## ЗМІСТ

# ВСТУП

В умовах розбудови національної системи освіти, інтеграції в світову систему особливо актуальним стає забезпечення належного рівня фахової підготовки майбутнього вчителя математики.

Важливою складовою професійної підготовки спеціаліста-математика є навчальна дисципліна "Диференціальна геометрія і топологія". Диференціальна геометрія – це розділ геометрії, який вивчає геометричні образи, в першу чергу криві і поверхні методами аналізу нескінченно малих.

Важливими завданнями курсу «Диференціальна геометрія та топологія»: є забезпечення сприятливих умов для неперервної самоосвіти, наукового пошуку, підвищення рівня математичної підготовки студентів.

Представлений навчально-методичний посібник вміщує матеріали для організації самостійної роботи студентів. Тут наведено перелік основних питань по розділам курсу, запитання й завдання для самоконтролю знань студентів по кожному змістовому модулю, список рекомендованої літератури.

У посібнику подано завдання для позааудиторних модульних контрольних робіт, які розроблено у відповідності з програмою навчальної дисципліни (30 варіантів), а також методичні рекомендації щодо їх виконання.

Видання призначено для викладачів, студентів фізико-математичних факультетів денної та заочної форм навчання.

## *Модуль I.* **Теорія кривих**

*Тематика модуля*

1. Предмет диференціальної геометрії.
2. Елементи векторного аналізу. Вектор-функція скалярного аргументу.
3. Геометричний зміст диференціювання вектор-функції.
4. Диференціал вектор-функції. Ряд Тейлора для вектор-функції
5. Геометричний зміст неперервності вектор-функції.
6. Поняття топологічного перетворення та поняття кривої.
7. Регулярні криві. Способи задання просторової кривої в евклідовому просторі.
8. Довжина дуги кривої.
9. Натуральна параметризація.
10. Дотична пряма, нормальна площина просторової кривої. Дотикання кривої і поверхні.
11. Стична площина.
12. Супровідний тригранник Френе просторової кривої, його елементи.
13. Дотикання кривих у просторі.
14. Обгинаючи сімейства кривих.
15. Стичне коло.
16. Кривина та скрут кривої. Геометричний зміст кривини і скруту кривої.
17. Поняття точки розпрямлення. Необхідна і достатня умови того, щоб крива була прямою лінією.
18. Формули Френе.
19. Обчислення кривини і скруту кривої.
20. Еволюта та евольвента плоскої кривої.

## Запитання і завдання для самоконтролю

**1.** Серед наведених варіантів оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь:

**1)** *Площина, яка найкраще прилягає до кривої, називається:*
а) спрямною; в) дотичною;
б) стичною; г) нормальною.

**2)** *Довжиною дуги кривої* $a \leq t \leq b$ *називають границю суми довжин ламаних, вписаних в криву, при умові, що*:
а) довжини хорд необмежено зменшуються;
б) довжини хорд необмежено збільшуються;
в) довжини хорд дорівнюють нулю;
г) довжини хорд не змінюються.

**3)** *Довжиною дуги кривої* $a \leq t \leq b$ *називають* ... *суми довжин ламаних, вписаних в криву, при умові, що довжини хорд необмежено зменшуються.*
а) інтеграл; в) похідну;
б) границю; г) первісну.

**4)** *Кривиною кривої в будь-якій її точці називається відношення приросту ... до приросту довжини дуги, коли останній прямує до нуля.*
а) кута повороту нормалі;
б) кута повороту бінормалі;
в) кута повороту стичної площини;
г) кута повороту дотичної.

**5)** *Відношення приросту кута повороту дотичної до приросту довжини дуги, коли останній прямує до нуля, називають*:
а) параметром кривої; в) кривиною кривої;
б) скрутом кривої; г) натуральним параметром кривої.

**6)** *Скрутом кривої в будь-якій її точці називається границя відношення ... до приросту довжини дуги, коли останній прямує до нуля.*
а) приросту кута повороту стичної площини;
б) приросту кута повороту дотичної;
в) приросту кута повороту нормалі;
г) приросту кута повороту спрямної площини.

**7)** *Перетворення, яке близькі точки однієї множини чи фігури переводить у близькі точки іншої множини чи фігури, називають*:
а) неперервним; в) елементарним;
б) топологічним; г) загальним.

**8)** *Для будь-якої плоскої кривої скрут:*

а) необмежено зростає; в) дорівнює нулю;

б) від'ємний; г) необмежено зменшується.

**9)** *Напрямок дотичної до гладкої кривої визначається напрямком вектора ...*

а) другої похідної від функції, що визначає криву;

б) інтеграла від функції, що визначає криву;

в) функції, що визначає криву;

д) першої похідної від функції, що визначає криву.

**10)** *Дотичну до кривої в точці A задано рівнянням* $\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-5} = \frac{z}{6}$. *Напрямний вектор дотичної має координати:*

а) *(-3; 4; 0)*; в) *(2; -5; 6)*;

б) *(3; -4; 0)*; г) *(-2; -5; 6).*

**11)** *Дотичну до кривої в точці A задано рівнянням* $\frac{x-5}{12} = \frac{y+6}{8} = \frac{z}{-3}$. *Точка A має координати:*

а) *(5; -6; 1)*; в) *(-5; -6; 0)*;

б) *(12; 8; -3)*; г) *(5; -6; 0).*

**12)** *Площина, яка найкраще прилягає до кривої в певній точці кривої, для кривої в цій точці називається:*

а) спрямною; в) нормальною;

б) дотичною; г) стичною.

**13)** *Лінія, яка має спільні точки з кожною кривою сімейства кривих і вектори дотичних у спільних точках до цієї лінії і лінії сімейства співпадають, називається:*

а) бінормаллю сімейства кривих;

б) обгинаючою сімейства кривих;

в) супровідною сімейства кривих;

г) еволютою.

**14)** *Обгинаючу сімейства нормалей кривої називають*:

а) евольвентою; в) еволютою;

б) бінормаллю; г) стичною.

**15)** *Геометричне місце кінців дотичних до даної кривої, кожна з яких дорівнює довжині дуги кривої від її початкової точки до точки, в якій проведена дотична називають:*

а) бінормаллю; в) стичною;

б) еволютою; г) евольвентою.

**16)** *Геометричне місце центрів кривини даної кривої називають*:

а) бінормаллю;
б) стичною;
в) еволютою;
г) евольвентою.

**17)** *Нормальна площина до кривої в певній точці* $M_0$ *задається рівнянням* $3(x-5)+y-4(z+3)=0$. *Точка* $M_0$ *має координати*:

а) *(3; 0; -4)*;
б) *(3; 1; -4)*;
в) *(5; 1; -3)*;
г) *(5; 0; -3)*.

**18)** *Нормальна площина до кривої в певній точці* $M_0$ *задається рівнянням* $3x+y-8z+15=0$. *Вектор* $\overrightarrow{m}(3;1;\,-8)$ *– це*:

а) вектор бінормалі до кривої;
б) вектор головної нормалі до кривої;
в) вектор дотичної до кривої;
г) вектор нормалі до кривої.

**19)** *Нехай* $\vec{r}=\vec{r}(s)$, $s$ *– натуральний параметр, який виражає*:

а) довжину хорди кривої між точками $t_0$ і $t_1$;
б) довжину ламаної, вписану в криву між точками $t_0$ і $t_1$;
в) довжину дуги кривої між точками $t_0$ і $t_1$;
г) довжину радіуса кривини кривої, проведеного в точку $t_0$.

**2.** Установіть відповідність:

**1)** *«спосіб задання кривої – аналітичний вираз»*:

А. параметрично;
Б. векторно-параметрично;
В. як перетин двох поверхонь;
Г. явне задання.

1. $\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$;
2. $\vec{r}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\overrightarrow{k}$ ;
3. $\begin{cases} \varphi(x;y;z)=0 \\ \psi(x;y;z)=0 \end{cases}$;
4. $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t). \end{cases}$

**2)** *«рівняння кривої – координати вектора дотичної»* за умови, що *t=0*:

А. $x=e^t, y=e^{-t}, z=t^2$;
Б. $x=e^t cost, y=e^t sint, z=e^t$;
В. $x=t, y=t^3, z=t^2+2$;
Г. $x=t^2-t, y=2t^3, z=t$.

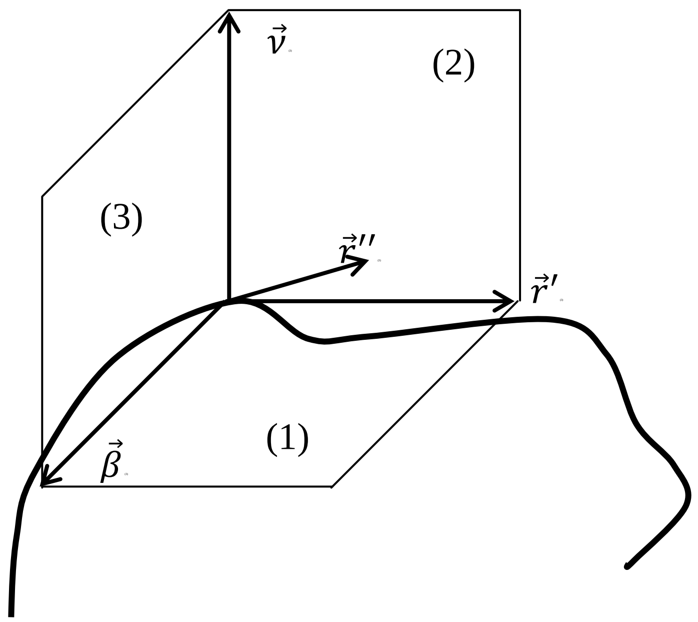
1. (*1; –1; 0*);
2. (*1; 0; 0*) ;
3. (*1; 1; 1*);
4. (*–1; 0; 1*).

## Позааудиторна модульна контрольна робота № 1

### *Тригранник Френе та його елементи*

*Основні поняття і формули*

Елементами тригранника Френе називають три взаємноперпендикулярних вектори $\vec{r}'$, $\overrightarrow{\beta}$, $\vec{\gamma}$ і площини, що їх містять.




$\vec{r}'$ – вектор дотичної;

$\vec{\beta}$ – вектор бінормалі;

$\vec{\gamma}$ – вектор головної нормалі;

(1) – спрямна площина;

(2) – стична площина;

(3) – нормальна площина.

***1)*** Рівняння дотичної $\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}$,

де $\vec{r}'(t_0) = \left(x'(t_0); y'(t_0); z'(t_0)\right)$

***2)*** Рівняння нормальної площини

$$x'(t_0)(x-x_0) + y'(t_0)(y-y_0) + z'(t_0)(z-z_0) = 0$$

***3)*** Рівняння бінормалі $\frac{x-x_0}{x_\beta} = \frac{y-y_0}{y_\beta} = \frac{z-z_0}{z_\beta}$,

де $\vec{\beta} = \vec{\beta}(x_\beta; y_\beta; z_\beta)$, і $\vec{\beta} = \vec{r}' \times \vec{r}''$

***4)*** Рівняння стичної площини

$$x_\beta(x-x_0) + y_\beta(y-y_0) + z_\beta(z-z_0) = 0$$

***5)*** Рівняння головної нормалі $\frac{x-x_0}{x_\gamma} = \frac{y-y_0}{y_\gamma} = \frac{z-z_0}{z_\gamma}$.

де $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}(x_\gamma; y_\gamma; z_\gamma)$ і $\vec{\nu} = \vec{r}' \times \vec{\beta}$

***6)*** Рівняння спрямної площини

$x_\gamma(x-x_0) + y_\gamma(y-y_0) + z_\gamma(z-z_0) = 0.$

## *Зразки розв'язування задач*

**№ 1.1.** *Скласти рівняння елементів тригранника Френе лінії* $\vec{r}'\left(\frac{t^4}{4};\frac{t^3}{3};\frac{t^2}{2}\right)$ *у точці* $M_0\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$.

*<u>Розв'язання</u>*

Знайдемо значення параметра $t_0$, яке відповідає точці $M_0\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$.

Розв'яжемо систему рівнянь: $\frac{t^4}{4}=\frac{1}{4}$; $\frac{t^3}{3}=\frac{1}{3}$; $\frac{t^2}{2}=\frac{1}{2}$. Отже, $t_0=1$.

Знайдемо першу та другу похідні вектор-функції $\vec{r}=\vec{r}(t)$:

$\vec{r}'(t^3;t^2;t)$, $\vec{r}''(3t^2;2t;1)$

у точці $t_0$ координати векторів:

$\vec{r}_0'(1;1;1)$, $\vec{r}_0''(3;2;1)$.

Знаходимо рівняння елементів тригранника Френе:

1) <u>рівняння дотичної</u>

$$x-\frac{1}{4}=y-\frac{1}{3}=z-\frac{1}{2},\text{ оскільки }\vec{r}_0'=(1;1;1)$$

2) <u>рівняння нормальної площини</u>

$$x-\frac{1}{4}+y-\frac{1}{3}+z-\frac{1}{2}=0$$
$$12x+12y+12z-13=0$$

3) <u>рівняння бінормалі</u>

$$\vec{\beta}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\3&2&1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1&1\\3&1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix}=-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$$

Отже, $\vec{\beta}=(-1;2;-1)$ або $\vec{\beta}=(1;-2;1)$

$$\frac{x-\frac{1}{4}}{1}=\frac{y-\frac{1}{3}}{-2}=\frac{z-\frac{1}{2}}{1}$$

4) <u>рівняння стичної площини</u>

$$x-\frac{1}{4}-2\left(y-\frac{1}{3}\right)+z-\frac{1}{2}=0$$

Або $12x-24y+12z-1=0$

5) <u>рівняння головної нормалі</u>

$$\vec{\nu}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\-1&2&-1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1&1\\-1&-1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1&1\\-1&-1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1&1\\-1&2\end{vmatrix}=-3\vec{i}+3\vec{k}$$

Отже, $\vec{v} = (-3; 0; 3)$, який можна замінити на $\vec{v} = (1; 0; -1)$. Тоді

$$\frac{x - \frac{1}{4}}{1} = \frac{y - \frac{1}{3}}{0} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-1}$$

6) <u>рівняння спрямної площини</u>

$$x - \frac{1}{4} - z + \frac{1}{2} = 0$$

або $4x - 4z + 1 = 0.$

*Відповідь:* 1) $x - \frac{1}{4} = y - \frac{1}{3} = z - \frac{1}{2}$;

2) $12x + 12y + 12z - 13 = 0$;

3) $\frac{x-\frac{1}{4}}{1} = \frac{y-\frac{1}{3}}{-2} = \frac{z-\frac{1}{2}}{1}$;

4) $12x - 24y + 12z - 1 = 0$;

5) $\frac{x-\frac{1}{4}}{1} = \frac{y-\frac{1}{3}}{0} = \frac{z-\frac{1}{2}}{-1}$;

6) $4x - 4z + 1 = 0$.

**№ 1.2.** *Скласти рівняння елементів тригранника Френе лінії* $\vec{r}(t\sin t, t\cos t, 2t)$ *у точці* $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

<u>*Розв'язання*</u>

Оскільки $\frac{\pi}{2}\ \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0$; $2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$, то значенню $t_0 = \frac{\pi}{2}$ на лінії відповідає точка $M_0\left(\frac{\pi}{2}; 0; \pi\right)$.

Знайдемо першу та другу похідні вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$:

$\vec{r}'(\sin t + t\cos t; \cos t - t\sin t; 2)$;

$\vec{r}''(2\cos t - t\sin t; -2\sin t - t\cos t; 0)$.

У точці $t_0 = \frac{\pi}{2}$:

$\vec{r}_0'\left(1; -\frac{\pi}{2}; 2\right)$; $\vec{r}_0''\left(-\frac{\pi}{2}; -\pi; 0\right)$ або $\vec{r}_0''\left(\frac{\pi}{2}; \pi; 0\right)$.

Знаходимо рівняння елементів тригранника Френе:

<u>1) рівняння дотичної</u>

$$\frac{x - \frac{\pi}{2}}{1} = \frac{y}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{z - \pi}{2}$$

2) <u>рівняння нормальної площини</u>

$$x - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}y + 2(z - \pi) = 0,$$

або $2x - \pi + 4z - 5\pi = 0$

3) <u>рівняння бінормалі</u>

$$\vec{\beta}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -\frac{\pi}{2} & 2\\ +\frac{\pi}{2} & \pi & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-\frac{\pi}{2} & 2\\ \pi & 0\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & 2\\ \frac{\pi}{2} & 0\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & -\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2} & \pi\end{vmatrix}=$$

$$=-2\pi\vec{i}+\pi\vec{j}+\frac{\pi}{4}(4+\pi)\vec{k}$$

Отже, $\vec{\beta}=\left(-2\pi;\pi;\frac{\pi}{4}(4+\pi)\right)$ або $\vec{\beta}=\left(-2;1;\frac{4+\pi}{4}\right)$.

Тоді

$$\frac{x-\frac{\pi}{2}}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{4(z-\pi)}{4+\pi}$$

4) <u>рівняння стичної площини</u>

$$-2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+y+\frac{4+\pi}{4}(z-\pi)=0,$$

або $$-2x+y+\frac{4+\pi}{4}z-\frac{\pi^2}{4}=0$$

5) <u>Рівняння головної нормалі</u>

$$\vec{\gamma}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -\frac{\pi}{2} & 2\\ -2 & 1 & \frac{4+\pi}{4}\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-\frac{\pi}{2} & 2\\ 1 & \frac{4+\pi}{4}\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & \frac{4+\pi}{4}\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & -\frac{\pi}{2}\\ -2 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{\pi^2+4\pi+16}{8}\vec{i}-\frac{\pi+20}{4}\vec{j}+(1-\pi)\vec{k}$$

Отже, $\gamma=\left(-\frac{\pi^2+4\pi+16}{8};-\frac{\pi+20}{4};1-\pi\right)$.

Тоді

$$\frac{8\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{-\pi^2-4\pi-16}=\frac{4y}{-\pi-20}=\frac{z-\pi}{1-\pi}$$

або

$$\frac{8\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\pi^2+4\pi+16}=\frac{4y}{\pi+20}=\frac{z-\pi}{\pi-1}$$

6) <u>рівняння спрямної площини</u>

$$\frac{\pi^2+4\pi+16}{8}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi+20}{4}y+(\pi-1)(z-\pi)=0.$$

*Відповідь:* 1) $\frac{x-\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{y}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{z-\pi}{2}$

2) $2x - \pi + 4z - 5\pi = 0$

3) $\frac{x-\frac{\pi}{2}}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{4(z-\pi)}{4+\pi}$;

4) $-2x + y + \frac{4+\pi}{4}z - \frac{\pi^2}{4} = 0$;

5) $\frac{8\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\pi^2+4\pi+16} = \frac{4y}{\pi+20} = \frac{z-\pi}{\pi-1}$;

6) $\frac{\pi^2+4\pi+16}{8}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi+20}{4}y + (\pi - 1)(z - \pi) = 0.$

**№ 1.3.** *Скласти рівняння елементів тригранника Френе лінії перетину поверхонь* $x^2 + y^2 = 1$ *та* $y^2 + z^2 = 9$ *у точці* $P(1; 0; 3)$.

*Розв'язання*

Позначимо φ: $x^2 + y^2 - 1 = 0$, ψ: $y^2 + z^2 - 9 = 0$.

Знайдемо вектори

$\vec{r}_{\varphi}'(2x; 2y; 0)$ або $\vec{r}_{\varphi}'(x; y; 0)$;

$\vec{r}_{\psi}'(0; 2y; 2z)$ або $\vec{r}_{\psi}'(0; y; z)$.

Тоді вектор дотичної до лінії перетину двох поверхонь

$$\vec{r}' = \vec{r}_{\varphi}' \times \vec{r}_{\psi}'$$

і

$$\vec{r}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & y & z \end{vmatrix} = \vec{i}yz - \vec{j}xz + \vec{k}xy$$

у точці $P(1; 0; 3)$ координати вектора $\vec{r}_0'(0; -3; 0)$ або $\vec{r}_0'(0; 1; 0)$.

1) рівняння дотичної

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{0}.$$

2) рівняння нормальної площини

$0(x-1) + y + 0(z-3) = 0$ або $y = 0$

3) рівняння бінормалі.

Оскільки $\vec{r}'(yz; -xz; xy)$, то $x' = yz$, $y' = -xz$; $z' = xy$.

Отже,

$$\vec{r}'' = (y'z + yz'; -x'z - xz'; x'y + xy') =$$
$$= (-xz^2 + y^2x; -yz^2 - x^2y; y^2z - x^2z)$$

у точці $P$ $\vec{r}_0''(-9;0;-3)$ або $\vec{r}_0''(3;0;1)$.

$$\vec{\beta}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}-3\vec{k}\ ;\ \vec{\beta}(1;0;-3).$$

Таким чином,

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-3}{-3}.$$

4) рівняння стичної площини

$$x-1-3(z-3)=0$$

або $$x-3z+8=0$$

5) рівняння головної нормалі

$$\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{vmatrix}=-3\vec{i}-\vec{k}$$

Отже, $\gamma\ (-3;0;\ -1;)$ або $\vec{\gamma}\ (3;0;1)$.

Таким чином,

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-3}{1}$$

6) рівняння спрямної площини

$$3(x-1)+z-3=0$$

або $$3x+z-6=0.$$

*Відповідь:* 1) $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{0}$.

2) $y=0$.

3) $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-3}{-3}$.;

4) $x-3z+8=0$;

5) $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-3}{1}$;

6) $3x+z-6=0$.

## Завдання до контрольної роботи № 1

Розв'язати задачі № 1.1 – 1.3.

**№ 1.1.** *Скласти рівняння елементів тригранника Френе лінії, яка задана рівнянням* $\vec{r} = \vec{t}(t)$ *у точці* $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

***Варіант*** **1.** $\vec{r} = (2t;\ t^2;\ t^3)$, $M_0(2; 1; 1)$

***Варіант*** **2.** $\vec{r} = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$, $M_0(2; 3; 4)$

***Варіант*** **3.** $\overline{\mathrm{r}} = (t; 2t^2, t^3)$, $M_0(1; 2; 1)$

***Варіант*** **4.** $\vec{r} = (3t; t^2, 2t^3)$, $M_0(6; 4; 16)$

***Варіант*** **5**. $\vec{r} = (3t, 2t^2, t^3)$, $M_0(3; 2; 1)$

***Варіант*** **6**. $\vec{r} = \left(\frac{t^4}{2}; \frac{t^3}{3}; \frac{t^2}{2}\right)$, $M_0\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$

***Варіант*** **7**. $\vec{r} = \left(\frac{t^4}{4}; \frac{t^3}{3}; \frac{3t^2}{2}\right)$, $M_0\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right)$

***Варіант*** **8**. $\vec{r} = (5t;\ t^2;\ t^3)$, $M_0(10; 4; 8)$

***Варіант*** **9**. $\vec{r} = (t + 1;\ t^2;\ 2t^3)$, $M_0(3; 4; 16)$

***Варіант*** **10**. $\vec{r} = (t;\ t^2 + 3;\ t^3)$, $M_0(1; 4; 1)$

***Варіант*** **11**. $\vec{r} = (t;\ t^2;\ t^3 + 3)$, $M_0(1; 1; 4)$

***Варіант*** **12**. $\vec{r} = (t + 5;\ t^2;\ t^3 + 1)$, $M_0(6; 1; 2)$

***Варіант*** **13**. $\vec{r} = (t - t^3;\ t^2;\ t)$, $M_0(0; 1; 1)$

***Варіант*** **14**. $\vec{r} = (4t;\ 3t^2;\ t^3)$, $M_0(4; 3; 1)$

***Варіант*** **15**. $\vec{r} = (t;\ 5t^2;\ t^3)$, $M_0(2; 20; 8)$

***Варіант*** **16**. $\vec{r} = (t;\ t^3; t^2 + 5\ )$, $M_0(2; 8; 9)$

***Варіант*** **17**. $\vec{r} = (t + 3;\ t^3 + 2; t^2)$, $M_0(4; 3; 1)$

***Варіант*** **18**. $\vec{r} = (t;\ t^3 - 4; t^2)$, $M_0(2; 4; 4)$

***Варіант*** **19**. $\vec{r} = \left(t + 1;\ \frac{t^2}{2};\ \frac{t^3}{3}\right)$, $M_0\left(2; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$

***Варіант*** **20**. $\vec{r} = (t;\ \frac{t^2}{2} + 4;\ \frac{t^3}{3} + 1)$, $M_0(1; 4\frac{1}{2}; 1\frac{1}{3})$

***Варіант*** **21**. $\vec{r} = (2t + 3;\ t^2;\ t^3)$, $M_0(5; 1; 1)$

***Варіант*** **22.** $\vec{r} = (4t - t^3;\ 3t^2;\ 2t + t^3)$, $M_0(3; 3; 3)$

***Варіант*** **23.** $\vec{r} = (5t; t^2 + 1; t^3)$, $M_0(5; 2; 1)$

***Варіант*** **24**. $\vec{r} = (2t - 3; t^2; t^3 + 1)$, $M_0(-1; 1; 2; )$

***Варіант* 25**. $\vec{\mathrm{r}} = \left(\mathrm{t} - 5; \frac{\mathrm{t}^2}{2}; \frac{\mathrm{t}^3}{3}\right)$, $M_0\left(-3; 2; \frac{8}{3}\right)$

***Варіант* 26**. $\vec{\mathrm{r}} = \left(\mathrm{t}; \frac{\mathrm{t}^2}{2}; \mathrm{t}^3 - 4\right)$, $M_0(2; 2; 4)$

***Варіант* 27**. $\vec{\mathrm{r}} = \left(6\mathrm{t}; \frac{\mathrm{t}^3}{3;}; \mathrm{t}^2 + 1\right)$, $M_0\left(6; \frac{1}{3}; 2;\right)$

***Варіант* 28**. $\vec{\mathrm{r}} = (\mathrm{t}; \mathrm{t}^2 - 4; \mathrm{t}^3 + 2)$, $M_0(2; 0; 10)$

***Варіант* 29**. $\mathrm{r} = \left(\mathrm{t} - 4; \frac{\mathrm{t}^2}{2}; \mathrm{t}^3 + 1\right)$, $M_0\left(-3; \frac{1}{2}; 2\right)$

***Варіант* 30**. $\vec{\mathrm{r}} = \left(5\mathrm{t} - 2; 4\mathrm{t}^2; \frac{\mathrm{t}^3}{3}\right)$, $M_0\left(3; 4; \frac{1}{3}\right)$

**№ 1.2.** *Скласти рівняння елементів триганника Френе лінії, яка задана рівнянням $\vec{r} = \vec{t}(t)$ у точці $t=t_0$.*

***Варіант* 1**. $\vec{r} = (2t\cos t; t\sin t; 3t)$, $t_0 = \pi$

***Варіант* 2**. $\vec{r} = (2t; t^2; e^t)$, $t_0 = 0$

***Варіант* 3**. $\vec{r} = (e^t;\ e^{-2t}; t^2)$, $t_0 = 0$

***Варіант* 4**. $\vec{r} = (e^t\cos t;\ e^t\sin t; 2e^t)$, $t_0 = 0$

***Варіант* 5**. $\vec{r} = \left(t - \sin t; 1 - \cos t; 4\sin\frac{t}{2}\right)$, $t_0 = \pi$

***Варіант* 6**. $\vec{r} = (3\cos t; \sin t; 5t)$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$

***Варіант* 7**. $\vec{r} = (\cos t; 2\sin t; e^t)$, $t_0 = \pi$

***Варіант* 8**. $\vec{r} = (2\cos t; \sin t; 2e^t)$, $t_0 = 0$

***Варіант* 9**. $\vec{r} = (\sin^2 t;\ \sin t\cos t; \cos t)$, $t_0 = \frac{3\pi}{2}$

***Варіант* 10**. $\vec{r} = (\sin^2 t; \sin t\cos t; 3\cos t)$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$

***Варіант* 11**. $\vec{r} = (3\cos t; \sin t; 5e^t)$, $t_0 = 0$

***Варіант* 12**. $\vec{r} = (e^t\cos t;\ e^t\sin t;\ 3t)$, $t_0 = 0$

***Варіант* 13**. $\vec{r} = (e^t\cos t;\ e^t\sin t;\ 4t)$, $t_0 = \pi$

***Варіант* 14**. $\vec{r} = (2t\cos t;\ -t\sin t; 3t)$, $t_0 = \pi$

***Варіант* 15**. $\vec{r} = (5\cos t;\ 4\sin t;\ 2e^t)$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$

***Варіант* 16**. $\vec{r} = \left(\frac{2}{t}; \ln t; -3t^2\right)$, $t_0 = 1$

***Варіант* 17**. $\vec{r} = (e^t;\ e^{-2t};\ 2t^2)$, $t_0 = 0$

***Варіант* 18**. $\vec{r}=\left(2(t-\sin t);2(1-\cos t);2\sin\frac{t}{2}\right)$, $t_0=\pi$

***Варіант* 19**. $\vec{r}=(\mathrm{tg}\,t;\cos t;3\sin t)$, $t_0=\frac{\pi}{4}$

***Варіант* 20**. $\vec{r}=(\sin 2t;1-\cos 2t;3\cos t)$, $t_0=\frac{\pi}{2}$

***Варіант* 21**. $\vec{r}=(t\cos t;t\sin t;2t^2)$, $t_0=\pi$

***Варіант* 22**. $\vec{r}=(\sin^2 t;\sin t\cos t;3\cos t)$, $t_0=\frac{\pi}{2}$

***Варіант* 23**. $\vec{r}=(2\mathrm{tg}\,t;3\cos t;\sin t)$, $t_0=\frac{\pi}{4}$

***Варіант* 24**. $\vec{r}=(\sin 2t;2-\cos 2t;\cos t)$, $t_0=\pi$

***Варіант* 25**. $\vec{r}=(e^t\cos t;e^t\sin t;3e^t)$, $t_0=0$

***Варіант* 26**. $\vec{r}=(2e^t;e^{-2t};2t^2)$, $t_0=0$

***Варіант* 27**. $\vec{r}=\left(3(t-\sin t);3(2+\cos t);2\sin\frac{t}{2}\right)$, $t_0=\pi$

***Варіант* 28**. $\vec{r}=(5\cos t;3\sin t;4t)$, $t_0=\frac{\pi}{2}$

***Варіант* 29**. $\vec{r}=\left(2e^{\frac{t}{2}};\ 4e^{\frac{t}{2}};\ t^2\right)$, $t_0=0$

***Варіант* 30**. $\vec{r}=\left(\frac{3}{t};2\ln t;\ -t^2+1\right)$, $t_0=1$

**№ 1.3.** *Скласти рівняння елементів тригранника Френе лінії перетину двох поверхонь* $\varphi=\varphi(t)$ та $\psi=\psi(t)$ *у точці* $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

***Варіант* 1**. $x^2+y^2=1$ та $y^2+z^2=1$, $M_0(1;0;0)$

***Варіант* 2.** $x=y^2+z^2$ та $x-2y+4z-5=0$, $M_0(1;0;1)$

***Варіант* 3**. $2x=y^2+z^2$ та $x-2y+4z-10=0$, $M_0(2;0;2)$

***Варіант* 4**. $x^2+y^2+z^2=19$ та $x^2-y^2=8$, $M_0(3;1;3)$

***Варіант* 5**. $z=x^3+y^3$ та $x-3y+4z-6=0$, $M_0(1;1;2)$

***Варіант* 6**. $x^2+y^2=8$ та $y^2+z^2=13$, $M_0(2;-2;3)$

***Варіант* 7**. $x^2+y^2+z^2=104$ та $x^2-2y^2=4$, $M_0(2;0;10)$

***Варіант* 8**. $x^2+y^2+z^2=2$ та $x^2+y^2=z$, $M_0(1;0;1)$

***Варіант* 9**. $x^2+y^2+z^2=3$ та $y^2+z^2=2x$, $M_0(1;1;-1)$

***Варіант* 10**. $x^2+y^2+z^2=9$ та $x^2+y^2=2{,}5z$, $M_0(1;-2;2)$

***Варіант* 11**. $x^2+y^2=z$ та $y^2+z^2=5x$, $M_0(1;1;2)$

***Варіант*** **12**. $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47$ та $x^2 + 2y^2 = z$, $M_0(-2;1;6)$

***Варіант*** **13**. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ та $x^2 - y^2 = 3$, $M_0(2;1;2)$

***Варіант*** **14**. $x = y^2 + z^2$ та $x - 2y + 4z = 5$, $M_0(1;0;1)$

***Варіант*** **15**. $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ та $x^2 - y^2 = 8$, $M_0(3;1;-1)$

***Варіант*** **16**. $x^2 + 2y^2 + z^2 = 10$ та $x^2 - y^2 = 3$, $M_0(2;1;-2)$

***Варіант*** **17**. $x^2 + z^2 = 2$ та $x^2 + y^2 = 1$, $M_0(-1;0;1)$

***Варіант*** **18**. $y = x^2 + z^2$ та $x + 2y - 3z - 8 = 0$, $M_0(1;2;-1)$

***Варіант*** **19**. $2z = x^2 + y^2$ та $x + 3y - 4z + 6 = 0$, $M_0(2;0;2)$

***Варіант*** **20**. $x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$ та $x^2 - y^2 = 15$, $M_0(4;1;0)$

***Варіант*** **21**. $x^2 + y^2 = 13$ та $y^2 + z^2 = 25$, $M_0(2;3;4)$

***Варіант*** **22**. $x^2 + y^2 + 3z^2 = 5$ та $y^2 + z^2 = 2x$, $M_0(1;-1;1)$

***Варіант*** **23**. $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ та $x^2 + y^2 = 2z$, $M_0(-1;1;1)$

***Варіант*** **24**. $x^2 + 3y^2 = z$ та $2x - 3y + 4z - 15 = 0$, $M_0(1;1;4)$

***Варіант*** **25**. $x = 2y^2 + z^2$ та $x - 3y + 5z - 5 = 0$, $M_0(3;1;1)$

***Варіант*** **26.** $2x^2 + y^2 = 2$ та $y^2 + 3z^2 = 1$, $M_0(1;-1;0)$

***Варіант*** **27**. $x^2 + y^2 + 3z^2 = 4$ та $x^2 + 2y^2 = 1$, $M_0(1;0;1)$

***Варіант*** **28**. $13x = z^2 + y^2$ та $2x - 3y - 5z + 7 = 0$, $M_0(1;-2;3)$

***Варіант*** **29**. $3x^2 + y^2 = 3$ та $y^2 + 3z^2 = 12$, $M_0(-1;0;2)$

***Варіант*** **30**. $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$ і $2x + 5y - 3z - 1 = 0$, $M_0(1;-1;2)$

## Позааудиторна модульна контрольна робота № 2

### *Кривина і скрут кривої*

*Основні поняття і формули*

Кривина кривої – це границя відношення приросту кута повороту дотичної до приросту довжини дуги, коли останній прямує до нуля

$$K = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3} \qquad (2.1)$$

Скрутом кривої називають границю відношення приросту кута повороту бінормалі до приросту довжини дуги, коли останній прямує до нуля

$$æ = \frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|^2} \qquad (2.2)$$

Якщо крива плоска,то скрут æ =0.

### *Зразок розв'язування задачі*

**№ 2.** *Знайти кривину та скрут кривої,яка утворюється при перетині поверхонь* $x = y^2 + z^2$ *та* $x - 2y + 4z = 5$ *у точці* $A_0(1; 0; 1)$.

*Розв'язання.*

Позначимо $\varphi$: $x - y^2 - z^2 = 0$ та $\psi$: $x - 2y + 4z - 5 = 0$.

Знайдемо вектори $\vec{r}_\varphi' = (1; -2y; -2z)$; $\vec{r}_\psi' = (1; -2; 4)$.

Вектор $\vec{r}'$: $\vec{r}' = \vec{r}_\varphi' \times \vec{r}_\psi'$ і

$$\vec{r}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2y & -2z \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}(-8y - 4z) - \vec{j}(4 + 2z) + \vec{k}(-2 + 2y).$$

Отже, $\vec{r}'(x'; y'; z') = -2(4y + 2z; 2 + z; 1 - y)$,

тоді вектор

$$\vec{r}'' = -2(4y' + 2z'; z'; -y') =$$
$$4\big(4(4y + 2z) + 2(1 - y); 1 - y; -(2 + z)\big) =$$
$$= 4\big(10 + 4z - 2y; 1 - y; -(2 + z)\big);$$

вектор $\vec{r}''' = -2(4z' - 2y'; -y'; -z') =$

$$-8\big(4(1 - y) - 2(2 + z); -(2 + z); -(1 - y)\big) = 8(4y + 2z; 2 + z; 1 - y)$$

У точці $A_0(1; 0; 1)$координати векторів:

$\vec{r}_0' = -2(2; 3; 1)$; $\vec{r}_0'' = 4(14; 1; -3)$; $\vec{r}_0''' = 8(2; 3; 1)$.

Для знаходження кривини скористаємося формулою (2.1).

Знайдемо:

1) Векторний добуток

$$\vec{r}_0^{\,'} \times \vec{r}_0^{\,''} = -8\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 14 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -8\left(-10\vec{i} + 20\vec{j} - 40\vec{k}\right) =$$

$$= 80(\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}).$$

Отже, $\vec{r}_0^{\,'} \times \vec{r}_0^{\,''} = 80(1; -2; 4)$,

тоді абсолютна величина вектора $|\vec{r}_0^{\,'} \times \vec{r}_0^{\,''}| = 80\sqrt{1+4+16} = 80\sqrt{21}$.

2) Довжина вектора $\left|\overrightarrow{r'_0}\right| = 2\sqrt{4+9+1} = 2\sqrt{14}$.

Тоді кривина

$$К = \frac{80\sqrt{21}}{8 \cdot 14\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{3}}{7\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{6}}{14}.$$

Скрут знаходимо за формулою (2.2).

Обчислюємо мішаний добуток векторів

$$(\vec{r}^{\,'}\vec{r}^{\,''}\vec{r}^{\,'''}) = -64\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 14 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, скрут даної кривої æ $= 0$.

*Відповідь:* $К = \frac{5\sqrt{16}}{14}$; æ $= 0$.

## Завдання до контрольної роботи № 2

Розв'язати задачу № 2.

**№ 2**. *Знайти кривину та скрут лінії.*

***Варіант* 1**. Знайти кривину і скрут лінії $\vec{r} = (3\cos t;\ 4\sin t; 2e^t)$ у точці $t_0 = \pi$.

***Варіант* 2**. Знайти кривину і скрут лінії $\vec{r} = (e^t, e^{-3t}, 3t^2)$ у точці $t_0 = 0$.

*Варіант* 3. Знайти кривину і скрут лінії $\vec{r} = \left(\frac{3}{t}; 2\ln t; -t^2 + 2\right)$ у точці $t_0 = 1$.

***Варіант* 4**. Знайти кривину і скрут лінії $\vec{r} = \left(2e^{\frac{t}{2}}; 6e^{\frac{t}{2}}; t^2\right)$ у точці $t_0 = 0$.

***Варіант* 5**. Знайти кривину і скрут лінії перетину двох поверхонь $x^2 + y^2 + z^2 = 104$ та $x^2 - 2y^2 = 4$ у точці $M_0(2; 0; 10)$.

***Варіант* 6**. Знайти кривину і скрут лінії перетину двох поверхонь $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ та $y^2 + z^2 = 2x$ у точці $M_0(1; 1; -1)$.

***Варіант*** **7**. Знайти кривину і скрут лінії $\vec{r} = (5\cos t; 3\sin t; 4t)$ у точці $t_0 = \pi$.

***Варіант*** **8**. Знайти кривину і скрут лінії $\vec{r} = \left(3(t - \sin t);\ 3(2 + \cos t); 2\sin\frac{t}{2}\right)$ у точці $t_0 = 2\pi$.

***Варіант*** **9**. Знайти кривину і скрут лінії $\vec{r} = (2e^t; e^{-2t}; 3t^2)$ у точці $t_0 = 0$.

***Варіант*** **10**. Знайти кривину і скрут лінії перетину двох поверхонь $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$ та $2x + 5y - 3z - 1 = 0$ у точці $M_0(1; -1; 2)$.

***Варіант*** **11**. Знайти кривину і скрут лінії перетину двох поверхонь $3x^2 + y^2 = 3$ та $y^2 + 3z^2 = 12$ у точці $M_0(1; 0; 2)$.

***Варіант*** **12**. Знайти кривину і скрут лінії перетину двох поверхонь $13x = z^2 + y^2$ та $2x - 3y - 5z + 7 = 0$ у точці $M_0(1; -2; 3)$.

***Варіант*** **13**. Знайти кривину і скрут лінії перетину двох поверхонь $x^2 + y^2 + 3z^2 = 4$ та $x^2 + 2y^2 = 1$ у точці $M_0(-1; 0; 1)$.

***Варіант*** **14**. Знайти кривину і скрут лінії $\vec{r} = (e^t\cos t\ ; e^t\sin t; 5e^t)$ у точці $t_0 = 0$.

***Варіант*** **15**. Знайти кривину і скрут лінії $\vec{r} = (\sin 2t; 2 - \cos 2t; \cos t)$ у точці $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

***Варіант*** **16**. Знайти кривину і скрут лінії $\vec{r} = (3\mathrm{tg}\, t; 3\cos t; \sin t)$ у точці $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

***Варіант*** **17**. Знайти кривину і скрут лінії $\vec{r} = (\sin^2 t; \sin t\cos t; 5\cos t)$ у точці $t_0 = \pi$.

***Варіант*** **18**. Знайти кривину і скрут лінії перетину двох поверхонь $y^2 + z^2 = x$ та $x - 2y + 4z - 5 = 0$ у точці $M_0(1; 0; 1)$.

***Варіант*** **19**. Знайти кривину і скрут лінії перетину двох поверхонь $x^2 + y^2 + z^2 = 19$ та $x^2 - y^2 = 8$ у точці $M_0(-3; 1; 3)$.

***Варіант*** **20**. Знайти кривину і скрут лінії $x^3 + y^3 = z$, $x - 3y + 4z - 6 = 0$ у точці $M_0(1; 1; 2)$.

***Варіант*** **21**. Знайти кривину і скрут лінії $\vec{r} = (2t\cos t; t\sin t; 2t)$ у точці $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

***Варіант*** **22**. Знайти кривину і скрут лінії $\vec{r} = (e^t\cos t;\ e^t\sin t; 3e^t)$ у точці $t_0 = 0$.

***Варіант* 23**. Знайти кривину і скрут лінії $\vec{r} = (2\cos t; 3\sin t; 2e^t)$ у точці $t_0 = 0$.

***Варіант* 24**. Знайти кривину і скрут лінії $\vec{r} = (e^t \cos t; \; e^t \sin t; 4t)$ у точці $t_0 = 0$.

***Варіант* 25**. Знайти кривину і скрут лінії $\vec{r} = \left(t - \sin t; 1 - \cos t; 4\sin\frac{t}{2}\right)$ у точці $t_0 = 2\pi$.

***Варіант* 26**. Знайти кривину і скрут лінії перетину двох поверхонь $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ та $y^2 + z^2 = 2x$ у точці $Mo(1; 1; -1)$.

***Варіант* 27**. Знайти кривину і скрут лінії перетину двох поверхонь $x^2 + z^2 = 2$ та $x^2 + y^2 = 1$ у точці $Mo(1; 0; -1)$.

***Варіант* 28**. Знайти кривину і скрут лінії перетину двох поверхонь $x = 2y^2 + z^2$, $x - 3y + 5z - 5 = 0$ у точці $Mo(3; 1; 1)$.

***Варіант* 29**. Знайти кривину і скрут лінії перетину двох поверхонь $2z = x^2 + y^2$ та $x + 3y - 4z + 6 = 0$ у точці $Mo(2; 0; 2)$.

***Варіант* 30**. Знайти кривину і скрут лінії перетину двох поверхонь $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ та $x^2 - y^2 = 8$ у точці $Mo(-3; 1; 1)$.

## *Модуль 2.* Теорія поверхонь

*Тематика модуля*

1. Поняття поверхні. Регулярні поверхні.
2. Рівняння поверхні. Способи задання поверхні в евклідовому просторі.
3. Дотична площина і нормаль до поверхні та їх рівняння для різних способів задання.
4. Стичний параболоїд поверхні.
5. Класифікація точок поверхні. Індикатриса Дюпена.
6. Звичайні та особливі точки поверхні та їх геометричний зміст.
7. Криволінійні координати на поверхні. Координатна сітка.
8. Перша квадратична форма поверхні та її геометричний зміст.
9. Обчислення коефіцієнтів першої квадратичної форми.
10. Застосування першої квадратичної форми (обчислення довжини дуги, кута між лініями на поверхні та площі області поверхні).
11. Друга квадратична форма поверхні та її геометричний зміст. Обчислення коефіцієнтів другої квадратичної форми.
12. Індикатриса кривини поверхні. Формула Ейлера.
13. Основна формула кривини кривої на поверхні. Нормальна кривина; теорема Меньє та її геометричний зміст.
14. Кривина кривої в точці. Необхідна і достатня умови того, щоб годографом вектор-функції була пряма.
15. Головні напрями і кривини.
16. Обчислення головних кривин. Повна і середня кривини поверхні
17. Омбілічні точки.
18. Формула Родріга.
19. Необхідна і достатня умова головного напрямку поверхні. Кут між головними напрямками.
20. Формула Ейлера для узагальненої кривини нормального перерізу поверхні та її геометричний зміст.

## Запитання і завдання для самоконтролю

**1.** Серед наведених варіантів оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь:

**1)** *Точка М множини Ф називається* <u>...</u> *, якщо будь-який окіл цієї точки належить множині.*

а) зовнішньою;

б) граничною;

в) поверхневою;

г) внутрішньою.

**2)** *Параметричні рівняння сфери* $x^2 + y^2 + z^2 = R$ *мають вигляд:*

а) $x = R\cos u \sin v\,, y = R\cos u \sin v\,, z = R\sin u\,$;

б) $x = R\cos u \cos v\,, y = R\cos u \sin v\,, z = R\sin u\,$;

в) $x = R\cos u \cos v\,, y = R\sin u \sin v\,, z = R\sin u\,$;

г) $x = R\cos u \cos v\,, y = R\cos u \sin v\,, z = R\sin u$.

**3)** *Першою квадратичною формою поверхні* $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ *є вираз:*

а) $dS = E\ du^2 + 2F\ dudv + G\ dv^2$;

б) $dS^2 = E\ du + 2F\ dudv + G\ dv$;

в) $dS^2 = E\ du^2 + F\ dudv + G\ dv^2$;

г) $dS^2 = E\ du^2 + 2F\ dudv + G\ dv^2$.

**4)** *Перша квадратична форма поверхні виражає:*

а) площу частинки поверхні;

б) площу кола, що лежить на поверхні;

в) довжину дуги кривої на поверхні;

г) довжину кола, яке лежить на поверхні.

**5)** *Кутом між кривими на поверхні називають кут між*:

а) дотичною і нормаллю в точці перетину кривих;

б) дотичними до цих кривих в точці їх перетину;

в) радіусами кривини кривих у точці їх перетину;

г) дотичною і бінормаллю в точці перетину кривих.

**6)** *Координатна сітка поверхні є ортогональною, тоді:*

а) E = 0;

б) F = 1;

в) G = 0;

г) F = 0.

**7)** *Другою квадратичною формою поверхні* $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ *є вираз*:

а) $Ldu + 2Mdudv + Ndv$;

б) $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$;

в) $Ldu + Mdudv + Ndv$;

г) $Ldu^2 + Mdudv + Ndv^2$.

**8)** *Дотична площина до поверхні* $F(x; y; z) = 0$ *в деякій точці задається рівнянням* $18x + 3y - 4z - 41 = 0$. *Координати вектора нормалі в цій точці:*

а) $(-18;\ -3;\ -4)$;

б) $(18;\ 3;\ -4)$;

в) $(18;\ 3;\ 4)$;

г) $(3;\ -4;\ -41)$.

**9)** *Вектор нормалі до поверхні* $F(x; y; z) = 0$ *в точці* $M(3; 5; 7)$ *має координати* $\vec{n}\,(18; 3;\ -4)$. *Рівняння дотичної площини в точці* $M$ *має вигляд:*

а) $18x + 3y - 4z - 41 = 0$;

б) $18x + 3y - 4z - 11 = 0$;

в) $3x + 5y + 7y - 41 = 0$;

г) $3x + 5y + 7 - 11 = 0$.

**10)** $\vec{n}\,(3; 8; 12)$ – *вектор нормалі до поверхні* $F(x; y; z) = 0$ *в точці* $M_0(-3; 4; 5)$. *Рівняння дотичної площини до поверхні в цій точці:*

а) $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{12}$;

б) $\frac{x-3}{-3} = \frac{y-8}{4} = \frac{z-12}{5}$;

в) $3x + 8y + 12z - 19 = 0$;

г) $3x + 8y + 12z - 83 = 0$.

**11)** $3x + 8y + 12z - 83 = 0$ - *рівняння дотичної площини до поверхні* $F(x; y; z) = 0$ *в точці* $M_0(-3; 4; 5)$. *Рівняння нормалі в цій точці*:

а) $\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{12}$;

б) $\frac{x-3}{-3} = \frac{y-8}{4} = \frac{z-12}{5}$;

в) $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{12}$;

г) $\frac{x+3}{3} = \frac{y+4}{8} = \frac{z+5}{12}$.

**12)** *На поверхні з I квадратичною формою* $dS^2 = du^2 + (u^2 + 5)dv^2$ *диференціал дуги лінії* $u = v$ *дорівнює:*

а) $dS^2 = (u^2 + 5)du^2$;

б) $dS = \sqrt{u^2 + 5}dv$;

в) $dS = \sqrt{u^2 + 6}du$;

г) $dS^2 = (u^2 + 6)du^2$.

**13)** *Точка* $M(3;5;7)$ *належать поверхні* $x = 2u - v,\ y = u^2 + v^2,\ z = u^3 - v^3$. *Криволінійні координати точки* $M$:

а) $u = 2,\ v = 1$ *або* $u = 0{,}4,\ v = -2{,}2$;

б) $u = -2,\ v = 1$;

в) $u = -2,\ v = 1$ *або* $u = 0{,}4,\ v = -2{,}2$;

г) $u = 2,\ v = 1$.

**14)** $k_1$ і $k_2$ *– головні кривини поверхні. Повна кривина поверхні обчислюється за формулою:*

а) $K = k_1 + k_2$;

в) $K = k_1 \cdot k_2$;

б) $K = \frac{k_1 + k_2}{2}$;

г) $K = k_1^2 + k_2^2$.

**15)** $k_1$ і $k_2$ *– головні кривини поверхні. Середня кривина поверхні обчислюється за формулою*:

а) $H = k_1 + k_2$;

в) $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$;

б) $H = k_1 \cdot k_2$;

г) $H = \sqrt{k_1 \cdot k_2}$.

**16)** *Точка поверхні буде еліптичною, якщо в цій точці*:

а) повна кривина додатна;

б) повна кривина від’ємна;

в) повна кривина дорівнює 0;

г) середня кривина додатна.

**17)** *Точка поверхні буде параболічною, якщо в цій точці:*

а) повна кривина додатна;

б) повна кривина від’ємна;

в) повна кривина дорівнює 0;

г) середня кривина додатна.

**18)** *Зміст теореми Меньє можна виразити формулою (*$\theta$ *– кут між векторами* $\vec{v}$ *і* $\vec{n}$*):*

а) $H = k \cos\theta$;

в) $K_n = k^2 \cos\theta$;

б) $K_n = k \cos\theta$;

г) $K = K_n \cos\theta$.

**19)** *Координатна сітка на поверхні буде спряженою, якщо*:

а) $L = 0$;

в) $N = 0$;

б) $M = 0$;

г) $F = 0$.

**20)** *Повну кривину поверхні називають*:

а) кривиною Меньє; в) Ейлеровою кривиною;
б) Родрігівською кривиною; г) Гауссовою кривиною.

**2.** Установіть відповідність:

**1)** *«спосіб задання поверхні – аналітичний вираз»*:

А. параметричне;
Б. явне задання;
В. неявне задання;
Г. векторно-параметрично.

1. $\vec{r} = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$
2. $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$
3. $z = f(x,y)$
4. $F(x,y\,,z) = 0$.

**2)** *«поверхня – рівняння поверхні»*:

А. площина;
Б. сфера;
В. еліпсоїд;
Г. гіперболоїд.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
3. $Ax + By + Cz + D = 0$
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

**3)** *«коефіцієнти I квадратичної форми – значення коефіцієнтів для u = 1, v = 1»* (поверхня $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u^2$):

А. $E$; Б. $F$; В. $G$; Г. $EG - F^2$.

1. 20; 2. 5; 3. 0; 4. 1.

## Позааудиторна модульна контрольна робота № 3

### *Перша квадратична форма поверхні*

*Основні поняття і формули*

Вираз виду

$$dS^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

де $dS$ – диференціали дуги кривої, називають першою квадратичною формою поверхні.

*Знаходження коефіцієнтів першої квадратичної форми.*

**1)** Якщо поверхню задано векторно-параметричними рівняннями $\vec{r}=\vec{r}(u; v)$, то

$$E = \vec{r}_u^{\,2}, \qquad F = \vec{r}_u\vec{r}_v, \qquad G = \vec{r}_v^{\,2} \qquad (3.1)$$

**2)** Якщо поверхню задано в явному вигляді $Z = Z(x; y)$, то

$$E = 1 + Z_x^2; \quad F = Z_x Z_y; \qquad G = 1 + Z_y^2 \qquad (3.2)$$

**3)** Якщо поверхню задано неявно, $\Phi(x; y; z) = 0$, то

$$E = 1 + \left(\frac{\Phi_x}{\Phi_z}\right)^2, \; F = \frac{\Phi_x\,\Phi_y}{\Phi_z^2}, \qquad E = 1 + \left(\frac{\Phi_y}{\Phi_z}\right)^2 \quad (3.3)$$

*Застосування І квадратичної форми*

**1)** Знаходження довжини другої дуги кривої, що належить поверхні:

$$\mathrm{S} = \int_{M_1}^{\mathrm{M}_2} \mathrm{dS} \qquad (3.4)$$

**2)** Знаходження кута між кривими:

$t:\begin{cases} u = u_1(t) \\ v = v_1(t) \end{cases}$ і $\tau:\begin{cases} u = u_2(t) \\ v = v_2(t) \end{cases}$ на поверхні $\vec{r}=\vec{r}(u; v)$

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{E\,du\,\delta\,u + F(du\,\delta v + dv\delta u) + Gdu\,\delta v}}{\sqrt{\mathrm{Edu^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2}}\sqrt{\mathrm{F\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}} \qquad (3.5)$$

Якщо $F = 0$, то $\varphi = 90°$

**3)** Обчислення площі частини поверхні:

$$\mathrm{S} = \iint_{\mathrm{D}} \sqrt{\mathrm{EG - F^2}}\,\mathrm{du\,dv} \qquad (3.6)$$

або

$$\mathrm{S} = \iint_{\mathrm{D}} \sqrt{1 + \mathrm{Zx^2 + Zy^2}}\,\mathrm{dx\,du} \qquad (3.7)$$

## *Зразки розв'язування задач*

**№ 3.1.** *Знайти першу квадратичну форму:*

***а*** *) поверхні* $x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2, \qquad z = uv$

*Розв'язання*.

Запишемо рівняння даної поверхні у векторно-параметричній формі:

$$\vec{r} = (u^2 + v^2; u^2 - v^2; uv).$$

Знайдемо вектори :

$$\vec{r}_u = (2u; 2v; v),$$
$$\vec{r}_v = (2v; -2v; u)$$

Коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні знайдемо за формулами (3.1):

$$E = \vec{r}_u^{\,2} = 4u^2 + 4u^2 + v^2 = 8u^2 + \ v^2$$

$$F = \vec{r}_u \vec{r}_v = 4uv - 4uv + uv = uv$$

$$G = \vec{r}_v^{\,2} = 4v^2 + 4v^2 + u^2 = 8v^2 + u^2$$

Отже, $\qquad dS^2 = (8u^2 + \ v^2)du^2 + 2uvdudv + (8v^2 + \ u^2)dv^2.$

*Відповідь:* $dS^2 = (8u^2 + \ v^2)du^2 + 2uvdudv + (8v^2 + \ u^2)dv^2.$

***б)*** *поверхні*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

*Розв'язання*.

У даному випадку поверхню задано неявно $\Phi(x; y; z) = 0$.

Частинні похідні функції $\Phi$: $\Phi_x = \frac{2x}{a^2}; \qquad \Phi_y = \frac{2y}{b^2}; \qquad \Phi_z = -\frac{2z}{c^2}.$

Коефіцієнти першої квадратичної форми знайдено за формулами (3.3):

Отже, $E = 1 + \left(\frac{\Phi_x}{\Phi_z}\right)^2 = 1 + \left(-\frac{2x}{a^2} \cdot \frac{c^2}{2z}\right)^2 = 1 + \frac{c^4 x^2}{a^4 z^2} = \frac{a^4 z^2 + c^4 x^2}{a^4 z^2}.$

$$F = \frac{\Phi_x \Phi_y}{\Phi_z^2} = \frac{2x}{a^2} \cdot \frac{2y}{b^2} : \frac{4z^2}{c^4} = \frac{xyc^4}{a^2 b^2 z^2}.$$

$$G = 1 + \left(-\frac{2y}{b^2} \cdot \frac{c^2}{2z}\right)^2 = 1 + \frac{y^2 c^4}{z^2 b^4} = \frac{z^2 b^4 + y^2 c^4}{z^2 b^4}.$$

Перша квадратична форма поверхні

$$dS^2 = \frac{a^4 z^2 + c^4 x^2}{a^4 z^2} dx^2 + \frac{2c^4 xy}{a^2 b^2 z^2} dxdy + \frac{z^2 b^4 + y^2 c^4}{z^2 b^4} dy^2.$$

*Відповідь:*

$$dS^2 = \frac{a^4 z^2 + c^4 x^2}{a^4 z^2} dx^2 + \frac{2c^4 xy}{a^2 b^2 z^2} dxdy + \frac{z^2 b^4 + y^2 c^4}{z^2 b^4} dy^2.$$

**№ 3.2, *а***. *Знайти довжину дуги кривої* $U = \frac{av^2}{2}$ $(a \neq 0)$, *що міститься між точками* $A\ (u = 0, v = 0)$ *і* $B\ (u = 2a, v = 2)$ *поверхні* $x = \frac{u}{2}(\sqrt{3}\, cos\, v + sin\, v$ $, y = \frac{u}{2}(\sqrt{3}\, sin\, v - cos\, v), z = av$

*Розв'язання*.

1) Запишемо рівняння даної поверхні у векторно-параметричній формі

$$\vec{r} = \left(\frac{u}{2}\left(\sqrt{3}\cos v + \sin v\right); \frac{u}{2}\left(\sqrt{3}\sin v - \cos v\right); av\right).$$

Частинні похідні

$$\vec{r}_u = \left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\cos v + \sin v\right); \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\sin v - \cos v\right); 0\right),$$

$$\vec{r}_v = \left(\frac{u}{2}\left(-\sqrt{3}\sin v + \cos v\right); \frac{u}{2}\left(\sqrt{3}\cos v + \sin v\right); a\right),$$

2) Використовуючи формули (3.1), знайдено першу квадратичну форму даної поверхні:

$$E = \vec{r}_u^{\,2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\cos v + \sin v\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\sin v - \cos v\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(3\cos^2 v + 2\sqrt{3}\cos v \sin v + \sin^2 v + 3\sin^2 v + \cos^2 v\right.$$

$$\left. - 2\sqrt{3}\cos v \sin v\right) = \frac{1}{4}\cdot 4 = 1$$

$$F = \vec{r}_u\vec{r}_v = \frac{u}{4}\left(\sqrt{3}\cos v + \sin v\right)\left(-\sqrt{3}\sin v + \cos v\right) +$$

$$+ \frac{u}{4}\left(\sqrt{3}\sin v - \cos v\right)\left(\sqrt{3}\cos v + \sin v\right) = 0$$

$$G = \vec{r}_v^{\,2} = \frac{u^2}{4}(\cos v - \sqrt{3}\sin v)^2 + \frac{u^2}{4}(\sqrt{3}\cos v + \sin v)^2 + a^2 =$$

$$= \frac{u^2}{4}(4\cos^2 v + 4\sin^2 v) + a^2 = u^2 + a^2$$

$$dS^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$$

3) Криву задано рівнянням $u = \frac{av^2}{2}$, диференціал дуги цієї кривої $du = avdv$

Тоді

$$dS^2 = a^2v^2dv^2 + \left(\frac{a^2v^4}{4} + a^2\right)dv^2 = \left(a^2v^2 + \frac{a^2v^4}{4} + a^2\right)dv^2 =$$

$$= \frac{a^2}{4}(4v^2 + v^4 + 4)dv^2 = \frac{a^2}{4}(v^2 + 2)^2dv^2;$$

$$dS = \frac{a}{2}(v^2 + 2)dv.$$

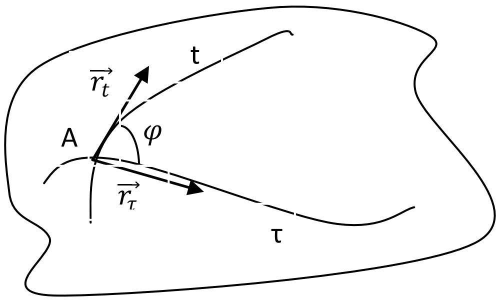
3) Довжина дуги кривої між точками, для яких $v_1 = 0$, $v_2 = 2$, дорівнює (формула (3.4)):

$$S = \frac{a}{2}\int_0^2 (v^2 + 2)dv = \frac{a}{2}\left(\frac{v^3}{3} + 2v\right)\Bigg|_0^2 = \frac{a}{2}\left(\frac{8}{3} + 4\right) = \frac{10a}{3}.$$

*Відповідь*: $\frac{10a}{3}$.

**№ 3.2, *б.*** *Знайти кут між кривими* $u = \frac{av^2}{2}$ *і* $v = 1$ *на поверхні із першою квадратичною формою поверхні* $dS^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$.

*Розв'язання:*




Позначимо

t: $u = \frac{av^2}{2}$ і $\vec{r}_t(du; dv)$,

$\tau$: $v = 1$, $\vec{r_\tau}(\delta u; \delta v)$.

Диференціали криволінійних координат уздовж лінії $t$ : $du = avdv$, а вздовж лінії $\tau$: $\delta v = 0\delta u$, тобто $\delta v = 0$, а $\delta u \neq 0$.

З умови відомо коефіцієнти першої квадратичної форми:

$$E = 1, \qquad F = 0, \qquad G = u^2 + a^2$$

З урахуванням знайдених значень формула (3.5) приймає вигляд:

$$\cos\varphi = \frac{du\delta u + \left(u^2 + a^2\right)dv\delta v}{\sqrt{du^2 + (u^2 + a^2)dv^2}\sqrt{\delta u^2 + (u^2 + a^2)\delta v^2}} =$$

$$= \frac{avdv\delta u + (u^2 + a^2)dv \cdot 0}{\sqrt{a^2v^2dv^2 + (u^2 + a^2)dv^2}\sqrt{\delta u^2 + (u^2 + a^2) \cdot 0}} =$$

$$= \frac{avdv\delta u}{dv\sqrt{a^2v^2 + u^2 + a^2}\,\delta u} = \frac{av}{\sqrt{a^2v^2 + u^2 + a^2}}.$$

Знайдемо криволінійні координати точки перетину ліній $t$ і $\tau$:

$v = 1, \ u = \frac{a}{2}$.

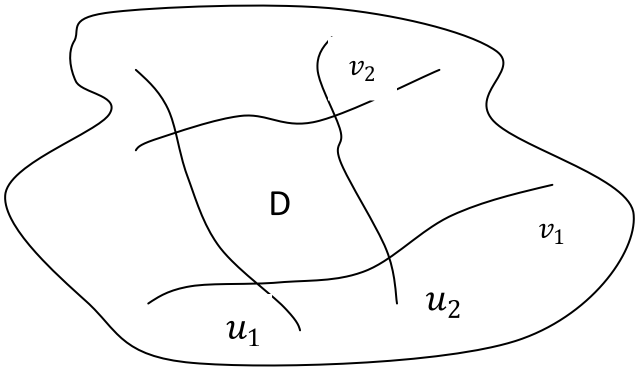
Отже, $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4} + a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{9a^2}} = \frac{2}{3}$.

Тоді $\varphi = \arccos\frac{2}{3}$

*Відповідь:* $\arccos\frac{2}{3}$

**№ 3.2, *в*.** *На гелікоїді* $x = au\ \cos v, y = au \sin v, z = hv$ *знайти площу чотирикутника обмеженого кривими* $u_1 = 0, u_2 = \frac{h}{a}, v_1 = 0, v_2 = 1.$

*Розв'язання:*




Для знаходження такої площі скористаємося формулою (3.6).

1) Знаходимо першу квадратичну формулу поверхні:

$$\vec{r} = (au\ \cos v;\ au \sin v;\ hv);$$

$$\vec{r}_u = (a \cos v; a \sin v; 0),$$

$$\vec{r}_v = (-au \sin v; au \cos v; h).$$

Тоді за формулою (3.1)

$E = a^2,\ F = 0,$ $G = a^2u^2 + h^2$ і

$$ds^2 = a^2du^2 + (a^2u^2 + h^2)dv^2.$$

2) Шукана площа

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv = \int_0^1 \int_0^{\frac{h}{a}} \sqrt{a^2(a^2u^2 + h^2)}\, dudv =$$

$$= a^2 \int_0^1 dv \int_0^{\frac{h}{a}} \sqrt{u^2 + \frac{h^2}{a^2}} du =$$

$$= a^2 \int_0^1 dv \left( \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + \frac{h^2}{a^2}} + \frac{h^2}{2a^2} ln \left( u + \sqrt{u^2 + \frac{h^2}{a^2}} \right) \right) \Bigg|_0^{\frac{h}{a}} =$$

$$= a^2 \int_0^1 \frac{h^2}{2a^2} \left( \sqrt{2} + ln(\sqrt{2} + 1) \right) dv =$$

$$= \frac{h^2}{2a^2} \cdot a^2 \left( \sqrt{2} + ln(\sqrt{2} + 1) \right) V \Big|_0^1 = \frac{h^2}{2} \left( \sqrt{2} + ln(\sqrt{2} + 1) \right).$$

*Відповідь:* $\frac{h^2}{2} \left( \sqrt{2} + ln(\sqrt{2} + 1) \right)$ ум.од.

**Завдання до контрольної роботи № 3**

Розв'язати задачі № 3.1, 3.2 (*а, б, в*).

**№3.1.** *Знайти першу квадратичну формулу поверхні:*

***Варіант*** **1**. $x = 5\cos u \cos v$, $y = 5\cos u \sin v$, $z = 7\sin u$.

***Варіант*** **2**. $x = 2\cos u \cos v$, $y = 2\cos u \sin v$, $z = 5 \cos u$.

***Варіант*** **3**. $x = 6 \cos u \cos v$, $y = 6\cos u \sin v$, $z = 6 \sin u$.

***Варіант*** **4**. $x = 3\cos u \cos v$, $y = 3\cos u \sin v$, $z = 3 \cos u$.

***Варіант*** **5**. $x = 2u\cos v$, $y = 2u\sin v$, $z = 3u^2$.

***Варіант*** **6**. $x = 5\cos v$, $y = 5\sin v$, $z = 7u$.

***Варіант*** **7**. $x = 3u\cos v$, $y = 3u\sin v$, $z = u$.

***Варіант*** **8**. $x = 8u\cos v$, $y = 8u\sin v$, $z = 5v$.

***Варіант*** **9**. $x = 9u\cos v$, $y = 9u\sin v$, $z = 2 + 5v$.

***Варіант*** **10**. $x = u$, $y = 2v$, $z = u^2 + v^2$.

***Варіант*** **11**. $x = 3u$, $y = \frac{5u^2}{2}$, $z = 7v$.

***Варіант*** **12**. $x = 2\cos u \cos v$, $y = 3\sin u \cos v$, $z = 5\sin v$.

***Варіант*** **13**. $x = u^2 + v^2$, $y = 2u^2 - v^2$, $z = 3uv$.

***Варіант*** **14**. $z = 3x^2 + \frac{7}{2}y^2$.

***Варіант*** **15**. $x = 2u + v$, $y = 3uv$, $z = u^3 + v^3$.

***Варіант*** **16**. $z = x^3 + y^3$.

***Варіант*** **17**. $x = u$, $y = u^2 - 3v$, $z = u^3 - 2uv$.

***Варіант*** **18**. $x^2 + y^2 + z^2 = 169$.

***Варіант*** **19**. $x^2 - 3y^2 - 4z^2 + 5 = 0$.

***Варіант*** **20**. $x = (1 + 3\cos u)\cos v$, $y = (1 + 3\cos u)\sin v$, $z = 3\sin u$.

***Варіант*** **21**. $xyz = 8$.

***Варіант*** **22**. $x = u + \cos v$; $y = u - \sin v$, $z = 5u$.

***Варіант*** **23**. $x = 3u - v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 - v^3$.

***Варіант*** **24**. $x = (2 + 3\cos u)\cos v$, $y = (2 + 3\cos u)\sin v$, $z = 3\sin u$.

***Варіант*** **25**. $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = 2v + 3u$.

***Варіант*** **26**. $x^2 + y^2 = x(y + z)$.

***Варіант*** **27**. $z = \frac{5}{2}(x^2 + y^2)$.

***Варіант*** **28**. $x = 2u\cos v$, $y = 2u\sin v$, $z = 7u$.

***Варіант*** **29**. $z = 3xy$.

***Варіант*** **30.** $x = 2u\cos v$, $y = 2u\sin v$, $z = 3u^2$.

**№ 3.2, *а*.**

***Варіант* 1**. На поверхні $x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = uv$ обчислити довжину лінії $v = 3u$ між точками, для яких $u = 1$ і $u = 2$.

***Варіант* 2.** Знайти довжину дуги лінії $v = 3u$ на поверхні $30z = xy$ між точками $A_1$ $(u = 1, v = 3)$ та $A_2$ $(u = 5, v = 6)$

***Варіант* 3.** Знайти довжину дуги лінії $v = 3u$ на поверхні $z = 5xy$ між точками $A_1$ $(u = 1, v = 8)$ та $A_2$ $(u = 3, v = 12)$.

***Варіант* 4.** Знайти довжину дуги лінії $v = u - 2$ на поверхні $x = u\cos u$, $y = u\sin v$, $z = u^2$ між точками $A_1$ $(u = 1, v = 16)$ та $A_2$ $(u = 5, v = 12)$.

***Варіант* 5**. Знайти довжину дуги лінії $u = 2v$ на поверхні $\vec{r}\left(u; \frac{u^2}{3}; v\right)$ між точками, для яких $u = 1$ і $u = 2$.

***Варіант* 6.** Знайти довжину дуги лінії $v = u - 4$ на поверхні $x = 3u\cos u$, $y = 3u\sin v$, $z = u^2$ між точками $A_1$ $(u = 1, v = 6)$ та $A_2$ $(u = 5, v = 7)$.

***Варіант* 7.** На поверхні $x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = uv$ обчислити довжину лінії $v = 7u$ між точками, для яких $u = 1$ і $u = 2$.

***Варіант* 8**. Знайти довжину дуги лінії $u = \frac{v^2}{2}$ на поверхні $x = u + v$, $y = 7uv$, $z = u^3 + v^3$ між точками, для яких $u = 1$ і $u = 2$.

***Варіант* 9.** На поверхні $x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = 2uv$ обчислити довжину лінії $v = 3u$ між точками, для яких $u = 1$ і $u = 2$.

***Варіант* 10.** Знайти довжину дуги лінії $u = 4v$ на поверхні $x = 6u\sin v$, $y = 6u\cos v$, $z = 3v$ між точками, для яких $u = 1$ та $u = 5$.

***Варіант* 11.** Знайти довжину дуги лінії $u = 5 + 3v$ на поверхні $x = 7\cos u\cos v, y = 7\cos u\sin v, z = 5\sin u$ між точками $u = 1$ та $u = 3$.

***Варіант* 12.** Знайти довжину дуги лінії $u = v + 4$ на поверхні $x = 3\cos v, y = 3\sin v, z = 7v$ між точками $u = 1$ та $u = 2$.

***Варіант* 13**. Знайти довжину дуги лінії $v = 3u$ на поверхні $3z = xy$ між точками $A_1$ $(u = 1, v = 3)$ та $A_2$ $(u = 4, v = 12)$.

***Варіант* 14.** Знайти довжину дуги лінії $u = 5 + 3v$ на поверхні $x = 9\cos u\cos v, y = 9\cos u\sin v, z = 9\sin u$ між точками $u = 1$ та $u = 4$.

***Варіант* 15.** Знайти довжину дуги лінії $u = 3v$ на поверхні $x = 2\cos u\cos v$, $y = 2\cos u\sin v$, $z = 3\cos u$ між точками, для яких $u = 3$ та $u = 5$.

***Варіант*** **16.** На поверхні $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = v + 4$ обчислити довжину лінії $v = \ln(u - \sqrt{u^2 + 6})$ між точками, для яких $u = 1,\ u = 4$ .

***Варіант*** **17.** На поверхні $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = 3v$ обчислити довжину лінії $u = v^2$ між точками, для яких $u = 2$ та $u = 5$.

***Варіант*** **18.** Знайти довжину дуги лінії $u = 5v$ на поверхні $\vec{r}\left(u; \frac{u^2}{3};\ 2v\right)$ між точками, для яких $u\ =\ 1$ і $u\ = 2$.

***Варіант*** **19.** На поверхні $x = 3u\cos v\,,\ y = 3u\sin v,\ z = v$ обчислити довжину лінії $v = \ln(u - \sqrt{u^2 + 4})$ між точками, для яких $u = 1,\ u = 3$.

***Варіант*** **20.** На поверхні $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = 3v - 5$ обчислити довжину лінії $u = v^2$ між точками, для яких $u = 1$ та $u = 5$.

***Варіант*** **21**. На поверхні $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = v + 7$ обчислити довжину лінії $v = \ln(2u - \sqrt{u^2 + 5})$ між точками, для яких $u = 1,\ u = 4$ .

***Варіант*** **22.** На поверхні $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = 3v - 2$ обчислити довжину лінії $v = 7$ між точками, для яких $u = 2$ та $u = 5$.

***Варіант*** **23.** На поверхні $x = 2u + v,\ y = uv,\ z = u^3 + v^3$ обчислити довжину лінії $v = 7u$ між точками, для яких $u = 1$ та $u = 3$.

***Варіант*** **24.** Знайти довжину дуги лінії $v = 10u$ на поверхні $3z = xy$ між точками $A_1\ (u = 1, v = 2)$ та $A_2\ (u = 4, v = 12)$

***Варіант*** **25**. На поверхні $x = 2u^2 + v^2, y = 3u^2 - v^2, z = uv$ обчислити довжину лінії $u = 3v$ між точками, для яких $u = 1$ та $u = 3$.

***Варіант*** **26**. На поверхні $x = 2u,\ y = u^2 - 5v,\ z = u^3 - uv$ обчислити довжину лінії $u = 7v$ між точками, для яких $v = 1,\ v = 2$.

***Варіант*** **27.** На поверхні $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = v + 7$ обчислити довжину лінії $v = \ln(u + \sqrt{u^2 + 16})$ між точками, для яких $u = 1,\ u = 4$ .

***Варіант*** **28.** На поверхні $x\ =\ u^2 + v^2, y\ =\ u^2 - v^2, z\ =\ 5uv$ обчислити довжину лінії $v\ =\ 2u$ між точками, для яких $u\ =\ 1$ і $u\ = 3$.

***Варіант*** **29**. Знайти довжину дуги лінії $v = \ln\left(u + \sqrt{u^2 + 9}\right)$ на гелікоїді $x = u\cos u,\ y = u\sin v,\ \ z = 2v$ між точками, для яких $u = 4$ і $u\ = 5$.

***Варіант*** **30**. На поверхні $\vec{r}\left(3u; v - 5; \frac{5uv}{3}\right)$ обчислити довжину лінії $u = 3v$ між точками, для яких $u = 1, u = 5$.

**№ 3.2, *б*.**

***Варіант* 1.** Знайти кут між лініями $v = u + 7$ і $v = 3 + u$ на поверхні із першою квадратичною формою $dS^2 = (1 + 3u^2)du^2 + u^2dv^2$.

***Варіант* 2**. Знайти кут між лініями $v = u + 2$ і $v = 3 - u$ на поверхні $x = u\cos u, \quad y = u\sin v, \quad z = u^2$.

***Варіант* 3**. Знайти кут між лініями $u = 2$ і $u = v$ на поверхні $x = u^2 + v, \quad y = u^2 - v^2, \quad z = uv$.

***Варіант* 4**. На параболоїді $z = 13xy$ знайти кут між лініями $x = 5$ та $x = 2y$.

***Варіант* 5.** Знайти кут між лініями $v = 2u$ і $v = 3$ на поверхні із першою квадратичною формою $dS^2 = R^2(du^2 + cos^2u)dv^2$.

***Варіант* 6.** Знайти кут між лініями $v = u + 2$ і $v = 3 + u$ на поверхні із першою квадратичною формою $dS^2 = du^2 + R^2dv^2$.

***Варіант* 7.** Знайти кут між лініями $v = 3u$ і $v = 2$ на поверхні із першою квадратичною формою $dS^2 = (1 + 9u^2)du^2 + u^2dv^2$.

***Варіант* 8.** Знайти кут між лініями $v = u + 5$ і $v = 10 + u$ на поверхні із першою квадратичною формою $dS^2 = (1 + 8u^2)du^2 + u^2dv^2$.

***Варіант* 9**. Знайти кут між лініями $u = 2$ та $u = 2v$ на поверхні $x = 2u + v, y = uv, z = u^3 + v^3$.

***Варіант* 10**. Знайти кут між лініями $u = 3$ та $u = v + 4$ на поверхні $x = 3\cos v, y = 3\sin v, z = 5v$.

***Варіант* 11.** Знайти кут між лініями $v = -u$ і $v = u^2$ на поверхні із першою квадратичною формою $dS^2 = du^2 + (u^2 + 16)dv^2$.

***Варіант* 12.** Знайти кут між лініями $v = u$ і $v = 3$ на поверхні із першою квадратичною формою $dS^2 = 9du^2 + (1 + 9cosu)^2dv^2$.

***Варіант* 13.** Знайти кут між лініями $v = u^2$ і $v = 2u$ на поверхні із першою квадратичною формою $dS^2 = du^2 + (u^2 + 25)dv^2$.

***Варіант* 14**. Знайти кут між лініями $u = 3, \quad u = 2v$ на сфері $x = 3\cos u \sin v, \quad y = 3\sin u \sin v, \quad z = 3\cos v$.

***Варіант* 15.** Знайти кут між лініями $v = -u^2$ і $v = 4u$ на поверхні із першою квадратичною формою $dS^2 = du^2 + (u^2 + 16)dv^2$.

***Варіант*** **16**. Знайти кут між лініями $u = 3 + v,\ u = 5$ на поверхні $x = 3\sin u, y = 3\cos u,\ z = 5v$.

***Варіант*** **17**. Знайти кут між лініями $u = 3 + 2v,\ u = 7$ на поверхні $x = 8v\cos u,\ y = 8v\sin u,\ z = 7u$.

***Варіант*** **18**. Знайти кут між лініями $u = 4v,\quad v = 2$ на поверхні $x = 9u\sin v,\ y = 9u\cos v,\ z = 3v$.

***Варіант*** **19.** Знайти кут між лініями $v\ =\ 2\,u$ і $v =\ 7$ на поверхні із першою квадратичною формою $dS^2 = 16ctg^2du^2 + 16sin^2udv^2$.

***Варіант*** **20**. Знайти кут між лініями $u = 7 + v,\ u = 4$ на поверхні $x = 2u + v, y = 3uv, z = u^3 + v^3$.

***Варіант*** **21.** Знайти кут між лініями $v\ = -2\,u$ і $v =\ 3$ на поверхні із першою квадратичною формою $dS^2 = 16(du^2 + cos^2u)dv^2$.

***Варіант*** **22.** Знайти кут між лініями $v\ =\ -u$ і $v =\ 3u$ на поверхні із першою квадратичною формою $dS^2 = 4du^2 + (1 + 4cosu)^2dv^2$.

***Варіант*** **23.** Знайти кут між лініями $v\ =\ -2\,u$ і $v =\ 3$ на поверхні із першою квадратичною формою $dS^2 = 9ctg^2du^2 + 9sin^2udv^2$.

***Варіант*** **24.** Знайти кут між лініями $v\ =\ u - 2$ і $v =\ 3$ на поверхні із першою квадратичною формою $dS^2 = (1 + 4u^2)du^2 + u^2dv^2$.

***Варіант*** **25.** Знайти кут між лініями $v\ =\ u -\ 2$ і $v =\ 7 + u$ на поверхні із першою квадратичною формою $dS^2 = du^2 + 25dv^2$.

***Варіант*** **26.** Знайти кут між лініями $v\ =\ u$ і $v =\ 7$ на поверхні із першою квадратичною формою

$$dS^2 = (4sin^2u + 25cos^2u)du^2 + 4cos^2udv^2.$$

***Варіант*** **27.** Знайти кут між лініями $v\ =\ -2\,u$ і $v =\ -3$ на поверхні із першою квадратичною формою $dS^2 = 6ctg^2du^2 + 6sin^2udv^2$.

***Варіант*** **28.** Знайти кут між лініями $v\ =\ u +\ 2$ і $v =\ 3 - u$ на поверхні із першою квадратичною формою $dS^2 = du^2 + 100dv^2$.

***Варіант*** **29.** Знайти кут між лініями $u = 5$ і $v =\ 3u$ на поверхні із першою квадратичною формою $dS^2 = du^2 + (1 + cosu)^2dv^2$.

***Варіант*** **30.** Знайти кут між лініями $v = 3 + u, u = 1$ на поверхні $x = 5u - v, y = 3u^2 + v^2, z = u^3 - v^3$.

**№ 3.2, *в*.**

***Варіант* 1.** Знайти площу чотирикутника на поверхні $\vec{r}\left(5v+2; v+2; \frac{uv}{3}\right)$, обмеженого лініями $u=5$, $u=9$ та $v=1$, $v=2$.

***Варіант* 2.** Знайти площу чотирикутника на поверхні з першою квадратичною формою $dS^2 = du^2 + dv^2$, обмеженого лініями $u=3$, $u=9$ та $v=1$, $v=4$.

***Варіант* 3.** Знайти площу чотирикутника на поверхні з першою квадратичною формою $dS^2 = du^2 + (u^2+20)dv^2$, обмеженого лініями $u=3$, $u=9$ та $v=3$, $v=4$.

***Варіант* 4.** Знайти площу чотирикутника на поверхні з першою квадратичною формою $dS^2 = du^2 + (1+cosu)^2 dv^2$, обмеженого лініями $u=1$, $u=3$ та $v=1$, $v=4$.

***Варіант* 5.** Знайти площу чотирикутника на поверхні $\vec{r}\left(3u; v; \frac{uv}{5}\right)$, обмеженого лініями $u=2$, $u=5$ та $v=1$, $v=7$.

***Варіант* 6**. Знайти площу чотирикутника на поверхні $x=u^2+v^2$, $y=u^2-v^2$, $z=5uv$, обмеженого лініями $u=5$, $u=2v$.

***Варіант* 7**. Знайти площу чотирикутника на поверхні $z=2x^2+9y^2$, обмеженого лініями $x=1$, $x=2$ та $y=1$, $y=3$.

***Варіант* 8.** Знайти площу чотирикутника на поверхні $\vec{r}\,(5u\sin v\,, 5u\cos v\,, 8v)$, обмеженого лініями $u=1$, $u=7$ та $v=1$, $v=7$.

***Варіант* 9.** Знайти площу чотирикутника на поверхні з першою квадратичною формою $dS^2 = du^2 + 5dv^2$, обмеженого лініями $u=3$, $u=9$ та $v=1$, $v=4$.

***Варіант* 10.** Знайти площу чотирикутника на поверхні з першою квадратичною формою $dS^2 = du^2 + sh^2 u dv^2$, обмеженого лініями $u=3$, $u=9$ та $v=1$, $v=4$.

***Варіант* 11.** Знайти площу чотирикутника на поверхні $\vec{r}\left(3v+5; v-5; \frac{uv}{3}\right)$, обмеженого лініями $u=3$, $u=4$ та $v=1$, $v=2$.

***Варіант* 12**. Знайти площу чотирикутника на поверхні $\vec{r}\left(2u; v; \frac{3uv}{4}\right)$, обмеженого лініями $u = 1$, $u = 2$ та $v = 3$, $v = 5$.

***Варіант* 13.** Знайти площу чотирикутника на поверхні $z = 2x^2 - 9y^2$, обмеженого лініями $x = 1$, $x = 2$ та $y = 1$, $y = 7$.

***Варіант* 14.** Знайти площу чотирикутника на поверхні з першою квадратичною формою $dS^2 = du^2 + sh^2 u dv^2$, обмеженого лініями $u = 5$, $u = 9$ та $v = 1$, $v = 5$.

***Варіант* 15.** Знайти площу чотирикутника на поверхні $z = 4x^2 + 9y^2$, обмеженого лініями $x = 1$, $x = 3$ та $y = 1$, $y = 3$.

***Варіант* 16.** Знайти площу чотирикутника на поверхні з першою квадратичною формою $dS^2 = 2du^2 + 5dv^2$, обмеженого лініями $u = 3$, $u = 9$ та $v = 10$, $v = 4$.

***Варіант* 17.** Знайти площу чотирикутника на поверхні з першою квадратичною формою $dS^2 = du^2 + (u^2 + 36)dv^2$, обмеженого лініями $u = 3$, $u = 10$ та $v = 1$, $v = 2$.

***Варіант* 18.** Знайти площу чотирикутника на поверхні з першою квадратичною формою $dS^2 = du^2 + (u^2 + 64)dv^2$, обмеженого лініями $u = 3$, $u = 12$ та $v = 1$, $v = 2$.

***Варіант* 19.** Знайти площу чотирикутника на поверхні $\vec{r}\left(v + 9; v + 1; \frac{uv}{5}\right)$, обмеженого лініями $u = 3$, $u = 8$ та $v = 1$, $v = 2$.

***Варіант* 20.** Знайти площу чотирикутника на поверхні $\vec{r}\left(5u; 3v; \frac{3uv}{4}\right)$, обмеженого лініями $u = 1$, $u = 7$ та $v = 1$, $v = 5$.

***Варіант* 21.** Знайти площу чотирикутника на поверхні $\vec{r}\,(3u \sin v, 3u \cos v, 20v)$, обмеженого лініями $u = 1$, $u = 12$ та $v = 3$, $v = 4$.

***Варіант* 22**. Знайти площу чотирикутника на поверхні з першою квадратичною формою $dS^2 = du^2 + 9dv^2$, обмеженого лініями $u = 3$, $u = 9$ та $v = 10$, $v = 14$.

***Варіант* 23**. Знайти площу чотирикутника на поверхні $\vec{r}\,(3u \sin v, 3u \cos v, 8v)$, обмеженого лініями $u = 1$, $u = 7$ та $v = 3$, $v = 4$.

***Варіант* 24**. Знайти площу чотирикутника на поверхні $\vec{r}\left(3v+2; v+1; \frac{uv}{3}\right)$, обмеженого лініями $u=3$, $u=7$ та $v=1$, $v=2$.

***Варіант* 25.** Знайти площу чотирикутника на поверхні $\vec{r}\,(3u\sin v\,, 3u\cos v\,, 10v)$, обмеженого лініями $u=1$, $u=10$ та $v=3$, $v=4$.

***Варіант* 26.** Знайти площу чотирикутника на поверхні $\vec{r}\,(3u\mathrm{cos}u\cos v\,, 3\mathrm{cos}usinv, 3sinu)$, обмеженого лініями $u=1$, $u=4$ та $v=1$, $v=4$.

***Варіант* 27**. Знайти площу чотирикутника на поверхні $z=36x^2+9y^2$, обмеженого лініями $x=1$, $x=3$ та $y=2$, $y=7$.

***Варіант* 28**. Знайти площу чотирикутника на поверхні $\vec{r}\,(2u\mathrm{cos}u\cos v\,, 2\mathrm{cos}usinv, 2sinu)$, обмеженого лініями $u=2$, $u=3$ та $v=1$, $v=9$.

***Варіант* 29.** Знайти площу чотирикутника на поверхні $\vec{r}\,(3u\sin v\,, 3u\cos v\,, 7v)$, обмеженого лініями $u=1$, $u=5$ та $v=3$, $v=5$.

***Варіант* 30.** Знайти площу чотирикутника на поверхні з першою квадратичною формою $dS^2=3du^2+8dv^2$, обмеженого лініями $u=4$, $u=9$ та $v=1$, $v=9$.

## Позааудиторна модульна контрольна робота № 4

### Друга квадратична форма поверхні

*Основні поняття і формули*

Вираз $Ldu^2$ $+2\,Mdudv$ + $Ndv^2$ називають <u>другою квадратичною формою</u> поверхні.

*Знаходження коефіцієнтів II квадратичної форми*:

1) Поверхню задано векторно-параметричним рівнянням $\vec{r} = \vec{r}$ (u;v), тоді

$$\mathrm{L} = \frac{(\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{uu}}\ ,\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{u}},\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{v}})}{\sqrt{\mathrm{EG}-\ \mathrm{F}^2}}$$
$$\mathrm{M} = \frac{(\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{uv}}\ ,\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{u}},\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{v}})}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}} \qquad (4.1)$$
$$N = \frac{(\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{vv}}\ ,\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{u}},\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{v}})}{\sqrt{\mathrm{EG}-\ \mathrm{F}^2}}$$

де E, F, G – коефіцієнт I квадратичної форми.

2) Поверхню задано в явному вигляді $Z = Z\ (x;y)$, тоді
$\mathrm{EG}-\ \mathrm{F}^2 = 1+\ Z_x^2 + Z_y^2$ і

$$L = \frac{Z_{xx}}{\sqrt{1+\ Z_x^2+Z_y^2}}$$
$$M = \frac{Z_{xy}}{\sqrt{1+Z_x^2+Z_y^2}} \qquad (4.2)$$
$$N = \frac{Z_{yy}}{\sqrt{1+\ Z_x^2+Z_y^2}}$$

### *Зразок розв'язування задачі*

**№ 4.** *Знайти другу квадратичну форму псевдосфери* $x = cos\,u + ln\,tg\frac{u}{2}, \quad y = sin\,u\,cos\,v, \quad z = sin\,u\,sin\,v.$

<u>*Розв'язання*</u>.

Запишемо векторно-параметричне рівняння даної поверхні

$$\vec{r} = \left(\cos u + ln\,tg\frac{u}{2}, \sin u\cos v\,, \sin u \sin v\right).$$

Для знаходження коефіцієнтів другої квадратичної форми *L, M, N* скористаємося формулами (4.1).

1) У першу чергу знаходимо

$$\vec{r}_u = \left(-\sin u + \frac{1}{\sin u};\ \cos u\ \cos v;\ \cos u\ \sin v\right);$$
$$\vec{r}_v = (0;\ -\sin u\sin v\,, \sin u\cos v);$$

$$\vec{r}_{uu} = (-\cos u - \frac{\cos u}{\sin^2 u};\ -\ \sin u \cos v;\ -\sin u \cos v);$$

$$\vec{r}_{uv} = (\ 0; \cos u \sin v;\ \cos u\ \cos v);$$

$$\vec{r}_{vv} = (0;\ -\sin u \cos v;\ -\sin u \sin v)\ .$$

2) За формулами (3.1) відшукуємо коефіцієнти першої квадратичної форми:

$$E = \sin^2 u + \frac{1}{\sin^2 u} - 2 + \cos^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v =$$
$$= 1\sin 2u - 1 = \mathrm{ctg} 2u;$$

$$F = -\cos u\ \cos v\ \sin u \sin v + \cos u\ \cos v\ \sin u \sin v = 0;$$

$$E = sin^2 u\ sin^2 v + sin^2 u\ cos^2 v = sin^2 u$$

Отже, $\qquad EG - F^2 = \mathrm{ctg}^2 u \cdot \sin^2 u = \cos^2 u.$

3) Знаходимо мішані добутки векторів

$$(\vec{r}_{uu}, \vec{r}_u, \vec{r}_v) = \begin{vmatrix} \cos u + \dfrac{\cos u}{\sin^2 u} & \sin u \cos v & \sin u \sin v \\ -\sin u + \dfrac{1}{\sin u} & \cos u \cos v & \cos u \sin v \\ 0 & \sin u \sin v & -\sin u \cos v \end{vmatrix} = -\frac{\cos^2 u}{\sin u};$$

$$(\vec{r}_{uv}, \vec{r}_u, \vec{r}_v) = \begin{vmatrix} 0 & \cos u \sin v & \cos u \cos v \\ -\sin u + \dfrac{1}{\sin u} & \cos u \cos v & \cos u \sin v \\ 0 & -\sin u \sin v & \sin u \cos v \end{vmatrix} = 0;$$

$$(\vec{r}_{vv}, \vec{r}_u, \vec{r}_v) = \begin{vmatrix} 0 & -\cos v \sin u & -sinu\ sinv \\ -\sin u + \dfrac{1}{\sin u} & \cos u \cos v & \cos u \sin v \\ 0 & -\sin u \sin v & \sin u \cos v \end{vmatrix} = \sin u \cos^2 u.$$

Підставивши знайдені значення в формули (4.1), одержуємо коефіцієнти другої квадратичної форми

$$L = -\frac{\cos^2 u}{\sin u \cdot \cos u} = -ctg\ u;$$
$$M = 0;$$
$$N = \frac{\sin u \cos^2 u}{\cos u} = \sin u \cos u\ .$$

Отже,

$-ctg\ u\ du^2 + \sin u \cos u\ dv^2$ – друга квадратична форма поверхні.

*Відповідь*: $-ctg\ u\ du^2 + \sin u \cos u\ dv^2$ .

**Завдання до контрольної роботи № 4**

Розвязати задчу № 4.

**№ 4.** Знайти другу квадратичну форму поверхні

***Варіант* 1**. $x^2$–$5y^2$ + $4z^2$–8=0.

***Варіант* 2**. $x = (1 + 2\cos u)\cos v, y = (1 + 2\cos u)\sin v, z = 2\sin u$.

***Варіант* 3**. $x = 2u + \cos v, y = 2u - \sin v, z = 3v$.

***Варіант* 4**. $x = 5u - v, y = u^2 + v^2, z = u^3 - v^3$.

***Варіант* 5**. $x = (2 + 5\cos u)\cos v, y = (2 + 5\cos u)\sin v, z = 3\sin u$.

***Варіант* 6**. $x = 2u\cos v, y = 2u\sin v, z = u + v$.

***Варіант* 7**. $x^2 + y^2 = 2x(y + z)$.

***Варіант* 8**. $z = \frac{3}{2}(x^2 + y^2)$.

***Варіант* 9.** $x = u\cos v, y = u\sin v, z = u + 5$.

***Варіант* 10**. $3z = 2xy$.

***Варіант* 11**. $\mathrm{x} = 2usinv$ , $y = 2ucosv$ , $z = 5u^2$.

***Варіант* 12**. $x = cosu\ cosv$ , $y = cosu\ sinv$ , $z = sinu + 4$ .

***Варіант* 13**. $x = 2cosu\cos v$ , $y = 2\cos u\sin v$ , $z = \cos u + 5$.

***Варіант* 14**. $xyz = 27$.

***Варіант* 15**. $x = 3\cos u\cos v$ , $y = 3\cos u\cos v$ , $z = \sin u + 2$.

***Варіант* 16**. $x = u\cos v$ , $y = u\sin v$ , $z = 3u^2 + 5$.

***Варіант* 17**. $x = 5\sin u$ , $y = 5\sin v$ , $z = 2v - 3$ .

***Варіант* 18**. $x = 2u\sin v$ , $y = 2u\cos v$ , $z = u + 3$.

***Варіант* 19**. $x = 7u\cos v$ , $y = 7u\sin v$ , $z = 5v + 4$.

***Варіант* 20**. $x = u + 3$ , $y = 2v + 1$ , $z = u^2 + v^2$.

***Варіант* 21**. $x = 3u + 4$ , $y = \frac{u^2}{6}$ , $z = 7v + 2$.

***Варіант* 22**. $x = 2\cos u\cos v$ , $y = 7\sin u\cos v$ , $z = 3\sin v$.

***Варіант* 23**. $x = u^2 + v^2$ , $y = 3u^2 - v^2$ , $z = 5uv$.

***Варіант* 24**. $z = 3x^2 - \frac{7}{2}y^2$.

***Варіант* 25**. $x = 2u - v$ ,  $y = 4uv$ ,  $z = u^3 + v^3$.

***Варіант* 26**. $z = 2x^3 + y^3$.

***Варіант* 27**. $x = 3u$ ,  $y = u^2 - 5v$ ,  $z = u^3 + 3uv$.

***Варіант* 28**. $x^2 + y^2 + z^2 = 145$.

***Варіант* 29**. $x^2 + 3y^2 - 8z^2 + 9 = 0$.

***Варіант* 30**. $x = 2u + \cos v$ ,  $y = u - \sin v$ ,  $z = u + 3$.

## *Модуль 3.* Внутрішня геометрія поверхні

*Тематика модуля*

1. Асимптотичні лінії на поверхні. Асимптотичний напрямок.
2. Необхідна і достатня умова співпадання асимптотичної сітки ліній з координатною сіткою поверхні.
3. Характеристична властивість асимптотичних ліній поверхні. Асимптотичні лінії на різних типах поверхні.
4. Лінії кривини на поверхні. Означення та диференціальне рівняння ліній кривини поверхні.
5. Необхідна і достатня умови співпадання координатних ліній з лініями кривини.
6. Обчислення головних кривин. Повна і середня кривини поверхні.
7. Ортогональна сітка ліній кривини поверхні. Необхідна і достатня умова того, щоб координатна сітка поверхні співпадала із сіткою ліній кривини.
8. Гауссова кривина поверхні як об'єкт її внутрішньої геометрії.
9. Сферичне відображення поверхні.
10. Лінійчасті поверхні та поверхні обертання.
11. Теорема Гаусса.
12. Геодезична кривина як інваріант внутрішньої геометрії поверхні.
13. Геодезичні лінії на поверхні. Означення та характеристична властивість геодезичних ліній.
14. Властивості геодезичних ліній поверхні.
15. Диференціальне рівняння геодезичних ліній поверхні.
16. Теорема Гаусса-Бонне. Сума внутрішніх кутів геодезичного трикутника поверхні.
17. Напівгеодезична параметризація поверхні.
18. Екстремальна властивість геодезичних.
19. Поверхні сталої гаусової кривини.
20. Геометрія стародавньої Греції, Вавілону, Єгипту. Геометрія Евкліда.
21. Аксіоматичний метод побудови геометричної теорії. Вимоги до системи аксіом.
22. Геометрії Рімана, Лобачевського на поверхні.
23. Топологічні і метричні простори.
24. Замкнені множини, граничні точки.
25. Аксіома віддільності.

26. Відображення. Звуження і зведення відображень. Неперервні відображення.
27. Гомеоморфізми.
28. Зв’язність і компактність топологічного простору. Хаусдорфовий топологічний простір.
29. Орієнтованість і неорієнтованість поверхонь.
30. Двосторонність і односторонність поверхонь.

## Запитання і завдання для самоконтролю

**1.** Серед наведених варіантів оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь:

**1)** *Диференціальне рівняння поверхні асимптотичних ліній має вигляд*:
а) $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = 0$; в) $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0$;
б) $Edu^2 + Fdudv + Gdv^2 = 0$; г) $Ldu^2 + Mdudv + Ndv^2 = 0$.

**2)** *Лінією кривини поверхні називається лінія, напрямок якої в кожній її точці співпадає з*:
а) асимптотичним напрямком; в) головним напрямком;
б) спряженим напрямком; г) нормальним напрямком.

**3)** *Геодезичною лінією на поверхні називається така лінія, в кожній точці якої*:
а) геодезична кривина додатна; в) геодезична кривина = 0;
б) геодезична кривина від’ємна; г) нормальна кривина додатна.

**4)** *Лінія на поверхні, напрямок якої в кожній точці співпадає з головним напрямком, називається*:
а) асимптотичною лінією; в) лінією кривини;
б) геодезичною лінією; г) лінією спряження.

**5)** *Напрямок* $\frac{du}{dv}$ *на поверхні називається асимптотичним, якщо вздовж такого напрямку*:
а) повна кривина дорівнює 0;
б) середня кривина дорівнює 0;
в) нормальна кривина дорівнює 0;
г) повна кривина максимальна.

**6)** $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ - *друга квадратична форма поверхні. Якщо* $M = 0$*, то координатна сітка на поверхні*:

а) ортогональна;
в) спряжена;
б) асимптотична;
г) відсутня.

**7)** *Зміст теореми Меньє можна виразити формулою (*$\theta$ *– кут між векторами* $\vec{\nu}$ *і* $\vec{n}$*):*

а) $H = k\cos\theta$;
в) $K_n = k^2\cos\theta$;
б) $K_n = k\cos\theta$;
г) $K = K_n\cos\theta$.

**8)** *Під внутрішньою геометрією розуміють геометрію, що вивчає об'єкти, що залежать лише від*:

а) площі ділянки поверхні;
б) квадрату довжини дуги кривої на поверхні;
в) площі поверхні;
г) довжини дуги кривої на поверхні;

**9)** *Координатна сітка на поверхні є асимптотичною, якщо*:

а) $L = N = 0$;
в) $M = N = 0$;
б) $L = M = 0$;
г) $E = F = 0$.

**10)** *Координатна сітка на поверхні буде спряженою, якщо*:

а) $L = 0$;
в) $N = 0$;
б) $M = 0$;
г) $F = 0$.

**11)** *Повну кривину поверхні називають*:

а) кривиною Меньє;
в) Ейлеровою кривиною;
б) Родрігівською кривиною;
г) Гауссовою кривиною.

**12)** *Внутрішня геометрія поверхонь вивчає об'єкти, які визначаються лише*:

а) геодезичною кривиною;
в) II квадратичною формою;
б) третьою квадратичною формою;
г) I квадратичною формою.

**13)** *Через кожну точку* $P(u_0;\ v_0)$ *поверхні можна провести в заданому напрямку*:

а) безліч геодезичних;
в) єдину геодезичну;
б) жодної геодезичної;
г) дві геодезичні.

**14)** *Серед усіх кривих, що з'єднують дві досить близькі точки на поверхні геодезична є*:

а) найдовшою; в) найкоротшою;
б) найзручнішою; г) однозначною.

**15)** $K_n$ - *нормальна кривина,* $k_1$, $k_2$ - *головні кривини поверхні. Формула Ейлера має вигляд*:

а) $K_n = k_1 \cos\varphi + k_2 \sin\varphi$; в) $K_n^2 = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi$;
б) $K_n = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi$; г) $K_n = k_1^2 \cos^2\varphi + k_2^2 \sin^2\varphi$.

**16)** *Якщо крива на поверхні є геодезичною, то в кожній точці поверхні співпадають*:

а) вектор головної нормалі і вектор нормалі;
б) вектор нормалі і вектор бінормалі;
в) вектор головної нормалі і вектор дотичної;
г) вектор бінормалі і вектор дотичної.

**2.** Установіть правильну послідовність дій:

**1)** *Для знаходження ліній кривини*:

А. складання диференціального рівняння;
Б. знаходження коефіцієнтів II квадратичної форми поверхні;
В. знаходження коефіцієнтів I квадратичної форми поверхні;
Г. знаходження головних напрямків.

**2)** *Для знаходження асимптотичних ліній*:

А. знаходження коефіцієнтів I квадратичної форми поверхні;
Б. знаходження коефіцієнтів II квадратичної форми поверхні;
В. складання диференціального рівняння;
Г. знаходження асимптотичних напрямків.

## **Вказівки щодо оформлення**
### ***позааудиторних модульних контрольних робіт з навчальної дисципліни «Дифенціальна геометрія і топологія»***

Кожна позааудиторна модульна контрольна робота містить задачі, які відповідають тематиці модуля.

*Для успішного виконання позааудиторної модульної контрольної роботи потрібно виконати наступні кроки:*

**I.** З'ясувати термін виконання контрольної роботи (встановлює викладач).

**II.** Визначити свій варіант за номером прізвища в журналі групи (*наприклад*, якщо прізвище студента міститься під номером 5, то він виконує ***Варіант 5***).

*Зауваження:* варіант роботи для студента (студентів) може бути змінений викладачем.

**III.** Підписати зошит для позааудиторних модульних контрольних робіт на титульній сторінці:

| |
|---|
| ЗОШИТ<br>ДЛЯ МОДУЛЬНИХ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ<br>(ПОЗААУДИТОРНИХ)<br>із диферннціальної геометрії і топології<br>студента ____групи денної (заочної) форми навчання<br>фізико-математичного факультету ЖДУ імені Івана Франка<br>(              прізвище, ім'я та по-батькові         )<br>20…-20… навч. рік<br><br>Варіант № |

**IV.** Приступаючи до виконання кожної контрольної роботи, потрібно повторити необхідні теоретичні відомості, основні формули та рекомендовану літературу, а також розглянути розв'язання типових задач, які подано до кожної теми.

*Зауваження:* Варто проаналізувати, чим умова для Вашого варіанта відрізняється від того, що розв'язаний. У разі необхідності, проконсультуйтеся з викладачем.

**V.** Виконання кожної контрольної роботи потрібно розпочинати із нового аркуша, зробивши такі позначення:

МОДУЛЬНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА № …
(ПОЗААУДИТОРНА)
Тема: ………

ОЦІНКА___________________

РОЗВ'ЯЗАННЯ

**VI.** Розв'язаня задач записувати в тому порядку, в якому вони подані у завданні. При цьому:

- спочатку записати умову;
- потім власне розв'язання, яке може супроводжуватися малюнком, а також повинне містити пояснення кроків міркувань та математичних операцій;
- обов'язково слід указати відповіді до усіх запитань задачі.

# РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА


1. Александров А. Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия. – М.: Наука, 1990.
2. Атанасян Л.С., Гуревич Г.Б. Геометрия. – М.: Просвещение, 1976.
3. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия : учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – В 2-х ч. – М. : Просвещение, 1987.
4. Атанасян Л.С., Васильева М.В. Сборник задач по геометрии. – М. : Просвещение, 1975.
5. Базылев В.Т. Сборник задач по геометрии. – М. : Просвещение, 1980.
6. Базылев В.Т., Дуничев К.И. Геометрия. – М. : Просвещение, 1975.
7. Бакельман И.Я. Введение в дифференциальную геометрию в целом. – М. : Наука, 1973.
8. Болтянский В.Г., Ефремович В.А. Наглядная топология. – М. : Наука. 1982.
9. Борисевич Ю.Г. Введение в топологию : учебное пособие. – М. : Высшая школа, 1980.

10 Борисенко О.А. Диференціальна геометрія і топологія. – Х. : Основа, 1995. – 304 с.

11 Кованцов М. І. Диференціальна геометрія. – К. : Вища школа, 1973. – 276 с.

12 Кованцов Н.И. Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ : сборник задач. –К. : Высшая школа. 1982.

13 Мищенко А.С. Курс дифференциальной геометрии и топологии. – М. : Изд-во МГУ, 1980. – 184 с.

14 Мищенко А.С. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. – М. : Изд-во МГУ, 1981.

15 Моденов П.С. Сборник задач по дифференциальной геометрии. – М. : Учпедгиз, 1949.

16 Погорелов А.В. Геометрия : учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности „Математика” – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 176 с.

17 Погорелов А.В. Лекции по дифференциальной геометрии. –Харьков : Изд-во ХГУ, 1964.

18 Польский Н.И. О различных геометриях. –К.: Изд-во АН УССР, 1962.

19 Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – М.-Л. : ГИТТЛ, 1970. – 342 с.

20 Розедорн З.Р. Задачи по дифференциальной геометрии. – М. : Наука, 1971.
21 Сборник задач и упражнений по дифферинциальной геометри / под. ред. В.Т. Воднева. – Минск : Выш. школа, 1970. – 376 с.
22 Сборник задач по дифференциальной геометри / под. ред. А.С. Феденко. – М. : Наука, 1979. – 272 с.
23 Франовський А.Ц. Диференціальна геометрія : курс лекцій для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. – Житоми р: Поліграфічний центр ЖДПУ, 2001. – 84 с.
24 Франовський А.Ц. Диференціальна геометрія: практикум з розв’язування задач. – Житомир : Поліграфічний центр ЖДПУ, 2001. – 64 с.

## ДЛЯ НОТАТОК