Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2013, том 10, N 4–5, 486–495

УДК 517.54

С. А. Охрименко, А. Л. Таргонский

(Житомирский государственный университет им. И. Франка, Житомир)

Экстремальные задачи на лучевых системах

targonsk@zu.edu.ua

Светлой памяти Промарза Меликовича Тамразова посвящается

Знайдено максимум функціонала, що складається з добутків внутрішніх радіусів для довільних степенів внутрішніх радіусів областей.

1. Введение. В геометрической теории функций комплексной переменной экстремальные задачи о произведении внутренних радиусов областей представляют известное классическое направление. Возникновение этого направления связывается с известной работой академика М. А. Лаврентьева [1], где была впервые поставлена и решена задача о произведении конформных радиусов двух взаимно непересекающихся односвязных областей. В последующем этот результат обобщался и усиливался в различных направлениях в работах многих авторов (см., например, [2 — 15]).

Пусть $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ — множества натуральных и вещественных чисел, соответственно, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — её одноточечная компактификация и $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

В работе используется понятие квадратичного дифференциала, с которым можно ознакомиться в монографии [7].

Пусть $r(B, a)$ обозначает внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$ [8 – 10], $g_D(w, a)$ — обобщенная функция Грина.

Рассмотрим систему точек $A_n := \{a_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k = \overline{1, n}$, такую, что

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < \arg a_{n+1} := 2\pi. \qquad (1)$$

При $k = \overline{1,n}$ обозначим $P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$ и $\sigma_k = \frac{1}{\pi}(\arg a_{k+1} - \arg a_k)$. Ясно, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k = 2$.

Пусть D, $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, — произвольное открытое множество и $w = a \in D$. Тогда $D(a)$ обозначает связную компоненту D, содержащую a. Для произвольной системы точек $A_n = \{a_k\}$, удовлетворяющей (1), и открытого множества D, $A_n \subset D$, обозначим через $D_k(a_p)$ связную компоненту множества $D(a_p) \bigcap \overline{P_k\left(A_n\right)}$, содержащую точку a_p, $p = k, k+1$, $k = \overline{1,n}$, $a_{n+1} := a_1$.

Будем говорить, что открытое множество D, $\{0\} \cup A_n \subset D$, удовлетворяет условию неналегания относительно системы точек A_n если выполняется условие

$$[D_k(a_k) \cap D_k(a_{k+1})] \cup [D_k(0) \cap D_k(a_k)] \cup [D_k(0) \cap D_k(a_{k+1})] = \varnothing, \quad (2)$$

для всех углов $\overline{P_k}$, $k = \overline{1,n}$.

Более подробно с введенными выше понятиями можно ознакомиться в работе [5].

На системе точек A_n определим функционал

$$\eta^{(\gamma)}\left(A_n\right) = \prod_{k=1}^{n} \left[\left(\chi \left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{\frac{1}{2\sigma_k}} \right) \right)^{1-\frac{1}{2}\gamma\sigma_k^2} |a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\sigma_k+\sigma_{k-1})} \right],$$

где $\chi\left(t\right) = \frac{1}{2}\left(t + t^{-1}\right)$, $\gamma \geq 0$.

В работе для произвольной системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $n \geq 2$, удовлетворяющей (1), любого открытого множества D, $0, a_k \in D$, $k = \overline{1,n}$, удовлетворяющего условию неналегания (2), рассматривается задача о нахождениии максимума функционала

$$I_n = r^{\gamma}\left(D, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r(D, a_k),$$

где $\gamma \geq 0$. Отметим, что в работе [12] задача об оценке функционала I_n в случае попарно непересекающихся областей сформулирована как открытая проблема. Решение этой задачи в частном случае описано в работе [5].

Теорема. *Для произвольных $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $\beta \geq 1$ и $\mu \geq \mu_0$ существует $n_0(\gamma, \beta, \mu) \in \mathbb{N}$ такое, что при каждом $n \geqslant n_0(\gamma, \beta, \mu)$ выполняется неравенство*

$$r^{\gamma}\left(D,0\right)\prod_{k=1}^{n}r(D,a_k)\leq r^{\gamma}\left(B_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^{n}r\left(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\right), \qquad (3)$$

где $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$ *— любая система различных точек, удовлетворяющая* (1) *и такая, что* $\eta^{(\gamma)}\left(A_n\right)=1, \quad \eta^{(0)}\left(A_n\right)\leq\beta$; D *— произвольное открытое множество такое, что* $0, a_k\in D$ *при* $k=\overline{1,n}$, $r\left(D,0\right)\leq\mu$, *и удовлетворяющее условию неналегания* (2); $a_k^{(0)}$ *и* $B_k^{(0)}$ *при* $k=\overline{0,n}$ *— соответственно полюсы и круговые области квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2=-\frac{\left(n^2-\gamma\right)w^n+\gamma}{w^2\left(w^n-1\right)^2}\,dw^2 \qquad (4)$$

и $\mu_0:=r(B_0^{(0)},0)$.

Следствие. *Для произвольных* $\gamma\in\mathbb{R}^+$ *и* $\mu\geq\mu_0$ *существует* $n_0(\gamma,\mu)\in\mathbb{N}$ *такое, что при каждом* $n\geqslant n_0(\gamma,\mu)$ *выполняется неравенство* (3), *где* $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$ *— любая система различных точек, удовлетворяющая* (1) *и* $|a_k|=1$ *при* $k=\overline{1,n}$, D *— произвольное открытое множество такое, что* $0, a_k\in D$ *при* $k=\overline{1,n}$, $r\left(D,0\right)\leq\mu$, *и удовлетворяющее условию неналегания* (2); $a_k^{(0)}$ *и* $B_k^{(0)}$ *при* $k=\overline{0,n}$ *— соответственно полюсы и круговые области квадратичного дифференциала* (4) *и* $\mu_0:=r(B_0^{(0)},0)$.

Доказательство теоремы. Обозначим $\sigma_0=\max\limits_k\sigma_k$

Рассмотрим сначала случай $\sigma_0<1/\sqrt{\gamma}$. Так как, множество D удовлетворяет условию неналегания, то в соответствии с работами [5, 6, 9 — 12], открытое множество D обладает обобщенной функцией Грина $g_D(z,a)$ при всех $a\in D$.

Далее будем использовать результаты работ [5, 6, 9 — 12]. Для достаточно малых $t\in\mathbb{R}^+$ образуем множества $E_0=\overline{\mathbb{C}}\backslash D$, $\overline{U}_t=\{w\in\mathbb{C}:\,|w|\leqslant t\}$, $E_k(t)=\{w\in\mathbb{C}:\,|w-a_k|\leqslant t\}$, $k=\overline{1,n}$.

Рассмотрим конденсатор $C(t,D,A_n)=\left\{E_0,\,\overline{U}_t,\,E_1(t),\ldots,E_n(t)\right\}$ с предписанными значениями $0,\sqrt{\gamma},\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n\text{ раз}}$. Емкостью конденсатора $C(t,D,A_n)$ называется величина (см. [8, 10])

$$\operatorname{cap}C(t,D,A_n)=\inf\int\int\left[(G'_x)^2+(G'_y)^2\right]\,dxdy,$$

где нижняя грань берется по множеству всех вещественных, непрерывных и липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G = G(z)$ таких, что $G = 0$ в окрестности множества E_0, $G\Big|_{\overline{U}_t} = \sqrt{\gamma}$, $G\Big|_{E_k(t)} = 1$, $k = \overline{1,n}$. Модуль конденсатора $|C(t,D,A_n)|$ определяется выражением

$$|C(t,D,A_n)| = [\operatorname{cap} C(t,D,A_n)]^{-1}.$$

Учитывая теорему 1 [11], находим асимптотику модуля конденсатора $C(t,D,A_n)$:

$$|C(t,D,A_n)| = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{n+\gamma}\,\log\frac{1}{t} + M(D,A_n) + o(1), \qquad t \to 0, \tag{5}$$

где

$$M(D,A_n) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{(n+\gamma)^2}\left[\gamma\log r(D,0) + \sum_{k=1}^{n}\log r(D,a_k) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k\neq p} g_D(a_p,a_k) + \sum_{k=1}^{n} 2\sqrt{\gamma}\, g_D(0,a_k)\right]. \tag{6}$$

Рассмотрим разделяющее преобразование конденсатора $C(t,D,A_n)$ относительно семейства углов $\{P_k(A_n)\}_{k=1}^{n}$ и семейства функций $\{z_k(w)\}_{k=1}^{n}$, где $z_k(w) = (-1)^k\, i\left(e^{-i\arg a_k}w\right)^{\frac{1}{\sigma_k}}$, $k = \overline{1,n}$.

При достаточно малых $t \in \mathbb{R}^+$ рассмотрим конденсаторы $C_k(t,D,A_n) = \left(E_0^{(k)}, \overline{U}_t^{(k)}, E_1^{(k)}, E_2^{(k)}\right)$, где $E_0^{(k)} = z_k\left(E_0 \cap \overline{P}_k\right) \cup \cup \left\{z_k\left(E_0 \cap \overline{P}_k\right)\right\}^*$, $U_t^{(k)} = z_k\left(\overline{U}_t \cap \overline{P}_k\right) \cup \left\{z_k\left(\overline{U}_t \cap \overline{P}_k\right)\right\}^*$, $E_1^{(k)} = = z_k\left(E_k(t) \cap \overline{P}_k\right) \cup \left\{z_k\left(E_k(t) \cap \overline{P}_k\right)\right\}^*$, $E_2^{(k)} = z_k\left(E_{k+1}(t) \cap \overline{P}_k\right) \cup \cup \left\{z_k\left(E_{k+1}(t) \cap \overline{P}_k\right)\right\}^*$, $k = \overline{1,n}$, $E_{n+1}(t) = E_1(t)$, $\{A\}^* = \{w \in \overline{\mathbb{C}} : -\overline{w} \in A\}$.

Каждому конденсатору $C_k(t,D,A_n)$ сопоставим класс V_k всех вещественных, непрерывных и липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G = G(z)$ таких, что $G = 0$ в окрестности множества $E_0^{(k)}$, $G\Big|_{\overline{U}_t^{(k)}} = \sqrt{\gamma}$, $G\Big|_{E_p^{(k)}} = 1$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1,2$. При разделяющем преобразовании конденсатору $C(t,D,A_n)$ соответствует набор конденсаторов $\{C_k(t,D,A_n)\}_{k=1}^{n}$, причем в силу результатов работ [6, 9 — 12] справедливо неравенство

$$\operatorname{cap} C(t,D,A_n) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cap} C_k(t,D,A_n),$$

откуда непосредственно получаем соотношение

$$|C(t,D,A_n)| \leqslant 2\left(\sum_{l=1}^{n}|C_k(t,D,A_n)|^{-1}\right)^{-1}. \tag{7}$$

Из определения функций $z_k(w)$ следует

$$\begin{gathered}|z_k\,(w)-z_k\,(a_m)| \sim \frac{1}{\sigma_k}\,|a_m|^{\frac{1}{\sigma_k}-1}\,|w-a_m|\,, \quad w\to a_m,\\ k=1,2,\ldots,n, \quad m=k,k+1; \\ |z_k\,(w)|=|w|^{\frac{1}{\sigma_k}}\,, \qquad w\to 0,\ w\to\infty.\end{gathered} \tag{8}$$

Используя соотношения (8), по аналогии с (5) и (6) убеждаемся в справедливости асимптотических равенств (см. [11])

$$|C_k(t,D,A_n)| = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{2+\gamma\sigma_k}\,\log\frac{1}{t}+M_k(D,A_n)+o(1), \qquad t\to 0, \tag{9}$$

где

$$\begin{gathered}M_k(D,A_n)=\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{(2+\gamma\sigma_k)^2}\times\\ \times\left[\sigma_k^2\gamma\log r\left(D_0^{(k)},0\right)+\log\frac{r\left(D_k^{(1)},a_k^{(1)}\right)\cdot r\left(D_k^{(2)},a_k^{(2)}\right)}{\frac{1}{\sigma_k}|a_k|^{\frac{1}{\sigma_k}-1}\cdot\frac{1}{\sigma_k}|a_{k+1}|^{\frac{1}{\sigma_k}-1}}\right], \\ z_k(a_k)=:a_k^{(1)},\ z_k(a_{k+1})=:a_k^{(2)},\ a_{n+1}=a_1,\ k=\overline{1,n},\end{gathered} \tag{10}$$

$D_0^{(k)}$ и $D_k^{(s)}$ — объединение связных компоненты множеств $z_k\left(D\bigcap\overline{P}_k\right)$, содержащих соответственно точки 0 и $a_k^{(s)}$, с их симметричным отражением относительно мнимой оси, $k=\overline{1,n}$, $s=1,2$.

Вычислим асимптотику правой части неравенства (7). Для этого согласно (9) запишем (при $t\to 0$)

$$\begin{gathered}|C_k(t,D,A_n)|^{-1}=\\ =2\pi\,(2+\gamma\sigma_k)\,\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\,\left(1+\frac{2\pi\,(2+\gamma\sigma_k)}{\log\frac{1}{t}}M_k(D,A_n)+o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\right)^{-1}=\\ =\frac{2\pi\,(2+\gamma\sigma_k)}{\log\frac{1}{t}}-\left(\frac{2\pi\,(2+\gamma\sigma_k)}{\log\frac{1}{t}}\right)^2 M_k(D,A_n)+o\left(\frac{1}{\log^2\frac{1}{t}}\right).\end{gathered}$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{n}|C_k(t,D,A_n)|^{-1}=$$

$$=\frac{2\pi\left(2n+\gamma\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k\right)}{\log\frac{1}{t}}-\left(\frac{2\pi}{\log\frac{1}{t}}\right)^2\sum_{k=1}^{n}\left(2+\gamma\sigma_k\right)^2M_k(D,A_n)+o\left(\frac{1}{\log^2\frac{1}{t}}\right).$$

Тогда

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|C_k(t,D,A_n)|^{-1}\right)^{-1}=\frac{\log\frac{1}{t}}{4\pi\left(n+\gamma\right)}\times$$

$$\times\left(1-\frac{\pi}{(n+\gamma)\log\frac{1}{t}}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\gamma\sigma_k\right)^2M_k(D,A_n)+o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\right)^{-1}=$$

$$=\frac{1}{4\pi\left(n+\gamma\right)}\log\frac{1}{t}+\frac{1}{4\left(n+\gamma\right)^2}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\gamma\sigma_k\right)^2M_k(D,A_n)+o(1). \quad (11)$$

Из соотношений (5), (7), (11) вытекает, что

$$\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{n+\gamma}\,\log\frac{1}{t}+M(D,A_n)+o(1)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi\left(n+\gamma\right)}\log\frac{1}{t}+\frac{1}{2\left(n+\gamma\right)^2}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\gamma\sigma_k\right)^2M_k(D,A_n)+o(1).$$

Это означает, что

$$M(D,A_n)\leqslant\frac{1}{2\left(n+\gamma\right)^2}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\gamma\sigma_k\right)^2M_k(D,A_n). \quad (12)$$

С учетом (6), (10) из (12) получаем

$$\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{(n+\gamma)^2}\,\log\left[r^{\gamma}(D,0)\prod_{k=1}^{n}r(D,a_k)\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{(n+\gamma)^2}\log\left[\prod_{k=1}^{n}r^{\gamma\sigma_k^2}\left(D_0^{(k)},0\right)\frac{r\left(D_k^{(1)},a_k^{(1)}\right)\,r\left(D_k^{(2)},a_k^{(2)}\right)}{\frac{1}{\sigma_k}|a_k|^{\frac{1}{\sigma_k}-1}\,\frac{1}{\sigma_k}|a_{k+1}|^{\frac{1}{\sigma_k}-1}}\right].$$

Отсюда следует

$$r^{\gamma}(D,0)\prod_{k=1}^{n}r(D,a_k)\leqslant\prod_{k=1}^{n}\frac{\sigma_k}{|a_k|^{\frac{1}{\sigma_k}-1}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left\{r\left(D_k^{(1)},a_k^{(1)}\right)\,r\left(D_k^{(2)},a_k^{(2)}\right)\,r^{\gamma\sigma_k^2}\left(D_0^{(k)},0\right)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, как и при доказательстве теоремы 5.2.1 работы [5], получаем

$$r^{\gamma}(D,0)\prod_{k=1}^{n}r(D,a_k)\leqslant$$

$$\leqslant\eta^{(\gamma)}\left(A_n\right)\prod_{k=1}^{n}\left\{\sigma_k^2\,r^{\gamma\sigma_k^2}\left(B_0,0\right)\,r\left(B_1,-i\right)\,r\left(B_2,i\right)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где B_k при $k=0,1,2$ — круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2=\frac{(n^2-\gamma)w^2-\gamma}{w^2(w^2+1)^2}dw^2.$$

С учетом результатов работы [9] последнее неравенство перепишем в виде

$$r^{\gamma}(D,0)\prod_{k=1}^{n}r(D,a_k)\leq\frac{\eta^{(\gamma)}\left(A_n\right)}{\sqrt{\gamma^n}}\prod_{k=1}^{n}\left(\psi\left(\sigma_k\sqrt{\gamma}\right)\right)^{\frac{1}{2}},\tag{13}$$

причем знак равенства достигается на круговых областях квадратичного дифференциала (4), где

$$\psi\left(\sigma_k\sqrt{\gamma}\right)=\frac{2^{\gamma\sigma_k^2+6}\left(\sigma_k\sqrt{\gamma}\right)^{\gamma\sigma_k^2+2}}{\left|\sigma_k\sqrt{\gamma}-2\right|^{\frac{1}{2}\left(\sigma_k\sqrt{\gamma}-2\right)^2}\left(\sigma_k\sqrt{\gamma}+2\right)^{\frac{1}{2}\left(\sigma_k\sqrt{\gamma}+2\right)^2}}.$$

Далее, как и при доказательстве теоремы 5.2.3 [5], используя выпуклость функции $\log\psi\left(\sigma_k\sqrt{\gamma}\right)$ на промежутке $(0;1)$, из (13) получаем неравенство

$$r^{\gamma}(D,0)\prod_{k=1}^{n}r(D,a_k)\leq\frac{\eta^{(\gamma)}\left(A_n\right)}{\sqrt{\gamma^n}}\left(\psi\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)\right)^{\frac{n}{2}}\tag{14}$$

для $\sigma_k < \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ при $k = 1, 2, \ldots, n$. Из (14) следует справедливость теоремы в случае $\sigma_0 < 1/\sqrt{\gamma}$.

Рассмотрим теперь случай $\sigma_0 \geq 1/\sqrt{\gamma}$. В силу теоремы 5.1.2 [5], а также условий теоремы, справедлива следующая цепочка неравенств

$$r^{\gamma}(D,0)\prod_{k=1}^{n} r(D,a_k) \leqslant 2^n \mu^{\gamma} \beta \prod_{k=1}^{n}\sigma_k \leqslant 2^n \mu^{\gamma} \beta \sigma_0 \left(\frac{2-\sigma_0}{n-1}\right)^{n-1},$$

причем $2-\sigma_0 \leqslant 2-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, $\sigma_0 \geqslant \frac{2}{n}$. Сравним эту величину с величиной

$$J_n^0 = r^{\gamma}\left(B_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\right) = \frac{4^{n+\frac{\gamma}{n}}\gamma^{\frac{\gamma}{n}} n^n}{|n^2-\gamma|^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left|\frac{n-\sqrt{\gamma}}{n+\sqrt{\gamma}}\right|^{2\sqrt{\gamma}},$$

экстремальной в случае $\sigma_0 < 1.\sqrt{\gamma}$. Для этого рассмотрим оценку

$$\frac{r^{\gamma}(D,0)\prod\limits_{k=1}^{n} r(D,a_k)}{r^{\gamma}\left(B_0^{(0)},0\right)\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\right)} \leqslant \frac{2^n\mu^{\gamma}\beta\sigma_0(2-\sigma_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}}{\frac{4^{n+\frac{\gamma}{n}}\gamma^{\frac{\gamma}{n}}n^n}{|n^2-\gamma|^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left|\frac{n-\sqrt{\gamma}}{n+\sqrt{\gamma}}\right|^{2\sqrt{\gamma}}} \leqslant$$

$$\leqslant \mu^{\gamma}\beta\,\frac{2^n(2-\frac{1}{\sqrt{\gamma}})^{n-2}|n^2-\gamma|^{n+\frac{\gamma}{n}}}{4^{n+\frac{\gamma}{n}}\gamma^{\frac{\gamma}{n}}(n-1)^{(n-1)}n^n\left|\frac{n-\sqrt{\gamma}}{n+\sqrt{\gamma}}\right|^{2\sqrt{\gamma}}}.$$

Рассмотрим следующий предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(2-\frac{1}{\sqrt{\gamma}})^{n-2}|n^2-\gamma|^{n+\frac{\gamma}{n}}}{4^{n+\frac{\gamma}{n}}\gamma^{\frac{\gamma}{n}}(n-1)^{(n-1)}n^n\left|\frac{n-\sqrt{\gamma}}{n+\sqrt{\gamma}}\right|^{2\sqrt{\gamma}}} =$$

$$= \frac{1}{(2-\frac{1}{\sqrt{\gamma}})^2}\lim_{n\to\infty}\frac{|n^2-\gamma|^{\frac{\gamma}{n}}}{4^{\frac{\gamma}{n}}\gamma^{\frac{\gamma}{n}}\left|\frac{n-\sqrt{\gamma}}{n+\sqrt{\gamma}}\right|^{2\sqrt{\gamma}}}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2-\frac{1}{\sqrt{\gamma}})^n}{2^n}\frac{|n^2-\gamma|^n}{(n-1)^{n-1}n^n}\right]=$$

$$= \frac{\gamma}{(2\sqrt{\gamma}-1)^2}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\right)^n\frac{|n^2-\gamma|^n(n-1)}{(n^2-n)^n}\right] =$$

$$= \frac{\gamma}{(2\sqrt{\gamma}-1)^2}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\right)^n(n-1)\right]\lim_{n\to\infty}\left[\frac{|n^2-\gamma|}{n^2-n}\right]^n = 0\,.$$

Обозначим

$$J_n(\gamma) = \frac{r^{\gamma}\left(D,0\right) \prod\limits_{k=1}^{n} r(D,a_k)}{r^{\gamma}\left(B_0^{(0)},0\right) \prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\right)}.$$

Легко видеть, что если $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $n \to \infty$, то $J_n(\gamma) \to 0$. Таким образом, существует такое $n_0(\gamma,\beta,\mu)$, что $J_\gamma(n) < 1$ при всех $n \geqslant n_0(\gamma,\beta,\mu)$ и при всех σ_0 таких, что $2-\sigma_0 \leqslant 2-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$. Это означает, что при $n \geqslant n_0(\gamma,\beta,\mu)$ и $2>\sigma_0 \geqslant 1/\sqrt{\gamma}$ для любой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, удовлетворяющей (1), произвольного открытого множества D, удовлетворяющего условию неналегания (2) относительно системы точек A_n, $0, a_k \in D$, выполняется строгое неравенство

$$r^{\gamma}\left(D,0\right) \prod_{k=1}^{n} r(D,a_k) < r^{\gamma}\left(B_0^{(0)},0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\right).$$

Вопрос достижимости знака равенства рассматривается стандартным путем. Теорема доказана.

Авторы признательны профессору А. К. Бахтину за постановку задачи и ряд ценных указаний.

Список литературы

[1] Лаврентьев М. А. *К теории конформных отображений*// Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. — 1934. — **5**. — С. 159—245.

[2] Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* — Москва: Наука, 1966. — 628 с.

[3] Бахтина Г. П. *Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях*: Автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1975. — 11 с.

[4] Кузьмина Г. В. *Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы* // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2001. — **276**. — С. 253—275.

[5] Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б. *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе* // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2008. — 308 с.

[6] Дубинин В. Н. *Метод симметризации в геометрической теории функций*: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Владивосток, 1988. — 193 с.

[7] Дженкинс Дж. А. *Однолистные функции и конформные отображения.* — Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. — 256 с.

[8] Хейман В. К. *Многолистные функции.* — Москва: Изд-во иностр. лит., 1960. — 180 с.

[9] Дубинин В. Н. *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении* // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1988. — **168**. — С. 48—66.

[10] Дубинин В. Н. *Емкости конденсаторов в геометрической теории функций: Учебн. пособие.* — Владивосток: Изд. Дальневосточ. ун-та, 2003. — 116 с.

[11] Дубинин В. Н. *Асимптотика модуля выраждающегося конденсатора и некоторые ее применения* // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 1997. — **237**. — С. 56—73.

[12] Дубинин В. Н. *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного* // Успехи мат. наук. — 1994. — **49**, № 1. — С. 3—76.

[13] Бахтін О. К. *Нерівності для внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин* // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 5. — С. 596—610.

[14] Емельянов Е. Г. *К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей* // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2002. — **286**. — С. 103—114.

[15] Бахтин А. К., Таргонский А. Л. *Обобщенные* (n, d)*-лучевые системы точек и неравенства для неналегающих областей и открытых множеств* // Укр. мат. журн. — 2011. — **63**, № 7. — С. 867—879.