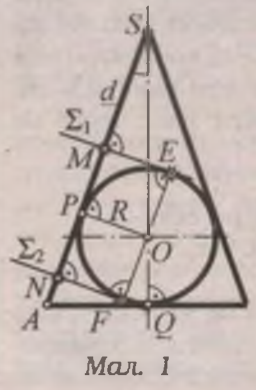
Keywords: stereometry, task, images of bodies, combination of bodies, projection of G. Monge, analytical method, algorithmic charts.

У побудові зображень об'єктів відносно невеликих розмірів дуже зручні порівняно прості паралельні проекції. Окрім пріоритетного методу однокартинних аксонометричних проекційних креслень, як у розділі евклідової стереометрії, велике поширення в освіті, науці і техніці одержав метод кількакартинних комплексних креслень в ортогональних проекціях, який на честь французького математика, інженера, творця нарисної геометрії ще називають методом Г. Монжа. Комплексне креслення, виконане за цим методом, дає змогу науковцеві у прикладній геометрії чи інженерові-практику з добре розвиненим наочно-образним мисленням на виробництві особливо легко робити висновки про справжні форму, розміри й інші (технологічні) характеристики зображуваних предметів: кути, відстані, шорсткість поверхонь, допуски, посадки тощо.

В одному із класичних підручників для ЗОШ є приклад застосування ортогонального проекціювання за методом Г. Монжа в технічному кресленні [1]. Всупереч цьому, в роботі немає жодного втілення такого специфічного прийому зображень у теоремах чи задачах курсу «Стереометрія».

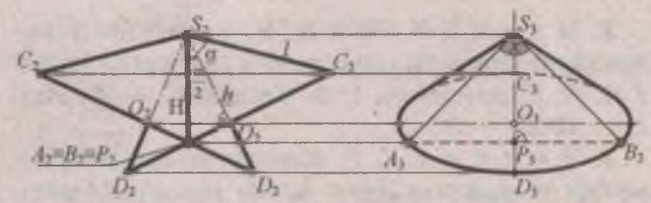
Щоб підкреслити важливість оригінального підходу в побудові якісних і ефективних зображень, з метою пропаганди альтернативного, «невизнаного» у старшій школі методу, розв'яжемо три задачі середньої складності. Вони будуть показовим прикладом, демонстрацією ситуаційно пріоритетного використання у звичних, елементарних обчисленнях «видів» спереду, зверху і зліва на стереометричні тіла та їх комбінації.

Задача 1. *У конус вписано кулю з радіусом R. Знайдіть об'єм конуса, якщо відомо, що площина, дотична до кулі і перпендикулярна до однієї із твірних конуса, віддалена від його вершини на відстань d.*



Мал. 1

Площин, перпендикулярних до SA (мал. 1) і дотичних до поверхні кулі, можна провести дві (Σ_1, Σ_2). Отже, і розв'язків у задачі два. Однак їх відшукання не різниться по суті геометрично,



Мал. 3

Ця задача з категорії «олімпіадних». До таких її віднесено не за змістовну оригінальність чи нестандартність у підборі способу розв'язання, або заховану «родзинку» у процесі пошукових міркувань, а лише тому, що *вона вимагає від учнів* ***розвинених просторових уявлень***, усталеного володіння методами наочних і ненаочних площинних зображень стереометричних фігур та їх комбінацій у різних проекціях, надбання стабільних навичок бінарного моделювання, неабиякого досвіду. Якісне наочне проекційне креслення особливої комбінації двох рівних конусів обертання в їх загальному розташуванні виконати порівняно важко — потрібно, щонайперше, вміти професійно застосовувати теорію аксонометрії до комплексного креслення. Поряд із цим, те саме комплексне креслення в уявленнях та графічному поданні пари конусів у системі двох площин проекцій Π_2 і Π_3 слід вважати тривіальним.

Із умови (та розсудливих уявлень) вочевидь випливає, що задані конуси у власному перетині висікають рівнобедрений трикутник SAB, бічні сторони якого $(SA,\ SB)$ є спільними твірними їх поверхонь, а основа (AB) — хордою перетину рівних кіл в основах заданих конусів.

Отож, розташовуємо в думці конуси так, щоб їхні осі були нахилені до горизонтальної площини проекцій Π_1 (підлоги) під одним і тим самим кутом, а кола в основах — перпендикулярно розташованими до фронтальної площини проекції Π_2 (дошки). Тоді (мал. 3) на виді спереду конуси будуть зображені відповідно двома рівними рівнобедреними трикутниками $S_2C_2D_2$, а перетин їх поверхонь (ΔSAB) — відрізком вертикальної прямої S_2A_2 ($AB \perp \Pi_2$, $A_2 \equiv B_2$). На малюнку 3 ліворуч достатньо зобразити лише один із конусів (адже інший його перекриває). Тут трикутник перетину конусів SAB, розташований паралельно Π_3, буде його профільною проекцією $S_3A_3B_3$ у натуральну величину.

Увівши робочі позначення: $SC = SA = SB = l$, $SO = h$, $SP = H$, $\angle ASB = x$ (шуканий кут), із малюнка навіч матимемо:

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{H}{l}, \text{ де } l = \frac{h}{\cos\alpha},\ H = \frac{h}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Таким чином,

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} \text{ і } x = 2\arccos\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right).$$

В останніх дужках (у формулі) $\alpha < 90°$, адже $2\alpha < 180°$ — кут при вершині осьового перерізу конуса. Тому $\cos\frac{\alpha}{2} > \cos\alpha$ і $\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} < 1$. Отже, задача завжди матиме єдиний розв'язок.

Алгоритмічна схема

$$x = 2\arccos\frac{H}{l} \leftrightarrow \frac{x}{2} = \arccos\frac{H}{l} \leftrightarrow \cos\frac{x}{2} = \frac{H}{l} \leftrightarrow \begin{cases} H = \dfrac{h}{\cos\frac{\alpha}{2}}, \\ l = \dfrac{h}{\cos\alpha}. \end{cases}$$

Наведеними прикладами задач на обчислення з нетиповими малюнками до них, зумисне виконаними на комплексному кресленні Г. Монжа ми свідомо намагаємося акцентувати увагу майбутніх педагогів-математиків на міжпредметних зв'язках тісно споріднених методом паралельних проекцій курсів «Геометрія» і «Креслення». Цим, за задумом, наголошуємо на неабиякій значущості у процесі опанування геометрії забутого, навіть занедбаного тепер у ЗОНЗ і в педагогічних університетах курсу «Креслення», його ролі в розумовому, інтелектуальному розвиткові, творчому зростанні суб'єктів навчання. До речі, вчителю математики не зашкодить мати на увазі, що «креслення як навчальний предмет (у вищій і середній школі) *виділялося з геометричної науки* поступово, *під впливом вимог техніки*» [2, 3].

Одним із найцінніших фахових пріоритетів учителя геометрії є усталені, напрацьовані досвідом навички, вміння швидко й якісно виконувати проекційні креслення стереометричних фігур та їх комбінацій до теорем і задач. У цьому сенсі надто вагомий критерій «швидко» в розумінні вчителя уособлює об'єктивну вимогу процесу навчання предмета, адже педагог не має витрачати дорогоцінний час уроку на пояснення виконання допоміжного малюнка. В особи, яка оперує методом Г. Монжа, з'являється реальна нагода вміло варіювати зображення і, наразі, відчутно заощадити час.

Алгоритмічні схеми, якими завершується кожна задача, не слід вважати обов'язковим атрибутом освітянського процесу. Проте вони як ефективний елемент діяльності демонструють аналітичний метод міркувань на шляху до правильного результату, гарантують строгість і чіткість покрокових операцій, сприяють їх оптимізації. Це — своєрідні логічні вправи в семіотичному представленні, які тренують розум, упорядковують мислення, системно структурують методологічні зв'язки між елементами основних геометричних знань учня.

ЛІТЕРАТУРА

1. Погорєлов О. В. Геометрія: Стереометрія: Підручник для 10 — 11 кл. серед. школи — 4-те вид. — / О. В. Погорєлов. — К.: Освіта, 1998. — 128 с.

2. Михайленко В. Є. Зв'язки у викладанні геометрії і креслення у середній школі / В. Є. Михайленко, І. Ф. Тесленко. — К.: Рад. шк., 1965. — 85 с.

3. Ленчук І. Г. Конструктивна стереометрія в задачах: Навч. посіб. монографічного характеру для студентів математичних спеціальностей ВПНЗ / І. Г. Ленчук. — Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. — 368 с.

СКІНЧЕННІ СУМИ, ПОВ'ЯЗАНІ З ЧИСЛАМИ ФІБОНАЧЧІ І ЛЮКА

Рудольф УШАКОВ — заслужений учитель України, м. Київ

Існують дві відомі послідовності: *послідовність Фібоначчі* і *послідовність Люка*, яким присвячені численні дослідження.

Фібоначчі (1170 – 1228) – італійський математик, який увів числа Фібоначчі у роботі «Книга про абак» у 1202 р.

Люка Франсуа (1842 – 1891) – французький математик. Дав сучасну назву числам Фібоначчі. Люка відкрив багато властивостей послідовності Фібоначчі. Числа Фібоначчі і Люка знаходять застосування у позакласній роботі з математики. Задачі, пов'язані з числами Фібоначчі і Люка зустрічаються на олімпіадах різних рівнів. У даній статті розглядаються скінченні суми, пов'язані з числами Фібоначчі і Люка. Початок і кінець доведення позначаються відповідно знаками ⌈і⌉.

Послідовність Фібоначчі задається рівностями $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n \ge 1$.

Формула загального члена послідовності Фібоначчі має вигляд

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha_1^n - \alpha_2^n\right) \ n \ge 0,$$

де α_1 і α_2 — корені квадратного рівняння

$z^2 - z - 1 = 0$ і $\alpha_1 > \alpha_2$,

тобто $\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\alpha_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Це *формула Біне*.

Послідовність Люка задається рівностями $L_0 = 2, L_1 = 1, L_{n+1} = L_n + L_{n-1}, n \ge 1$.

Формула загального члена послідовності Люка має вигляд $L_n = \alpha_1^n + \alpha_2^n, n \ge 0$.

Формули загальних членів можна довести за допомогою методу математичної індукції.

У таблиці наведено перші десять чисел Фібоначчі і Люка.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123

I. Розглянемо суму

$\sum_{k=1}^{n} F_{pk+q}x^k, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}_0$.

⌈ Застосуємо формулу Біне.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{pk+q}x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_1^{pk+q} - \alpha_2^{pk+q}}{\sqrt{5}} \cdot x^k =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_1^{pk+q}x^k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_2^{pk+q}x^k\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha_1^q \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_1^p x\right)^k - \alpha_2^q \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_2^p x\right)^k\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\alpha_1^q \cdot \alpha_1^p x \cdot \frac{\left(\alpha_1^p x\right)^n - 1}{\alpha_1^p x - 1} - \alpha_2^q \cdot \alpha_2^p x \cdot \frac{\left(\alpha_2^p x\right)^n - 1}{\alpha_2^p x - 1}\right].$$

Ми застосували формулу суми геометричної прогресії $\sum_{k=1}^{n} z^k = z \cdot \dfrac{z^n - 1}{z - 1}$.

Далі маємо: $\sum_{k=1}^{n} F_{pk+q}x^k =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\left(x^{n+1}\alpha_1^{pn+p+q} - x\alpha_1^{p+q}\right)\left(\alpha_2^p x - 1\right) - \left(x^{n+1}\alpha_2^{pn+p+q} - x\alpha_2^{p-q}\right)\left(\alpha_1^p x - 1\right)}{\left(\alpha_1^p x - 1\right)\left(\alpha_2^p x - 1\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{x^{n+2}\left(\alpha_1^{pn+p+q} \cdot \alpha_2^p - \alpha_2^{pn+p+q} \cdot \alpha_1^p\right) - x^{n+1}\left(\alpha_1^{pn+p+q} - \alpha_2^{pn+p+q}\right) - x^2\left(\alpha_1^{p+q} \cdot \alpha_2^p - \alpha_2^{p+q} \cdot \alpha_1^p\right) + x\left(\alpha_1^{p+q} - \alpha_2^{p+q}\right)}{\left(\alpha_1 \cdot \alpha_2\right)^p x^2 - \left(\alpha_1^p + \alpha_2^p\right)x + 1}$$

Ураховуючи, що $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1$, маємо остаточно:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{pk+q}x^k = \frac{(-1)^p x^{n+2}F_{pn+q} - x^{n+1}F_{pn+p+q} - (-1)^p x^2 F_q + xF_{p+q}}{(-1)^p x^2 - L_p x + 1}. \quad (1) ⌉$$