Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2010, том 7, N 2, 304–313

УДК 517.54

А. Л. Таргонский

(Житомирский государственный ун-т им. И. Франка, Украина)

Решение экстремальных задач смешанного типа для неравномерных и равномерных лучевых систем точек

targonsk@zu.edu.ua

В работе рассматриваются экстремальные задачи со свободными полюсами для открытого множества. Решено ряд задач так называемого "смешанного типа", в которых часть полюсов фиксированы, а другие полюсы являются свободными.

1. Введение. В геометрической теории функций комплексной переменной экстремальные задачи о неналегающих областях представляют активно развивающееся направление. Возникновение этого направления связывается с известной работой М. А. Лаврентьева [1], где была впервые поставлена и решена задача о произведении конформных радиусов двух взаимно не пересекающихся односвязных областей. В последующем этот результат обобщался и усиливался в работах многих авторов (см., например, [2 — 14]). В данной работе рассматриваются задачи подобного типа.

2. Обозначения и определения. Пусть $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ — множества натуральных и действительных чисел соответственно, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — её одноточечная компактификация.

Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $R \in \mathbb{R}^+$. Рассмотрим системы точек $A_{n,m} = \left\{a_{2k-1,p} : k = \overline{1,n}, p = \overline{1,m}\right\}$, $A_n = \{a_{2k}\}_{k=1}^{n}$, где $a_{2k-1,p} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a_{2k} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, удовлетворяющие условиям

$$\arg a_{2k-1,1} = \arg a_{2k-1,2} = ... = \arg a_{2k-1,m},$$
$$0 < |a_{2k-1,1}| < |a_{2k-1,2}| < ... < |a_{2k-1,m}| < \infty, \tag{1}$$
$$a_{2k} = R\, \exp i\tfrac{\pi(2k-1)}{n}, \qquad k = \overline{1,n};$$

$\arg a_{1,p} < \arg a_2 < \arg a_{3,p} < \arg a_4 < ... < \arg a_{2n-1,p} < \arg a_{2n}, p = \overline{1,m}$.

Обозначим $P_k(A_{n,m}) := \{w : \arg a_{2k-1,p} < \arg w < \arg a_{2k+1,p}\}$,

$$\sigma_k := \frac{1}{\pi}(\arg a_{2k+1,p} - \arg a_{2k-1,p}), \quad \arg a_{2n+1,p} := 2\pi$$

при $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$. Очевидно, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k = 2$.

Пусть D, $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, — произвольное открытое множество и $a \in D$. Через $D(a)$ обозначим связную компоненту D, содержащую a. Для произвольных систем точек $A_{n,m}$, A_n и открытого множества D такого, что $A_{n,m} \cup A_n \subset D$, обозначим через $D_k(a_{l,p})$ связную компоненту множества $D(a_{l,p}) \bigcap \overline{P_k(A_{n,m})}$, содержащую точку $a_{l,p}$, где $l = 2k-1, 2k+1$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, $a_{2n+1,p} := a_{1,p}$. Через $D_k(a_{2k})$ обозначим связную компоненту множества $D(a_{2k}) \bigcap \overline{P_k(A_{n,m})}$, содержащую точку a_{2k} при $k = \overline{1,n}$.

Будем говорить, что открытое множество D такое, что $(A_{n,m} \cup \cup A_n) \subset D$, удовлетворяет первому условию неналегания относительно систем точек $A_{n,m}, A_n$, если при $s, l = 2k-1, 2k+1$ и $q, p = \overline{1,m}$ выполняется условие

$$\left[D_k(a_{s,p}) \bigcap D_k(a_{l,q})\right] \bigcup \left[D_k(a_{2k}) \bigcap D_k(a_{l,q})\right] = \varnothing. \tag{2}$$

Полагаем также, что открытое множество D такое, что $(\{0\} \cup A_{n,m} \cup \cup A_n) \subset D$, удовлетворяет второму условию неналегания относительно систем точек $A_{n,m}, A_n$, если выполняется условие (2) и

$$\left[D_k(0) \bigcap D_k(a_{l,p})\right] \bigcup \left[D_k(a_{2k}) \bigcap D_k(0)\right] = \varnothing \tag{3}$$

при $l = 2k-1, 2k+1$ и $p = \overline{1,m}$. Наконец, полагаем, что открытое множество D такое, что $(\{0, \infty\} \cup A_{n,m} \cup A_n) \subset D$, удовлетворяет третьему условию неналегания относительно систем точек $A_{n,m}, A_n$, если выполняются условия (2), (3), а также

$$\left[D_k(0)\bigcap D_k(\infty)\right]\bigcup\left[D_k(\infty)\bigcap D_k(a_{l,p})\right]\bigcup\left[D_k(a_{2k})\bigcap D_k(\infty)\right]=\varnothing$$

при $l=2k-1, 2k+1$ и $p=\overline{1,m}$ по всем углам $\overline{P_k(A_{n,m})}$, где $k=\overline{1,n}$.

3. Основные результаты. На системе точек $A_{n,m}$ определим функционал

$$\mu=\mu\left(A_{n,m}\right)=\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\chi\left(\left|\frac{a_{2k-1,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\sigma_k}}\right)\left|\frac{a_{2k-1,p}}{R}\right|,$$

где $\chi\left(t\right)=\frac{1}{2}\left(t+t^{-1}\right)$, и обозначим через $r(B,a)$ внутренний радиус области $B\subset\overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a\in B$ (см. [7, 8]).

Теорема 1. *Пусть $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $\alpha\in\left(0;\frac{1}{2}\right]$. Тогда для произвольных систем точек $A_{n,m}$, A_n, удовлетворяющих условиям* (1), *и для каждого открытого множества D, удовлетворяющего первому условию неналегания относительно систем точек $A_{n,m}, A_n$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r(D,a_{2k-1,p})\,r^{\alpha}(D,a_{2k})\leqslant\mu\left(A_{n,m}\right)\left(\frac{4R}{n}\right)^{n(\alpha+m)}\times$$

$$\times\left(\frac{\alpha^{\alpha}}{(m-\sqrt{\alpha})^{(m-\sqrt{\alpha})^2}\,(m+\sqrt{\alpha})^{(m+\sqrt{\alpha})^2}}\right)^{\frac{n}{2m}}. \tag{4}$$

Знак равенства в (4) *достигается, если* $D=\bigcup\limits_{k=1}^{n}\bigcup\limits_{p=1}^{m}\left(B_{2k-1,p}\cup B_{2k}\right)$, *при этом области $B_{2k-1,p}$, B_{2k} и точки $a_{2k-1,p}$, a_{2k} при $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$ являются соответственно круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала $Q(w)dw^2$, где*

$$Q(w)=\frac{w^{n-2}\left(\left(w^{\frac{n}{2}}-iR^{\frac{n}{2}}\right)^{2m}h^{2m}-\left(w^{\frac{n}{2}}+iR^{\frac{n}{2}}\right)^{2m}\right)}{\left(w^{n}+R^{n}\right)^{2}}\times$$

$$\times\frac{\left(\left(w^{\frac{n}{2}}-iR^{\frac{n}{2}}\right)^{2m}-\left(w^{\frac{n}{2}}+iR^{\frac{n}{2}}\right)^{2m}h^{2m}\right)}{\left(\left(w^{\frac{n}{2}}-iR^{\frac{n}{2}}\right)^{2m}+\left(w^{\frac{n}{2}}-iR^{\frac{n}{2}}\right)^{2m}\right)^{2}},$$

а $h \in (0;1)$ — *корень уравнения* $h^{2m} + \frac{1}{h^{2m}} = \frac{4m^2}{\alpha} - 2$.

Теорема 2. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\alpha \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$. *Тогда для произвольных систем точек* $A_{n,m}$, A_n, *удовлетворяющих условиям* (1) *и дополнительному условию*

$$\arg a_{2k-1,1} = \arg a_{2k-1,2} = ... = \arg a_{2k-1,m} = \frac{2\pi}{n}(k-1),\ k = \overline{1,n}, \quad (5)$$

и для каждого открытого множества D, *удовлетворяющего третьему условию неналегания относительно систем точек* $A_{n,m}, A_n$, *справедливо неравенство*

$$(r(D,0)\, r(D,\infty))^{\frac{n^2}{4}} \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(D, a_{2k-1,p})\, r^{\alpha}(D, a_{2k}) \leqslant$$

$$\leqslant \mu\left(A_{n,m}\right) \left(\frac{4R}{n}\right)^{n(\alpha+m)} \times$$

$$\times \left(\frac{\alpha^{\alpha}}{(m+1-\sqrt{\alpha})^{(m+1-\sqrt{\alpha})^2}\,(m+1+\sqrt{\alpha})^{(m+1+\sqrt{\alpha})^2}}\right)^{\frac{n}{2m+2}}. \quad (6)$$

Знак равенства в (6) *достигается, если* $D = \bigcup\limits_{k=1}^{n}\bigcup\limits_{p=1}^{m} B_{2k-1,p} \cup B_{2k} \cup B_0 \cup \cup B_{\infty}$, *при этом области* B_0, B_{∞}, $B_{2k-1,p}$, B_{2k} *и точки* $a_{2k-1,p}$, a_{2k} *при* $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$ *являются соответственно круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала* $Q(w)dw^2$, *где*

$$Q(w) = -\frac{\left(\left(w^{\frac{n}{2}} - iR^{\frac{n}{2}}\right)^{2m+2} h^{2m+2} + \left(w^{\frac{n}{2}} + iR^{\frac{n}{2}}\right)^{2m+2}\right)}{w^2\left(w^n + R^n\right)^2} \times$$

$$\times \frac{\left(\left(w^{\frac{n}{2}} - iR^{\frac{n}{2}}\right)^{2m+2} + \left(w^{\frac{n}{2}} + iR^{\frac{n}{2}}\right)^{2m+2} h^{2m+2}\right)}{\left(\sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k\, C_{2m+2}^{2k+1}\, R^{kn}\, w^{n(m-k)}\right)^2},$$

а $h \in (0;1)$ — *корень уравнения* $h^{2m+2} + \frac{1}{h^{2m+2}} = \frac{4(m+1)^2}{\alpha} - 2$ *и* $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Теорема 3. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\alpha \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$. *Тогда для произвольных систем точек* $A_{n,m}$, A_n, *удовлетворяющих условиям*

(1) и дополнительному условию (5) и для каждого открытого множества D, удовлетворяющего второму условию неналегания относительно систем точек $A_{n,m}, A_n$, справедливо неравенство

$$r^{\frac{n^2}{4}}(D,0)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(D,a_{2k-1,p})\, r^{\alpha}(D,a_{2k}) \leqslant$$

$$\leqslant \mu\left(A_{n,m}\right)\,\frac{R^{n\left(\alpha+m+\frac{n}{4}\right)}}{n^{n(\alpha+m)}}\,2^{n\left(2\alpha+3m+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{(4\alpha)^{4\alpha}}{(2m+1-2\sqrt{\alpha})^{(2m+1-2\sqrt{\alpha})^2}\,(2m+1+2\sqrt{\alpha})^{(m+1+2\sqrt{\alpha})^2}}\right)^{\frac{n}{8m+4}}. \quad (7)$$

Знак равенства в (7) достигается, если $D=\bigcup\limits_{k=1}^{n}\bigcup\limits_{p=1}^{m} B_{2k-1,p}\cup B_{2k}\cup$ $\cup B_0$, при этом области B_0, $B_{2k-1,p}$, B_{2k} и точки $a_{2k-1,p}$, a_{2k} при $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$ являются соответственно круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала $Q(w)dw^2$, где

$$Q(w)=\frac{\left(\left(w^{\frac{n}{2}}-iR^{\frac{n}{2}}\right)^{2m+1}h^{2m+1}-\left(w^{\frac{n}{2}}+iR^{\frac{n}{2}}\right)^{2m+1}\right)}{w^2\left(w^n+R^n\right)^2}\times$$

$$\times\frac{\left(\left(w^{\frac{n}{2}}-iR^{\frac{n}{2}}\right)^{2m+1}-\left(w^{\frac{n}{2}}+iR^{\frac{n}{2}}\right)^{2m+1}h^{2m+1}\right)}{\left(\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^k\,C_{2m+1}^{2k}\,R^{kn}\,w^{n(m-k)}\right)^2},$$

а $h\in(0;1)$ — корень уравнения $h^{2m+1}+\frac{1}{h^{2m+1}}=\frac{(2m+1)^2}{\alpha}-2$ и $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

***Доказательство теоремы* 1.** Рассмотрим множества $E_0 = \overline{\mathbb{C}}\backslash D$, $E_{2k}(t)=\{w\in\mathbb{C}:|w-a_{2k}|\leqslant t\}$, $E_{2k-1,p}(t)=\{w\in\mathbb{C}: |w-a_{2k-1,p}|\leqslant t\}$ при $k=\overline{1,2n}$, $p=\overline{1,m}$ и достаточно малых $t\in\mathbb{R}^+$.

Рассмотрим конденсатор

$$C(t,D,A_{n,m}\cup A_n)=\{E_0,\,E_{1,1}(t),\ldots,E_{2n-1,m}(t),\,E_2(t),\ldots,E_{2n}(t)\},$$

с предписанными значениями $0,\underbrace{1,\ldots,1}_{nm\text{ раз}},\underbrace{\sqrt{\alpha},\ldots,\sqrt{\alpha}}_{n\text{ раз}}$. Емкостью конденсатора $C(t,D,A_{n,m}\cup A_n)$ называется величина (см. [5])

$$\operatorname{cap} C(t,D,A_{n,m}\cup A_n)=\inf\iint\left[(G'_x)^2+(G'_y)^2\right]\,dxdy,$$

где нижняя грань берется по множеству всех вещественных липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G = G(z)$ таких, что $G = 0$ в окрестности множества E_0, $G\Big|_{E_{2k}(t)} = \sqrt{\alpha}$, $G\Big|_{E_{2k-1,p}(t)} = 1$ при $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$. Модуль конденсатора $|C(t, D, A_{n,m} \cup A_n)|$ определяется равенством

$$|C(t, D, A_{n,m} \cup A_n)| = [\operatorname{cap} C(t, D, A_{n,m} \cup A_n)]^{-1}.$$

С учетом теоремы 1 из [7] находим асимптотику модуля конденсатора $C(t, D, A_{n,m} \cup A_n)$ при $t \to 0$:

$$|C(t, D, A_{n,m} \cup A_n)| = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n(\alpha + m)} \log \frac{1}{t} + M(D, A_{n,m} \cup A_n) + o(1), \quad (8)$$

где

$$M(D, A_{n,m} \cup A_n) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n^2(\alpha + m)^2} \Big[\sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} \log r(D, a_{2k-1,p}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \alpha \log r(D, a_{2k}) + \sum_{k \neq p} \alpha g_D(a_{2p}, a_{2k}) +$$

$$+ \sum_{(k,p) \neq (l,q)} g_D(a_{2l-1,q}, a_{2k-1,p}) + \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} 2\sqrt{\alpha} g_D(a_{2l}, a_{2k-1,p}) \Big], \quad (9)$$

а $g_B(z,a) = \begin{cases} g_{B(a)}(z,a), \ z \in B(a), \\ 0, \ z \in \overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{B(a)}, \\ \lim\limits_{\zeta \to z} g_{B(a)}(\zeta, a), \ \zeta \in B(a), z \in \partial B(a) \end{cases}$ — обобщенная функция Грина открытого множества B относительно точки $a \in B$.

Функция $\pi_k(w) = -i \left(e^{-i \arg a_{2k-1,p}} w \right)^{\frac{1}{\sigma_k}}$ конформно отображает область $P_k(A_{n,m})$ на правую полуплоскость для всех $k = \overline{1,n}$.

Рассмотрим разделяющее преобразование (см. [7]) конденсатора $C(t, D, A_{n,m} \cup A_n)$ относительно семейства углов $\{P_k(A_{n,m})\}_{k=1}^n$ и семейства функций $z_k(w) := \frac{\pi_k(a_{2k}) - \pi_k(w)}{\pi_k(a_{2k}) + \pi_k(w)}$, $k = \overline{1,n}$, $z_0(w) := z_n(w)$, конформно отображающих правую полуплоскость на внутренность единичного круга.

При $k = \overline{1,n}$ рассмотрим конденсаторы

$$C_k(t, D, A_{n,m} \cup A_n) = \left(E_0^{(k)}, \overline{U}_t^{(k)}, \Delta_t^{(k)}, E_1^{(k)}, E_2^{(k)}, \ldots, E_{2m}^{(k)} \right),$$

где $\quad E_0^{(k)} = z_k\left(E_0 \bigcap \overline{P_k(A_{n,m})}\right) \bigcup \left\{z_k\left(E_0 \bigcap \overline{P_k(A_{n,m})}\right)\right\}^*,$

$$E_1^{(k)} = z_k\left(E_{2k+1,1}(t) \bigcap \overline{P_k(A_{n,m})}\right) \bigcup \left\{z_k\left(E_{2k+1,1}(t) \bigcap \overline{P_k}(A_{n,m}\right)\right\}^*,$$

$$\ldots$$

$$E_m^{(k)} = z_k\left(E_{2k+1,m}(t) \bigcap \overline{P_k(A_{n,m})}\right) \bigcup \left\{z_k\left(E_{2k+1,m}(t) \bigcap \overline{P_k(A_{n,m})}\right)\right\}^*,$$

$$E_{m+1}^{(k)} = z_k\left(E_{2k-1,m}(t) \bigcap \overline{P_k(A_{n,m})}\right) \bigcup \left\{z_k\left(E_{2k-1,m}(t) \bigcap \overline{P_k(A_{n,m})}\right)\right\}^*,$$

$$\ldots$$

$$E_{2m}^{(k)} = z_k\left(E_{2k-1,1}(t) \bigcap \overline{P_k(A_{n,m})}\right) \bigcup \left\{z_k\left(E_{2k-1,1}(t) \bigcap \overline{P_k(A_{n,m})}\right)\right\}^*,$$

$$U_t^{(k)} = z_k\left(E_{2k}(t) \bigcap \overline{P_k(A_{n,m})}\right), \quad \Delta_t^{(k)} = \left\{z_k\left(E_{2k}(t) \bigcap \overline{P_k(A_{n,m})}\right)\right\}^*,$$

$$E_{2n+1}(t) := E_1(t), \qquad \{A\}^* := \{w \in \overline{\mathbb{C}} : \frac{1}{\overline{w}} \in A\}.$$

Каждому конденсатору $C_k(t, D, A_{n,m} \cup A_n)$ поставим в соответствие класс V_k всех вещественных липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G = G(z)$ таких, что $G = 0$ в окрестности множества $E_0^{(k)}$, $G\Big|_{\overline{U_t^{(k)}}} = \sqrt{\alpha}$, $G\Big|_{\Delta_t^{(k)}} = \sqrt{\alpha}$, $G\Big|_{E_s^{(k)}} = 1$ при $k = \overline{1,n}$, $s = 1, \ldots, 2m$. При разделяющем преобразовании конденсатору $C(t, D, A_{n,m} \cup A_n)$ соответствует набор конденсаторов $\{C_k(t, D, A_{n,m} \cup A_n)\}_{k=1}^n$, причем справедливо неравенство (см. [7 — 9]) $\quad \operatorname{cap} C(t, D, A_{n,m} \cup A_n) \geqslant \frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{cap} C_k(t, D, A_{n,m} \cup A_n)$, следствием которого является неравенство

$$|C(t, D, A_{n,m} \cup A_n)| \leqslant 2\left(\sum_{l=1}^{n} |C_k(t, D, A_{n,m} \cup A_n)|^{-1}\right)^{-1}. \tag{10}$$

При $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$ и $s = 2k-1, 2k+1$ справедливы соотношения

$$|z_k(w)| \sim \frac{1}{2R\sigma_k}\,|w - a_{2k}|, \qquad w \to a_{2k}\,,$$

$$|z_k(w) - z_k(a_{s,p})| \sim \frac{2}{\sigma_k}\,\frac{|a_{s,p}|^{\frac{1}{\sigma_k}-1} R^{\frac{1}{\sigma_k}}}{R^{\frac{2}{\sigma_k}} + |a_{s,p}|^{\frac{2}{\sigma_k}}}\,|w - a_{s,p}|, \quad w \to a_{s,p}\,. \tag{11}$$

Используя соотношения (8), (9), (11), получаем асимптотическое равенство

$$|C_k(t, D, A_{n,m} \cup A_n)| = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2m + 2\alpha} \log \frac{1}{t} +$$

$$+ M_k(D, A_{n,m} \cup A_n) + o(1), \qquad t \to 0\,, \tag{12}$$

в котором

$$M_k(D, A_{n,m} \cup A_n) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(2m + 2\alpha)^2} \left(\alpha \log \frac{r\left(D_0^{(k)}, 0\right) r\left(D_\infty^{(k)}, \infty\right)}{\frac{1}{4R^2\sigma_k^2}} + \right.$$

$$\left. + \log \frac{\prod\limits_{s=1}^{2m} r\left(D_s^{(k)}, a_s^{(k)}\right)}{\left(\frac{2}{\sigma_k}\right)^{2m} \frac{\prod\limits_{q=1}^{m} |a_{2k-1,q}|^{\frac{1}{\sigma_k}-1} |a_{2k+1,q}|^{\frac{1}{\sigma_k}-1} R^{\frac{2}{\sigma_k}}}{\prod\limits_{q=1}^{m} \left(R^{\frac{2}{\sigma_k}} + |a_{2k-1,q}|^{\frac{2}{\sigma_k}}\right)\left(R^{\frac{2}{\sigma_k}} + |a_{2k+1,q}|^{\frac{2}{\sigma_k}}\right)}} \right), \tag{13}$$

где $z_k(a_{2k+1,p}) =: a_p^{(k)}$; $z_k(a_{2k-1,p}) =: a_{2m+1-p}^{(k)}$; $D_0^{(k)}$ — связная компонента множества $z_k\left(D \bigcap \overline{P_k(A_{n,m})}\right)$, содержащая точку 0; $D_\infty^{(k)}$ — область, симметричная области $D_0^{(k)}$ относительно единичной окружности; $D_s^{(k)}$ — объединение связных компонент множеств $z_k\left(D \bigcap \overline{P_k(A_{n,m})}\right)$, содержащих точку $a_s^{(k)}$, с их симметричным отражением относительно единичной окружности.

Далее, используя (12), получаем асимптотическое равенство

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |C_k(t, D, A_{n,m} \cup A_n)|^{-1} \right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{4\pi n\,(m + \alpha)} \log \frac{1}{t} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} M_k(D, A_{n,m} \cup A_n) + o(1), \quad t \to 0\,. \tag{14}$$

Из соотношений (8), (10), (14) получаем неравенство

$$M(D, A_{n,m} \cup A_n) \leqslant \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} M_k(D, A_{n,m} \cup A_n). \tag{15}$$

Теперь из соотношений (9), (13), (15) следует неравенство

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(D,a_{2k-1,p})\, r^{\alpha}(D,a_{2k}) \leqslant 2^{n\alpha}\, R^{n\alpha}\, \prod_{k=1}^{n}\sigma_k^{m+\alpha}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\chi\left(\left|\frac{a_{2k-1,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\sigma_k}}\right)|a_{2k-1,p}|\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left\{\prod_{s=1}^{2m} r\left(D_s^{(k)},a_s^{(k)}\right)\left(r\left(D_0^{(k)},0\right) r\left(D_\infty^{(k)},\infty\right)\right)^{\alpha}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

используя которое и очевидное неравенство $\prod\limits_{k=1}^{n}\sigma_k \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n$, окончательно имеем

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(D,a_{2k-1,p})\, r^{\alpha}(D,a_{2k}) \leqslant \frac{2^{n(2\alpha+m)}\, R^{n(\alpha+m)}}{n^{n(\alpha+m)}}\times$$

$$\times\mu\left(A_{n,m}\right)\prod_{k=1}^{n}\left\{\prod_{s=1}^{2m} r\left(D_s^{(k)},a_s^{(k)}\right)\left(r\left(D_0^{(k)},0\right) r\left(D_\infty^{(k)},\infty\right)\right)^{\alpha}\right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

Наконец, из неравенства (16) получаем утверждение теоремы 1 так же, как в работах [7, 11, 15] установлены аналогичные утверждения.

Теоремы 2, 3 доказываются аналогично теореме 1.

Список литературы

[1] Лаврентьев М. А. *К теории конформных отображений* // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. — 1934. — **5.** — С. 159 – 245.

[2] Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* — Москва: Наука, 1966. — 628 с.

[3] Бахтина Г. П. *Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях*: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1975. — 11 с.

[4] Кузьмина Г. В. *Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы* // Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 2001. — **276.** — С. 253 – 275.

[5] Хейман В. К. *Многолистные функции.* — Москва: Изд-во иностр. лит., 1960. — 180 с.

[6] Дженкинс Дж. А. *Однолистные функции и конформные отображения.* — Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. — 256 с.

[7] Дубинин В. Н. *Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения* // Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1997. — **237**. — С. 56 – 73.

[8] Дубинин В. Н. *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного* // Успехи мат. наук. — 1994. — **49**, № 1. — С. 3 – 76.

[9] Дубинин В. Н. *Емкости конденсаторов в геометрической теории функций.* — Владивосток: Дальневосточный ун-т, 2003. — 116 с.

[10] Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б. *Топологоалгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе* // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2008. — Т. 73. — 308 с.

[11] Бахтин А. К. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности // Доп. НАН України. — 2004. — № 8. — С. 7 – 15.

[12] Бахтин А. К. *Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств* // Доп. НАН України. — 2006. — № 10. — С. 7 – 13.

[13] Бахтин А. К. *Точные оценки для внутренних радиусов систем неналегающих областей и открытых множеств* // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 12. — С. 1601 – 1618.

[14] Бахтін О. К. *Нерівності для внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин* // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 5. — С. 1596 – 1610.

[15] Бахтин А. К., Таргонский А. Л. *Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы* // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 3. — С. 298 – 303.