Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2012, том 9, N 2, 270–284

УДК 517.54

С. А. Охрименко, А. Л. Таргонский

(Житомирский Государственный университет им. И. Франка, Житомир)

Экстремальные задачи для обобщенных лучевых систем точек

targonsk@zu.edu.ua

Знайдено максимум функціонала, що складається із добутків внутрішніх радіусів, у випадках: області попарно не перетинаються, області частково не перетинаються, множина складається із об'єднання областей.

We found the maximum of a functional, which is the product of inner radius in the cases: non-overlapping domains, partially non-overlapping domains, the union of domains.

1. Введение. Результаты данной работы получены в классическом направлении геометрической теории функций комплексной переменной — теории экстремальных задач на классах попарно-непересекающихся областей. Начало этого направления положено классической работой М. А. Лаврентьева [1], в которой, в частности, была впервые поставлена и решена задача о произведении конформных радиусов двух взаимно-непересекающихся односвязных областей. Впоследствии подобная задача была решена Г. М. Голузиным для трех областей [2]. При этом следует отметить метод кусочно-разделяющего преобразования, разработанный В. Н. Дубининым и приведший к решению ряда нерешенных к тому времени проблем. Отметим, что с основными классическими результатами, а также методами их получения можно ознакомиться в работах [2 — 13].

Пусть $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ — соответственно множества натуральных и вещественных чисел, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — её одноточечная компактификация и $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Пусть $n, m, d \in \mathbb{N}$, причем $m = nd$. Рассмотрим набор натуральных чисел $\{m_k\}_{k=1}^{n}$ таких, что

$$\sum_{k=1}^{n} m_k = m. \tag{1}$$

Систему точек

$$A_{n,d} := \left\{a_{k,p} \in \mathbb{C} : \ k = \overline{1, n}, \ p = \overline{1, m_k}\right\},$$

удовлетворяющую условию (1), назовем обобщенной (n, d)-равноугольной с переменным количеством точек на лучах, если при всех $k = \overline{1, n}$ и $p = \overline{1, m_k}$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} &0 < |a_{k,1}| < |a_{k,2}| < \ldots < |a_{k,m_k}| < \infty; \\ &\arg a_{k,1} = \arg a_{k,2} = \ldots = \arg a_{k,m_k} = \tfrac{2\pi}{n}(k-1). \end{aligned} \tag{2}$$

Системе $A_{n,d}$ сопоставим набор областей $\{P_k\}_{k=1}^{n}$, где

$$P_k := \left\{ w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \ \frac{2\pi}{n}(k-1) < \arg w < \frac{2\pi}{n}k \right\}, \ k = \overline{1, n},$$

и рассмотрим следующий "управляющий" функционал

$$\mu\left(A_{n,d}\right) := \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m_k} \left[\chi\left(|a_{k,p}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,p}|\right],$$

где $\chi(t) = (t + t^{-1})/2$.

Пусть $\{B_0, B_{k,p}, B_\infty\}$ — любой набор попарно непересекающихся областей таких, что

$$0 \in B_0, \ a_{k,p} \in B_{k,p}, \ \infty \in B_\infty, \ B_0, B_{k,p}, B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}, \quad k = \overline{1, n}, \ p = \overline{1, m_k}.$$

Пусть $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ — произвольное открытое множество и $a \in D$; тогда $D(a)$ обозначает связную компоненту D, содержащую a. При $A_{n,d} \subset D$ через $D_k(a_{l,p})$ обозначим связную компоненту множества $D(a_{l,p})\bigcap\overline{P_k}$, содержащую точку $a_{l,p}$, где $k = \overline{1, n}$, $l = k, k+1$,

$p = \overline{1, m_l}$, $m_{n+1} := m_1$, $a_{n+1,p} := a_{1,p}$. $D_k(0)$ (соответственно, $D_k(\infty)$) обозначает связную компоненту множества $D(0) \bigcap \overline{P_k}$ (соответственно, $D(\infty) \bigcap \overline{P_k}$), содержащую точку $w = 0$ (соответственно, $w = \infty$).

Будем говорить, что открытое множество D, $\{0, \infty\} \cup A_{n,d} \subset D$, удовлетворяет условию неналегания относительно системы точек $A_{n,d}$, если выполняется условие

$$\Big[D_k(a_{s,p}) \bigcap D_k(a_{l,q})\Big] \bigcup \Big[D_k(0) \bigcap D_k(a_{l,q})\Big] \bigcup \Big[D_k(0) \bigcap D_k(\infty)\Big] \bigcup$$

$$\bigcup \Big[D_k(\infty) \bigcap D_k(a_{l,q})\Big] = \varnothing, \tag{3}$$

$$k = \overline{1, n}, \quad l, s = k, k+1, \quad p = \overline{1, m_s}, \quad q = \overline{1, m_l},$$

по всем углам $\overline{P_k}$.

Систему областей $B_0 \cup B_\infty \cup \{B_{k,p}\}_{k=\overline{1,n}, p=\overline{1,m_k}}$ назовем системой частично неналегающих областей, если множество $D := \bigcup\limits_{k=1}^{n} \bigcup\limits_{p=1}^{m_k} B_{k,p} \cup$ $\cup B_0 \cup B_\infty$ удовлетворяет условию (3).

Обозначим через $r(B; a)$ внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$ (см. [4 — 6]).

При $n, d \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, через $A_{n,d}^{(1)}$ обозначим обобщенную (n, d)-равноугольную систему точек, образованную полюсами квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -w^{n-2} \frac{(1 + w^n)^{2d}}{\left[\left(1 - iw^{\frac{n}{2}}\right)^{2d+2} - \left(1 + iw^{\frac{n}{2}}\right)^{2d+2}\right]^2} \, dw^2. \tag{4}$$

Для системы $A_{n,d}^{(1)}$ в соотношениях (2) $m_k = d$. Более того, система точек $A_{n,d}^{(1)}$ обладает симметрией относительно окружности $|w| = 1$. Эти свойства вытекают из общей теории квадратичных дифференциалов [7].

Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. Пусть $n, m, d \in \mathbb{N}$, $m = nd$, $n \geq 2$. Определить максимум величины

$$\big(r\,(B_0, 0)\; r\,(B_\infty, \infty)\big)^{n^2/4} \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m_k} r(B_{k,p}, a_{k,p}),$$

где $A_{n,d} = \{a_{k,p}\}$ — любая обобщенная (n,d)-равноугольная система точек вида (2), а $\{B_{k,p}\}$ — произвольный набор попарно непересекающихся либо частично неналегающих областей, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, и описать все экстремали ($k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m_k}$).

Задача 2. Пусть $n, m, d \in \mathbb{N}$, $m = nd$, $n \geq 2$. Определить максимум величины

$$\big(r\,(D,0)\; r\,(D,\infty)\big)^{n^2/4} \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m_k} r(D, a_{k,p}),$$

где $A_{n,d} = \{a_{k,p}\}$ — любая обобщенная (n,d)-равноугольная система точек вида (2), а D — произвольное открытое множество, удовлетворяющее условию неналегания (3) относительно заданной системы $A_{n,d}$, $a_{k,p} \in D \subset \overline{\mathbb{C}}$, и описать все экстремали ($k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m_k}$).

Сформулированные задачи обобщают постановки соответствующих задач, рассмотренных в [8 — 13].

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $n, m, d \in \mathbb{N}$, $m = nd$, $n \geq 2$. Тогда для произвольной обобщенной (n,d)-равноугольной системы точек $A_{n,d} = \{a_{k,p}\}$, для которой $\mu(A_{n,d}) = \mu(A^{(1)}_{n,d}) =: \mu$, и произвольного набора попарно непересекающихся областей $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство*

$$(r\,(B_0,0)\; r\,(B_\infty,\infty))^{n^2/4} \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m_k} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leq \left(\frac{4}{n+m}\right)^{m} \left(\frac{n}{n+m}\right)^{n} \mu.$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда точки $a_{k,p}$ и области $B_{k,p}$ являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала (4).

Теорема 2. *Пусть $n, m, d \in \mathbb{N}$, $m = nd$, $n \geq 2$. Тогда для произвольной обобщенной (n,d)-равноугольной системы точек $A_{n,d} = \{a_{k,p}\}$, для которой $\mu(A_{n,d}) = \mu(A^{(1)}_{n,d}) =: \mu$, и любого открытого множества D, $A_{n,d} \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющего условию неналегания относительно системы $A_{n,d}$, справедливо неравенство*

$$(r\,(D,0)\; r\,(D,\infty))^{n^2/4} \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m_k} r(D, a_{k,p}) \leq \left(\frac{4}{n+m}\right)^{m} \left(\frac{n}{n+m}\right)^{n} \mu.$$

Знак равенства здесь достигается, когда $D = \bigcup\limits_{k=1}^{n}\bigcup\limits_{s=1}^{m_k} B_{k,s}$, *где* $B_{k,s}$ — *система круговых областей квадратичного дифференциала* (4).

Теорема 3. *Пусть* $n, m, d \in \mathbb{N}$, $m = nd$, $n \geq 2$. *Тогда для произвольной обобщенной* (n,d)*-равноугольной системы точек* $A_{n,d} = \{a_{k,p}\}$, *для которой* $\mu(A_{n,d}) = \mu(A^{(1)}_{n,d}) =: \mu$, *и произвольного набора частично неналегающих областей* $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, *справедливо утверждение теоремы* 1.

3. Доказательства. ***Доказательство теоремы* 1.** Для доказательства используем метод кусочно-разделяющего преобразования, разработанный В. Н. Дубининым [6, 8, 9].

Функция
$$z_k(w) = (-1)^k\, i\, w^{\frac{n}{2}}$$
при каждом $k = \overline{1,n}$ реализует однолистное и конформное отображение области P_k на правую полуплоскость $\mathrm{Re}z > 0$.

Тогда функция
$$\zeta_k(w) := \frac{1 - z_k(w)}{1 + z_k(w)} \tag{5}$$
однолистно и конформно отображает область P_k на единичный круг $U = \{z : |z| \leq 1\}$, $k = \overline{1,n}$. Очевидно, что $\zeta_k\,(0) = 1$, $\zeta_k\,(\infty) = -1$, $k = \overline{1,n}$.

Обозначим $\omega^{(1)}_{k,p} := \zeta_k\,(a_{k,p})$, $\omega^{(2)}_{k-1,p} := \zeta_{k-1}\,(a_{k,p})$, $a_{n+1,p} := a_{1,p}$, $\omega^{(2)}_{0,p} := \omega^{(2)}_{n,p}$, $\zeta_0 := \zeta_n$ $(k = \overline{1,n},\ p = \overline{1,m_k})$.

Семейство функций $\{\zeta_k(w)\}_{k=1}^{n}$, заданных равенством (5), является допустимым для кусочно-разделяющего преобразования (см., например, [6, 8, 9]) областей $\left\{B_{k,p} : k = \overline{1,n},\ p = \overline{1,m_k}\right\}$ относительно системы углов $\{P_k\}_{k=1}^{n}$. Для любого множества $\Delta \in \mathbb{C}$ обозначим $(\Delta)^* := \left\{w \in \overline{\mathbb{C}} : 1/\overline{w} \in \Delta\right\}$. Пусть $\Omega^{(1)}_{k,p}$ обозначает связную компоненту множества $\zeta_k\left(B_{k,p} \bigcap \overline{P}_k\right) \bigcup \bigcup \left(\zeta_k\left(B_{k,p} \bigcap \overline{P}_k\right)\right)^*$, содержащую точку $\omega^{(1)}_{k,p}$, а $\Omega^{(2)}_{k-1,p}$ — связную компоненту множества $\zeta_{k-1}\left(B_{k,p} \bigcap \overline{P}_{k-1}\right) \bigcup \left(\zeta_{k-1}\left(B_{k,p} \bigcap \overline{P}_{k-1}\right)\right)^*$, содержащую точку $\omega^{(2)}_{k-1,p}$, $\overline{P}_0 := \overline{P}_n$, $\Omega^{(2)}_{0,p} := \Omega^{(2)}_{n,p}$. Очевидно, что $\Omega^{(s)}_{k,p}$ являются, вообще говоря, многосвязными областями при $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m_k}$, $s = 1, 2$. Пара областей $\Omega^{(2)}_{k-1,p}$ и $\Omega^{(1)}_{k,p}$ является результатом разделяющего преобразования области $B_{k,p}$ относительно семейств $\{P_{k-1}, P_k\}$,

$\{\zeta_{k-1},\zeta_k\}$ в точке $a_{k,p}$. Обозначим также через $\Omega_k^{(0)}$ связную компоненту множества $\zeta_k\left(B_0\bigcap\overline{P}_k\right)\bigcup\left(\zeta_k\left(B_0\bigcap\overline{P}_k\right)\right)^*$, содержащую точку 1, а через $\Omega_k^{(\infty)}$ — связную компоненту множества $\zeta_k\left(B_\infty\bigcap\overline{P}_k\right)\bigcup\left(\zeta_k\left(B_\infty\bigcap\overline{P}_k\right)\right)^*$, содержащую точку -1. Семейство областей $\{\Omega_k^{(0)}\}_{k=1}^n$ является результатом разделяющего преобразования области B_0 относительно семейств углов $\{P_k\}_{k=1}^n$ и функций $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$ в точке $w=0$, а семейство областей $\{\Omega_k^{(\infty)}\}_{k=1}^n$ — результатом разделяющего преобразования области B_∞ относительно семейств углов $\{P_k\}_{k=1}^n$ и функций $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$ в точке $w=\infty$.

Из равенства (5) получаем следующие асимптотические соотношения

$$\begin{gathered}
\Big|\zeta_k(w)-\zeta_k(a_{k,p})\Big|\sim\left[\frac{2}{n}\,\chi\left(|a_{k,p}|^{n/2}\right)|a_{k,p}|\right]^{-1}|w-a_{k,p}|,\\
w\to a_{k,p},\quad w\in\overline{P}\,;\\
\Big|\zeta_{k-1}(w)-\zeta_{k-1}(a_{k,p})\Big|\sim\left[\frac{2}{n}\,\chi\left(|a_{k,p}|^{n/2}\right)|a_{k,p}|\right]^{-1}|w-a_{k,p}|,\\
w\to a_{k,p},\quad w\in\overline{P}_{k-1},\quad k=\overline{1,n},p=\overline{1,m_k}.
\end{gathered}\tag{6}$$

Коэффициенты разделяющего преобразования в точках $w=0$ и $w=\infty$ будут определяться следующими асимптотическими равенствами

$$\begin{gathered}
\Big|\zeta_k(w)-1\Big|\sim 2|w|^{n/2},\quad w\to 0,\,w\in\overline{P}_k,\\
\Big|\zeta_k(w)+1\Big|\sim 2|w|^{-n/2},\quad w\to\infty,\,w\in\overline{P}_k,\,k=\overline{1,n}\,.
\end{gathered}\tag{7}$$

Используя теорему 1.9 из [9] (см. также [6, 8]) и соотношения (6), получаем неравенства

$$\begin{gathered}
r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\leqslant\frac{2}{n}\,\chi\left(|a_{k,p}|^{n/2}\right)|a_{k,p}|\times\\
\times\left\{r(\Omega_{k,p}^{(1)},\omega_{k,p}^{(1)})\,r(\Omega_{k-1,p}^{(2)},\omega_{k-1,p}^{(2)})\right\}^{1/2},\quad k=\overline{1,n},p=\overline{1,m_k}.
\end{gathered}\tag{8}$$

Используя соотношения (7), получаем следующие неравенства:

$$r\left(B_0;0\right)\leqslant 2^{-2/n}\left[\prod_{k=1}^{n}r(\Omega_k^{(0)},1)\right]^{2/n^2},$$

$$r\left(B_{\infty},\infty\right)\leqslant 2^{-2/n}\left[\prod_{k=1}^{n} r\left(\Omega_k^{(\infty)},-1\right)\right]^{2/n^2}. \tag{9}$$

Тогда из (8) и (9) получаем

$$\left(r\left(B_0,0\right)\,r\left(B_{\infty},\infty\right)\right)^{n^2/4}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m_k} r(B_{k,p},a_{k,p})\leq$$

$$\leq 2^{-n}\left(\frac{2}{n}\right)^{m}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m_k}\left[\chi\left(|a_{k,p}|^{n/2}\right)|a_{k,p}|\right]\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m_k}\left[r(\Omega_k^{(0)},1)\,r(\Omega_{k,p}^{(1)},\omega_{k,p}^{(1)})\,r(\Omega_k^{(\infty)},-1)\,r(\Omega_{k-1,p}^{(2)},\omega_{k-1,p}^{(2)})\right]^{1/2}. \tag{10}$$

Отметим, что

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m_k}\left[r(\Omega_k^{(0)},1)\,r(\Omega_{k,p}^{(1)},\omega_{k,p}^{(1)})\,r(\Omega_k^{(\infty)},-1)\,r(\Omega_{k-1,p}^{(2)},\omega_{k-1,p}^{(2)})\right]^{1/2}=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left[r(\Omega_k^{(0)},1)\prod_{p=1}^{m_k} r(\Omega_{k,p}^{(1)},\omega_{k,p}^{(1)})\,r(\Omega_k^{(\infty)},-1)\prod_{p=1}^{m_k} r(\Omega_{k-1,p}^{(2)},\omega_{k-1,p}^{(2)})\right]^{1/2}=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left[r(\Omega_k^{(0)},1)\prod_{p=1}^{m_k} r(\Omega_{k,p}^{(1)},\omega_{k,p}^{(1)})\,r(\Omega_k^{(\infty)},-1)\prod_{t=1}^{m_{k+1}} r(\Omega_{k,t}^{(2)},\omega_{k,t}^{(2)})\right]^{1/2}. \tag{11}$$

Из (10), учитывая (11), получаем

$$\left(r\left(B_0,0\right)\,r\left(B_{\infty},\infty\right)\right)^{n^2/4}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m_k} r(B_{k,p},a_{k,p})\leq 2^{-n}\left(\frac{2}{n}\right)^{m}\mu\left(A_{n,d}\right)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left[r(\Omega_k^{(0)},1)\prod_{p=1}^{m_k} r(\Omega_{k,p}^{(1)},\omega_{k,p}^{(1)})r(\Omega_k^{(\infty)},-1)\prod_{t=1}^{m_{k+1}} r(\Omega_{k,t}^{(2)},\omega_{k,t}^{(2)})\right]^{1/2}. \tag{12}$$

Из результатов работ [6, 8, 9] следует неравенство

$$r(\Omega_k^{(0)},1)\prod_{p=1}^{m_k} r(\Omega_{k,p}^{(1)},\omega_{k,p}^{(1)})\,r(\Omega_k^{(\infty)},-1)\prod_{t=1}^{m_{k+1}} r(\Omega_{k,t}^{(2)},\omega_{k,t}^{(2)})\leq$$

$$\leq \prod_{s=1}^{m_k+m_{k+1}+2} r\left(G_s^{(k)}, e^{i\frac{2\pi}{m_k+m_{k+1}+2}(s-1)}\right), \tag{13}$$

где $G_s^{(k)}$ — круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(\zeta_k)\, d\zeta_k^2 = -\frac{\zeta_k^{m_k+m_{k+1}}}{\left(\zeta_k^{m_k+m_{k+1}+2}-1\right)^2}\, d\zeta_k^2.$$

Используя неравенства (13), из (12) получаем

$$\left(r(B_0,0)\, r(B_\infty,\infty)\right)^{n^2/4} \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m_k} r(B_{k,p},a_{k,p}) \leq 2^{-n} \left(\frac{2}{n}\right)^m \mu(A_{n,d}) \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n}\left\{\prod_{s=1}^{m_k+m_{k+1}+2} r\left(G_s^{(k)}, e^{i\frac{2\pi}{m_k+m_{k+1}+2}(s-1)}\right)\right\}^{1/2}. \tag{14}$$

Далее, рассмотрим семейство функций

$$\xi_k = \sqrt[n]{\zeta_k}\, e^{i\frac{2\pi}{n}(k-1)}, \quad k=\overline{1,n},$$

отображающих единичный круг на сектор величиной $\frac{2\pi}{n}$. При этом области $G_s^{(k)}$, $k=\overline{1,n}$, $s=\overline{1,m_k+m_{k+1}+2}$ преобразуются в некоторые области $\Sigma_s^{(k)}$, а точки $e^{i\frac{2\pi}{m_k+m_{k+1}+2}(s-1)}$ переходят в точки $e^{i\frac{2\pi}{n}\left(\frac{s-1}{m_k+m_{k+1}+2}+k-1\right)}$. При склейке секторов получим единичный круг, содержащий $\underline{(2m+2n)}$ попарно непересекающихся областей $\Sigma_s^{(k)}$, $k=\overline{1,n}$, $s=\overline{1,m_k+m_{k+1}+2}$. Тогда,

$$r\left(G_s^{(k)}, e^{i\frac{2\pi}{m_k+m_{k+1}+2}(s-1)}\right) \leq n\, r\left(\Sigma_s^{(k)}, e^{i\frac{2\pi}{n}\left(\frac{s-1}{m_k+m_{k+1}+2}+k-1\right)}\right). \tag{15}$$

Из неравенства (14), принимая во внимания неравенства (15), получаем

$$\left(r(B_0,0)\, r(B_\infty,\infty)\right)^{n^2/4} \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m_k} r(B_{k,p},a_{k,p}) \leq 2^{m} \left(\frac{n}{2}\right)^n \mu(A_{n,d}) \times$$

$$\times \left\{\prod_{k=1}^{n}\prod_{s=1}^{m_k+m_{k+1}+2} r\left(\Sigma_s^{(k)}, e^{i\frac{2\pi}{n}\left(\frac{s-1}{m_k+m_{k+1}+2}+k-1\right)}\right)\right\}^{1/2}. \tag{16}$$

Теперь, используя результаты работ [6, 8, 8, 9], можно сделать вывод о справедливости следующего неравенства:

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{s=1}^{m_k+m_{k+1}+2} r\left(\Sigma_s^{(k)}, e^{i\frac{2\pi}{n}\left(\frac{s-1}{m_k+m_{k+1}+2}+k-1\right)}\right) \leq$$

$$\leq \prod_{t=1}^{2m+2n} r\left(B_t, b_t\right) = \left(\frac{2}{m+n}\right)^{2m+2n}, \qquad (17)$$

причем знак равенства в (17) достигается тогда и только тогда, когда области B_t и точки b_t являются соответственно круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала

$$Q\left(\xi\right)d\xi^2 = -\frac{\xi^{2m+2n-2}}{\left(\xi^{2m+2n}-1\right)^2}\,d\xi^2. \qquad (18)$$

Используя неравенство (17), из (16) окончательно получаем

$$\left(r\left(B_0,0\right)\,r\left(B_\infty,\infty\right)\right)^{n^2/4}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m_k} r(B_{k,p},a_{k,p}) \leq$$

$$\leq \frac{4^m\,n^n}{(n+m)^{n+m}}\,\mu\left(A_{n,d}\right). \qquad (19)$$

Используя неравенство (19) и учитывая при этом условия, при которых в нем достигается знак равенства, а кроме того, производя необходимую замену переменных в квадратичном дифференциале (18), получаем утверждение теоремы 1. Теорема доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** Прежде всего, отметим, что из условия неналегания следует, что cap $\overline{\mathbb{C}}\backslash D > 0$ и множество D обладает обобщенной функцией Грина относительно точки $a \in D$:

$$g_D(z,a) = \begin{cases} g_{D(a)}(z,a),\ z \in D(a), \\ 0,\ z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D(a)}, \\ \lim\limits_{\zeta\to z} g_{D(a)}(\zeta,a),\ \zeta \in D(a), z \in \partial D(a)\,, \end{cases}$$

где $g_{D(a)}(z,a)$ — функция Грина области $D(a)$ относительно точки a.

В дальнейшем будем использовать методы работы [8]. Рассмотрим множества $E_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus D$, $\overline{U}_t = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leqslant t\}$, $\Delta_t = \{w \in \mathbb{C} :$

$|w| \geqslant 1/t\}$, $E(a_{k,p},t) = \{w \in \mathbb{C} : |w - a_{k,p}| \leqslant t\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m_k}$, $n \geqslant 2$, $n, m_k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}^+$. Для достаточно малых $t > 0$ введем в рассмотрение конденсатор

$$C\,(t,\,D,\,A_{n,d}) = \left\{E_0,\,\overline{U}_t,\,\Delta_t,\,E_1\right\},$$

где $E_1 = \bigcup\limits_{k=1}^{n}\bigcup\limits_{p=1}^{m_k} E(a_{k,p},t)$. Емкостью конденсатора $C\,(t,\,D,\,A_{n,d})$ называется величина (см. [5])

$$\operatorname{cap}\,C\,(t,\,D,\,A_{n,d}) = \inf \iint \left[(G'_x)^2 + (G'_y)^2\right]\,dxdy,$$

где нижняя грань берется по всем действительным непрерывным и липшицевым в $\overline{\mathbb{C}}$ функциям $G = G(z)$ таким, что $G\big|_{E_0}= 0$, $G\big|_{E_1}= 1$, $G\big|_{\overline{U}_t}= n/2$, $G\big|_{\Delta_t}= n/2$.

Величина, обратная емкости конденсатора C, называется модулем этого конденсатора: $|C| = [\operatorname{cap}\,C]^{-1}$.

Используя теорему 1 из [8], получаем

$$|C\,(t, D, A_{n,d})\,| = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{\frac{n^2}{2}+m}\,\log\frac{1}{t} + M(D, A_{n,d}) + o(1), \quad t \to 0, \quad (20)$$

где

$$M(D, A_{n,d}) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{\left(\frac{n^2}{2}+m\right)^2}\Big[\frac{n^2}{4}\log r(D,0) + \frac{n^2}{4}\log r(D,\infty)+$$

$$+\frac{n^2}{2}g_D(0,\infty) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m_k}\left(g_D(0,a_{k,p}) + g_D(\infty,a_{k,p})\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m_k}\log r(D,a_{k,p}) + \sum_{(k,p)\neq(q,s)} g_D(a_{k,p},a_{q,s})\Big]. \quad (21)$$

Будем использовать функцию (5) и обозначения $\omega^{(1)}_{k,p}$, $\omega^{(2)}_{k-1,p}$, $a_{n+1,p}$, $\omega^{(2)}_{0,p}$, ζ_0, Δ, $(\Delta)^*$, введенные нами при доказательстве теоремы 1. Через $\mathbf{\Omega}^{(1)}_{k,p}$ обозначим связную компоненту множества $\zeta_k(D\bigcap\overline{P}_k)\bigcup(\zeta_k(D\bigcap\overline{P}_k))^*$, содержащую точку $\omega^{(1)}_{k,p}$, а через $\mathbf{\Omega}^{(2)}_{k-1,p}$ —

связную компоненту множества $\zeta_{k-1}(D\bigcap \overline{P}_{k-1})\bigcup(\zeta_{k-1}(D\bigcap \overline{P}_{k-1})t)^*$, содержащую точку $\omega^{(2)}_{k-1,p}$, $\overline{P}_0 := \overline{P}_n$, $\mathbf{\Omega}^{(2)}_{0,p} := \mathbf{\Omega}^{(2)}_{n,p}$. Очевидно, что $\mathbf{\Omega}^{(s)}_{k,p}$ являются, вообще говоря, многосвязными областями при $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m_k}$, $s = 1,2$. Пара областей $\mathbf{\Omega}^{(2)}_{k-1,p}$ и $\mathbf{\Omega}^{(1)}_{k,p}$ является результатом разделяющего преобразования открытого множества D относительно семейств $\{P_{k-1}, P_k\}$, $\{\zeta_{k-1}, \zeta_k\}$ в точке $a_{k,p}$. Обозначим также через $\mathbf{\Omega}^{(0)}_k$ связную компоненту множества $\zeta_k(D\bigcap \overline{P}_k)\bigcup(\zeta_k(D\bigcap \overline{P}_k))^*$, содержащую точку 1, а через $\mathbf{\Omega}^{(\infty)}_k$ — связную компоненту множества $\zeta_k(D\bigcap \overline{P}_k)\bigcup(\zeta_k(D\bigcap \overline{P}_k))^*$, содержащую точку -1. Семейство областей $\{\mathbf{\Omega}^{(0)}_k\}^n_{k=1}$ является результатом разделяющего преобразования множества D относительно семейств углов $\{P_k\}^n_{k=1}$ и функций $\{\zeta_k\}^n_{k=1}$ в точке $w = 0$, а семейство областей $\{\mathbf{\Omega}^{(\infty)}_k\}^n_{k=1}$ — результатом разделяющего преобразования множества D относительно семейств углов $\{P_k\}^n_{k=1}$ и функций $\{\zeta_k\}^n_{k=1}$ в точке $w = \infty$.

Рассмотрим конденсаторы

$$C_k\left(t,\, D,\, A_{n,d}\right) = \left(E^{(k)}_0,\, \overline{U}^{(k)}_t,\, \Delta^{(k)}_t,\, E^{(k)}_1\right),$$

где

$$E^{(k)}_s = \zeta_k\left(E_s\bigcap \overline{P}_k\right)\bigcup\left[\zeta_k\left(E_s\bigcap \overline{P}_k\right)\right]^*,$$

$$\overline{U}^{(k)}_t = z_k\left(\overline{U}_t\bigcap \overline{P_k}\right)\bigcup\left\{z_k\left(\overline{U}_t\bigcap \overline{P_k}\right)\right\}^*,$$

$$\Delta^{(k)}_t = z_k\left(\Delta_t\bigcap \overline{P_k}\right)\bigcup\left\{z_k\left(\Delta_t\bigcap \overline{P_k}\right)\right\}^*,$$

$k = \overline{1,n}$, $s = 0,1$, $\{P_k\}^n_{k=1}$ — система углов, соответствующая системе точек $A_{n,d}$, операция $[A]^*$ сопоставляет любому множеству $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ множество, симметричное множеству A относительно окружности $|w| = 1$. Отсюда следует, что конденсатору $C\left(t,\, D,\, A_{n,d}\right)$, при разделяющем преобразовании относительно $\{P_k\}^n_{k=1}$ и $\{\zeta_k\}^n_{k=1}$, соответствует набор конденсаторов $\{C_k\left(t,\, D,\, A_{n,d}\right)\}^n_{k=1}$, симметричных относительно $\{z : |z| = 1\}$. В соответствии с результатами работы [8] получаем

$$\operatorname{cap} C\left(t, D, A_{n,d}\right) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cap} C_k\left(t, D, A_{n,d}\right). \tag{22}$$

Отсюда следует

$$|C(t, D, A_{n,d})| \leqslant 2 \left(\sum_{k=1}^{n} |C_k(t, D, A_{n,d})|^{-1} \right)^{-1}. \qquad (23)$$

Асимптотика модуля $C(t,\ D,\ A_{n,d})$ при $t \to 0$ дается соотношением (20), а величина $M(D, A_{n,d})$ есть приведенный модуль множества D относительно $A_{n,d}$. Используя формулы (6), (7) и тот факт, что D удовлетворяет условию неналегания относительно системы $A_{n,d}$, получаем аналогичные асимптотические представления для конденсаторов $C_k(t, D, A_{n,d})$, $k = \overline{1,n}$:

$$|C_k(t, D, A_{n,d})| =$$

$$= \frac{1}{2\pi(n + m_k + m_{k+1})} \log \frac{1}{t} + M_k(D, A_{n,d}) + o(1), \quad t \to 0, \qquad (24)$$

где

$$M_k(D, A_{n,d}) = \frac{1}{2\pi(n + m_k + m_{k+1})^2} \left[\log \frac{r(\mathbf{\Omega}_k^{(0)}, 1)}{2} + \right.$$

$$+ \sum_{p=1}^{m_k} \log \frac{r(\mathbf{\Omega}_{k,p}^{(1)}, \omega_{k,p}^{(1)})}{\left[\frac{2}{n}\, \chi\left(|a_{k,p}|^{n/2}\right) |a_{k,p}|\right]^{-1}} + \log \frac{r(\mathbf{\Omega}_k^{(\infty)}, -1)}{2} +$$

$$\left. + \sum_{t=1}^{m_{k+1}} \log \frac{r(\mathbf{\Omega}_{k,t}^{(2)}, \omega_{k,t}^{(2)})}{\left[\frac{2}{n}\, \chi\left(|a_{k+1,t}|^{n/2}\right) |a_{k+1,t}|\right]^{-1}} \right], \qquad k = \overline{1,n}.$$

С помощью (24) получаем

$$|C_k(t, D, A_{n,d})|^{-1} = \frac{2\pi(n + m_k + m_{k+1})}{\log \frac{1}{t}} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{2\pi(n + m_k + m_{k+1})}{\log \frac{1}{t}} M_k(D, A_{n,d}) + o\left(\frac{1}{\log \frac{1}{t}} \right) \right)^{-1} =$$

$$= \frac{2\pi(n + m_k + m_{k+1})}{\log \frac{1}{t}} - \left(\frac{2\pi(n + m_k + m_{k+1})}{\log \frac{1}{t}} \right)^2 M_k(D, A_{n,d}) +$$

$$+o\left(\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)^2\right), \qquad t\to 0. \tag{25}$$

Далее, используя (1), из (25) при $t\to 0$ получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\left|C_k\left(t,D,A_{n,d}\right)\right|^{-1}=\frac{2\pi\left(n^2+2m\right)}{\log\frac{1}{t}}-$$

$$-\left(\frac{2\pi}{\log\frac{1}{t}}\right)^2\sum_{k=1}^{n}\left(n+m_k+m_{k+1}\right)^2 M_k\left(D,A_{n,d}\right)+o\left(\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)^2\right). \tag{26}$$

В свою очередь, (26) позволяет получить такое асимптотическое соотношение

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left|C_k\left(t,D,A_{n,d}\right)\right|^{-1}\right)^{-1}=\frac{\log\frac{1}{t}}{2\pi\left(n^2+2m\right)}\left(1-\frac{2\pi}{\left(n^2+2m\right)}\cdot\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=1}^{n}\left(n+m_k+m_{k+1}\right)^2 M_k\left(D,A_{n,d}\right)+o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\right)^{-1}=\frac{\log\frac{1}{t}}{2\pi\left(n^2+2m\right)}+$$

$$+\frac{1}{\left(n^2+2m\right)^2}\sum_{k=1}^{n}\left(n+m_k+m_{k+1}\right)^2 M_k\left(D,A_{n,d}\right)+o(1), \qquad t\to 0. \tag{27}$$

Неравенства (22) и (23) с учетом (20) и (27) позволяют заметить, что

$$\frac{1}{2\pi\left(\frac{n^2}{2}+m\right)}\log\frac{1}{t}+M\left(D,A_{n,d}\right)+o(1)\leqslant\frac{1}{2\pi\left(\frac{n^2}{2}+m\right)}\log\frac{1}{t}+$$

$$+\frac{2}{\left(n^2+2m\right)^2}\sum_{k=1}^{n}\left(n+m_k+m_{k+1}\right)^2 M_k\left(D,A_{n,d}\right)+o(1). \tag{28}$$

Из (28) при $t\to 0$ получаем

$$M(D,A_{n,d})\leqslant\frac{2}{\left(n^2+2m\right)^2}\sum_{k=1}^{n}\left(n+m_k+m_{k+1}\right)^2 M_k\left(D,A_{n,d}\right). \tag{29}$$

Соотношения (21), (24) и (29) приводят к следующему неравенству

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\left(\frac{n^2}{2}+m\right)^2}\left[\frac{n^2}{4}\log r(D,0)+\frac{n^2}{4}\log r(D,\infty)+\frac{n^2}{2}\,g_D(0,\infty)+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m_k}\left(g_D(0,a_{k,p})+g_D(\infty,a_{k,p})\right)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m_k}\log r(D,a_{k,p})+$$

$$+\sum_{(k,p)\neq(q,s)}g_D(a_{k,p},a_{q,s})\Big]\leq\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{\left(\frac{n^2}{2}+m\right)^2}\,\sum_{k=1}^{n}\left[\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_k^{(0)},1\right)}{2}+\right.$$

$$+\sum_{p=1}^{m_k}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_{k,p}^{(1)},\omega_{k,p}^{(1)}\right)}{\left[\frac{2}{n}\,\chi\left(|a_{k,p}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,p}|\right]^{-1}}+\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_k^{(\infty)},-1\right)}{2}+$$

$$\left.+\sum_{t=1}^{m_{k+1}}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_{k,t}^{(2)},\omega_{k,t}^{(2)}\right)}{\left[\frac{2}{n}\,\chi\left(|a_{k+1,t}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k+1,t}|\right]^{-1}}\right],\qquad k=\overline{1,n}.$$

Таким образом, получаем

$$\left(r\left(D,0\right)\,r\left(D,\infty\right)\right)^{n^2/4}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m_k}r\left(D,a_{k,p}\right)\leq 2^{-n}\,\left(\frac{2}{n}\right)^m\,\mu\left(A_{n,d}\right)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left[r(\mathbf{\Omega}_k^{(0)},1)\,\prod_{p=1}^{m_k}r(\mathbf{\Omega}_{k,p}^{(1)},\omega_{k,p}^{(1)})\,r(\mathbf{\Omega}_k^{(\infty)},-1)\,\prod_{t=1}^{m_{k+1}}r(\mathbf{\Omega}_{k,t}^{(2)},\omega_{k,t}^{(2)})\right]^{1/2}.$$

Теперь доказательство теоремы заканчивается так же, как и доказательство теоремы 1. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3 проводится подобно доказательству теоремы 2.

Список литературы

[1] Лаврентьев М. А. *К теории конформных отображений* // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. — 1934. — **5.** — С. 159 — 245.

[2] Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* — Москва: Наука, 1966. — 628 с.

[3] Бахтина Г. П. *Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях*: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1975. — 11 с.

[4] Кузьмина Г. В. *Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы* // Зап. научн. семин. ЛОМИ. — 2001. — **276.** — С. 253 — 275.

[5] Хейман В. К. *Многолистные функции.* — Москва: Изд-во иностр. лит., 1960. — 180 с.

[6] Дубинин В. Н. *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении* // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. — 1988. — **168.** — С. 48 — 66.

[7] Дженкинс Дж. А. *Однолистные функции и конформные отображения.* — Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. — 256 с.

[8] Дубинин В. Н. *Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения* // Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1997. — **237.** — С. 56 — 73.

[9] Дубинин В. Н. *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного* // Успехи мат. наук. — 1994. — **49,** № 1. — С. 3 — 76.

[10] Емельянов Е. Г. *К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей* // Зап. научн. семин. ЛОМИ. — 2002. — **286.** — С. 103 — 114.

[11] Бахтин А. К. *Точные оценки для внутренних радиусов систем неналегающих областей и открытых множеств* // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 12. — С. 1601 — 1618.

[12] Бахтiн О. К. *Нерiвностi для внутрiшнiх радiусiв неперетинних областей та вiдкритих множин* // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 5. — С. 1596 — 1610.

[13] Бахтин А. К., Таргонский А. Л. *Обобщенные (n,d)-лучевые системы точек и неравенства для неналегающих областей и открытых множеств* // Укр. мат. журн. — 2011. — **63**, № 7. — С. 867 — 879.

[14] Бахтин А. К., Таргонский А. Л. *Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы* // Нелiнiйнi коливання. — 2005. — **8**, № 3. — С. 298 — 303.

[15] Таргонский А. Л. *Экстремальные задачи о частично неналегающих областях на римановой сфере* // Доп. НАН України. — 2008. — № 9. — С. 31 — 36.