УДК 539.376

Василь В. Михайленко, д.ф.-м.н., професор,
Василь О. П'ятецький, к.ф.-м.н, доцент,
Олександр В. Лущиков, аспірант

Рівняння одночастотного наближення стаціонарних коливань непружних п'єзоелектричних тіл в потенціалах

Показано, що визначальні рівняння непружних фізично нелінійних п'єзоелектричних тіл при моногармонічному навантаженні у межах гіпотези одночастотності коливань можна виразити через потенціали.

Ключові слова: п'єзоелектричні тіла, одночастотне наближення, амплітудні рівняння.

V.V. Mikhailenko, D.Sci. (Phys.-Math.),
V.O. Pyatetsky, Cand.Sci (Phys.-Math.),
O.V. Lushchykov, PhD student

Potential equations of one-frequency approach to stationary oscillations of inelastic piezoelectric solids

This paper proposes a proof of possibility to express constitutive equations of physically nonlinear piezoelectric solids under monoharmonic loading in potentials in case of one-frequency oscillations.

Key Words: piezoelectric solids, monoharmonic approach, amplitude equations.

Припустимо, що в результаті дії гармонічного навантаження з круговою частотою ω в п'єзоелектричному тілі встановлюється одночастотний (моногармонічний) напружено-деформований і електричний стан виду [1, 2]

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma'_{ij}\cos\omega t - \sigma''_{ij}\sin\omega t, \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon'_{ij}\cos\omega t - \varepsilon''_{ij}\sin\omega t, \\ E_j &= E'_j\cos\omega t - E''_j\sin\omega t, \\ D_j &= D'_j\cos\omega t - D''_j\sin\omega t. \end{aligned} \tag{1}$$

Виберемо за незалежні змінні амплітуди ε'_{ij}, ε''_{ij} механічної деформації і D'_j, D''_j індукції електричного поля. Тоді амплітуди σ'_{ij}, σ''_{ij} механічного напруження і E'_k, E''_k напруженості електричного поля розглядаються як нелінійні функції незалежних змінних

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= \sigma'_{ij}\left(\varepsilon'_{kl},\varepsilon''_{kl},D'_k,D''_k\right), \\ \sigma''_{ij} &= \sigma''_{ij}\left(\varepsilon'_{kl},\varepsilon''_{kl},D'_k,D''_k\right), \\ E'_j &= E'_j\left(\varepsilon'_{kl},\varepsilon''_{kl},D'_k,D''_k\right), \\ E''_j &= E''_j\left(\varepsilon'_{kl},\varepsilon''_{kl},D'_k,D''_k\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Ці функції повинні задовольняти умову інваріантності відносно перетворення зсуву в часі, тобто відносно заміни в (1) ωt на $\omega t + \varphi$. Цю умову можна записати у матричному вигляді

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\Lambda}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}),$$

де

$$\boldsymbol{S} = \left(\sigma'_{ij},\sigma''_{ij},E'_k,E''_k\right)^T, \ \boldsymbol{\Lambda} = \left(\varepsilon'_{ij},\varepsilon''_{ij},D'_k,D''_k\right)^T,$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Функції (2) вважаються диференційовними по $\varepsilon'_{kl},\varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k$. Тоді шляхом виключення параметра φ умову інваріантності можна записати в диференціальній формі

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\tilde\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl} - \frac{\partial\tilde\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl} + \frac{\partial\tilde\sigma_{ij}}{\partial D'_k}D''_k - \frac{\partial\tilde\sigma_{ij}}{\partial D''_k}D'_k + i\tilde\sigma_{ij} = 0, \\ &\frac{\partial\tilde E_i}{\partial\varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl} - \frac{\partial\tilde E_i}{\partial\varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl} + \frac{\partial\tilde E_i}{\partial D'_k}D''_k - \frac{\partial\tilde E_i}{\partial D''_k}D'_k + i\tilde E_i = 0, \end{aligned}$$

де введені позначення

$$\tilde\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + i\sigma''_{ij},\ \tilde E_k = E'_k + iE''_k,\ i = \sqrt{-1}.$$

Розглянемо функції дисипації [1, 4]

$$\bar D = \sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij} + E''_k D'_k - E'_k D''_k \tag{3}$$

і накопичення

$$\bar U = \sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} + E'_k D'_k + E''_k D''_k. \tag{4}$$

Безпосередньою підстановкою (з врахуванням умови інваріантності) можна перевірити, що ці функції задовольняють рівнянню

$$\frac{\partial\tilde\Phi}{\partial\varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl} - \frac{\partial\tilde\Phi}{\partial\varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl} + \frac{\partial\tilde\Phi}{\partial D'_k}D''_k - \frac{\partial\tilde\Phi}{\partial D''_k}D'_k = 0. \tag{5}$$

Подальший виклад спирається на наступну теорему.

Теорема. Нехай $\vec{X}$ – елемент N-мірного векторного простору E_N з внутрішнім добутком $\vec{A}\otimes\vec{B}$, $\vec{Y}\left(\vec{X}\right)$ - неперервно-диференційовне відображення $E_N \to E_N$, а $F\left(\vec{X}\right)$ - скалярна неперервно-диференційовна функція. Тоді будь-який розв'язок рівняння

$$\vec{X}\otimes\vec{Y}\left(\vec{X}\right)=F\left(\vec{X}\right) \tag{6}$$

можна подати у вигляді

$$\begin{gathered}\vec{Y}\left(\vec{X}\right)=grad\Psi\left(\vec{X}\right)+\vec{U}\left(\vec{X}\right);\\ \Psi\left(\vec{X}\right)=\int_0^1 F\left(\lambda\vec{X}\right)\frac{d\lambda}{\lambda};\\ U_i\left(\vec{X}\right)=\int_0^1 \lambda X_j\left[\frac{\partial Y_i\left(\lambda\vec{X}\right)}{\partial\left(\lambda X_j\right)}-\frac{\partial Y_j\left(\lambda\vec{X}\right)}{\partial\left(\lambda X_i\right)}\right]d\lambda;\\ \vec{U}\left(\vec{X}\right)\otimes\vec{X}=0.\end{gathered} \tag{7}$$

Твердження теореми перевіряється шляхом диференціювання рівності

$$\int_0^1 \vec{X}\otimes\vec{Y}\left(\lambda\vec{X}\right)d\lambda=\Psi\left(\vec{X}\right),$$

яка утворюється з (6), якщо замінити $\vec{X}$ на $\lambda\vec{X}$ і скористатись позначенням функції $\Psi\left(\vec{X}\right)$ з (7).

Розглянемо функції (3) і (4)

$$\sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij}-\sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij}+E''_kD'_k-E'_kD''_k=\bar{D}\left(\varepsilon'_{kl},\varepsilon''_{kl},D'_l,D''_l\right), \tag{8}$$

$$\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij}+\sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij}+E'_kD'_k+E''_kD''_k=\bar{U}\left(\varepsilon'_{kl},\varepsilon''_{kl},D'_l,D''_l\right). \tag{9}$$

Введемо позначення $\vec{X}=\left(\varepsilon'_{ij},\varepsilon''_{ij},D'_k,D''_k\right)$, $\vec{Y}=\left(\sigma''_{ij},-\sigma'_{ij},E''_k,-E'_k\right)$. Тоді розв'язок рівняння (8) згідно з наведеною вище теоремою можна записати у вигляді

$$\begin{gathered}\sigma'_{ij}=-\frac{\partial D}{\partial\varepsilon''_{ij}}-D''_{ij},\ \sigma''_{ij}=\frac{\partial D}{\partial\varepsilon'_{ij}}+D'_{ij},\\ E'_k=-\frac{\partial D}{\partial D''_k}-R''_k,\ E''_k=\frac{\partial D}{\partial D'_k}+R'_k,\end{gathered} \tag{10}$$

де функція D визначається співвідношенням

$$D=\int_0^1 \bar{D}\left(\lambda\varepsilon'_{ij},\lambda\varepsilon''_{ij},\lambda D'_k,\lambda D''_k\right)\frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{11}$$

Для функцій $D'_{ij},D''_{ij},R'_k,R''_k$ маємо

$$D'_{ij}\varepsilon'_{ij}+D''_{ij}\varepsilon''_{ij}+R'_kD'_k+R''_kD''_k=0. \tag{12}$$

Підставляючи (10) в рівняння (9), отримуємо

$$\begin{gathered}D'_{ij}\varepsilon''_{ij}-D''_{ij}\varepsilon'_{ij}+R'_kD''_k-R''_kD'_k=\\ =\bar{U}\left(\varepsilon'_{kl},\varepsilon''_{kl},D'_l,D''_l\right).\end{gathered} \tag{13}$$

Тут враховано, що функція D (11), як і функція $\bar{D}$, задовольняє диференціальному рівнянню (5).

Введемо позначення $\vec{X}=\left(\varepsilon'_{ij},\varepsilon''_{ij},D'_k,D''_k\right)$, $\vec{Y}=\left(-D''_{ij},D'_{ij},-R''_k,R'_k\right)$. Застосувавши знову наведену вище теорему, приходимо до розв'язку рівняння (13)

$$\begin{gathered}D'_{ij}=\frac{\partial U}{\partial\varepsilon''_{ij}}+g''_{ij},\ D''_{ij}=-\frac{\partial U}{\partial\varepsilon'_{ij}}-g'_{ij},\\ R'_k=\frac{\partial U}{\partial D''_k}+g''_k,\ R''_k=-\frac{\partial U}{\partial D'_k}-g'_k.\end{gathered} \tag{14}$$

Функція U визначається співвідношенням

$$U=\int_0^1 \bar{U}\left(\lambda\varepsilon'_{ij},\lambda\varepsilon''_{ij},\lambda D'_k,\lambda D''_k\right)\frac{d\lambda}{\lambda}$$

і тому також задовольняє диференціальне рівняння (5).

Об'єднуючи (10) і (11), отримуємо сумісний розв'язок системи рівнянь (8) і (9) у вигляді

$$\begin{gathered}\sigma'_{ij}=\frac{\partial U}{\partial\varepsilon'_{ij}}-\frac{\partial D}{\partial\varepsilon''_{ij}}+g'_{ij},\ \sigma''_{ij}=\frac{\partial U}{\partial\varepsilon''_{ij}}+\frac{\partial D}{\partial\varepsilon'_{ij}}+g''_{ij},\\ E'_k=\frac{\partial U}{\partial D'_k}-\frac{\partial D}{\partial D''_k}+g'_k,\ E''_k=\frac{\partial U}{\partial D''_k}+\frac{\partial D}{\partial D'_k}+g''_k.\end{gathered} \tag{15}$$

Функції g'_{ij}, g''_{ij}, g'_k, g''_k задовольняють умовам

$$\begin{gathered}g'_{ij}\varepsilon'_{ij}+g''_{ij}\varepsilon''_{ij}+g'_kD'_k+g''_kD''_k=0,\\ g''_{ij}\varepsilon'_{ij}-g'_{ij}\varepsilon''_{ij}+g''_kD'_k-g'_kD''_k=0,\end{gathered} \tag{16}$$

причому перша з них є наслідком теореми, застосованої до рівняння (13), а друга – наслідком рівнянь (13), (14) і (5).

Підставимо рівняння (15) у (8) і (9), враховуючи при цьому рівності (5) і (16). В результаті отримаємо вирази для функцій дисипації $\bar{D}$ і накопичення $\bar{U}$ через потенціали відповідно D і U

$$\bar{D}=\frac{\partial D}{\partial\varepsilon'_{ij}}\varepsilon'_{ij}+\frac{\partial D}{\partial\varepsilon''_{ij}}\varepsilon''_{ij}+\frac{\partial D}{\partial D'_k}D'_k+\frac{\partial D}{\partial D''_k}D''_k,$$

$$\bar{U} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon'_{ij}}\varepsilon'_{ij} + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon''_{ij}}\varepsilon''_{ij} + \frac{\partial U}{\partial D'_k}D'_k + \frac{\partial U}{\partial D''_k}D''_k .$$

Таким чином, умови (16) призводять до того, що функції $g'_{ij}, g''_{ij}, g'_k, g''_k$ в рівняннях (15) не дають ніякого внеску ні в функцію дисипації, ні в функцію накопичення. Скориставшись третім із співвідношень (7) і умовами інваріантності відносно перетворення зсуву в часі в диференціальній формі, можна показати, що достатніми умовами рівностей

$$g'_{ij} = 0, \; g''_{ij} = 0, \; g'_k = 0, \; g''_k = 0$$

і тим самим зображення амплітудних рівнянь в потенціалах

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= \frac{\partial U}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon''_{ij}}, \; \sigma''_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon''_{ij}} + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon'_{ij}}, \\ E'_k &= \frac{\partial U}{\partial D'_k} - \frac{\partial D}{\partial D''_k}, \; E''_k = \frac{\partial U}{\partial D''_k} + \frac{\partial D}{\partial D'_k} \end{aligned} \tag{17}$$

є такі умови симетрії

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial \varepsilon'_{kl}} - \frac{\partial \sigma''_{ij}}{\partial \varepsilon''_{kl}} = \frac{\partial \sigma'_{kl}}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial \sigma''_{kl}}{\partial \varepsilon''_{ij}}, \\ &\frac{\partial E'_k}{\partial D'_l} - \frac{\partial E''_k}{\partial D''_l} = \frac{\partial E'_l}{\partial D'_k} - \frac{\partial E''_l}{\partial D''_k}, \\ &\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial D'_k} - \frac{\partial \sigma''_{ij}}{\partial D''_k} = \frac{\partial E'_k}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial E''_k}{\partial \varepsilon''_{ij}}. \end{aligned} \tag{18}$$

Диференціюючи рівності (17), легко переконатися, що ці умови є і необхідними.

Подібним чином можна отримати аналогічні результати для інших наборів незалежних змінних. Відповідна консервативна характеристика знаходиться шляхом розписування виразу для функції дисипації з використанням відповідних умов інваріантності відносно перетворення зсуву в часі в диференціальній формі. Наприклад, у випадку залежностей

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= \sigma'_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, E'_k, E''_k\right), \\ \sigma''_{ij} &= \sigma''_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, E'_k, E''_k\right), \\ D'_j &= D'_j\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, E'_k, E''_k\right), \\ D''_j &= D''_j\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, E'_k, E''_k\right) \end{aligned} \tag{19)}$$

розв'язок системи рівнянь

$$\begin{aligned} \sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij} + D'_k E''_k - D''_k E'_k &= \bar{D}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, E'_l, E''_l\right), \\ \sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} - D'_k E'_k - D''_k E''_k &= \bar{H}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, E'_l, E''_l\right) \end{aligned}$$

однозначно визначений і зображається у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= \frac{\partial H}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon''_{ij}}, \; \sigma''_{ij} = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon''_{ij}} + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon'_{ij}}, \\ D'_k &= -\frac{\partial H}{\partial E'_k} + \frac{\partial D}{\partial E''_k}, \; D''_k = -\frac{\partial H}{\partial E''_k} - \frac{\partial D}{\partial E'_k} \end{aligned} \tag{21}$$

тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови симетрії:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial \varepsilon'_{kl}} - \frac{\partial \sigma''_{ij}}{\partial \varepsilon''_{kl}} = \frac{\partial \sigma'_{kl}}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial \sigma''_{kl}}{\partial \varepsilon''_{ij}}, \\ &\frac{\partial D'_k}{\partial E'_l} - \frac{\partial D''_k}{\partial E''_l} = \frac{\partial D'_l}{\partial E'_k} - \frac{\partial D''_l}{\partial E''_k}, \\ &\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial E'_k} - \frac{\partial \sigma''_{ij}}{\partial E''_k} = -\left(\frac{\partial D'_k}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial D''_k}{\partial \varepsilon''_{ij}}\right), \end{aligned} \tag{22}$$

при цьому

$$H = \int_0^1 \bar{H}\left(\lambda\varepsilon'_{ij}, \lambda\varepsilon''_{ij}, \lambda E'_k, \lambda E''_k\right)\frac{d\lambda}{\lambda},$$

$$D = \int_0^1 \bar{D}\left(\lambda\varepsilon'_{ij}, \lambda\varepsilon''_{ij}, \lambda E'_k, \lambda E''_k\right)\frac{d\lambda}{\lambda}.$$

У загальному випадку розв'язок системи рівнянь (20) містить складові, аналогічні функціям $g'_{ij}, g''_{ij}, g'_k, g''_k$ в рівняннях (15). Однак вони також не дають ніякого внеску в дисипативну $\bar{D}$ і консервативну $\bar{H}$ характеристики. Сказати щонебудь більше про ці функції, як і про функції $g'_{ij}, g''_{ij}, g'_k, g''_k$ з (15), не можна.

Якщо амплітудні рівняння отримані в результаті усереднення по Гальоркіну (перша інтерпретація амплітудних рівнянь [5]) якихнебудь загальних визначальних рівнянь, умова інваріантності амплітуд відносно зсуву в часі виконується автоматично. При цьому виникає питання про виконання умов симетрії типу (18) і (22). Якщо в якості загальних виступають кратноінтегральні співвідношення електров'язкопружності, для ядер яких постулюється «принцип взаємності», рівності (18) або (22) виконуються [3]. Більше того, мають місце сильніші рівності, наприклад

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial \varepsilon'_{kl}} = \frac{\partial \sigma'_{kl}}{\partial \varepsilon'_{ij}}, \; \frac{\partial \sigma''_{ij}}{\partial \varepsilon''_{kl}} = \frac{\partial \sigma''_{kl}}{\partial \varepsilon''_{ij}},$$

які є достатніми, але не необхідними для рівностей (18). Отже умови симетрії (18) допускають ширший клас амплітудних залежностей, що виражаються через потенціали, ніж припущення про виконання «принципу взаємності» для ядер загальної кратноінтегральної теорії електров'язкопружності.

У загальному випадку питання про симетрію типу (18) або (22), як і питання про виконання «принципу взаємності», залишається відкритим. Незважаючи на це, будь-які амплітудні рівняння, отримані в результаті усереднення по Гальоркіну загальних рівнянь, допускають виділення потенціальної частини. Решта членів цих рівнянь типу функцій $g'_{ij}, g''_{ij}, g'_k, g''_k$ в (15) не будуть впливати на дисипацію та накопичення і тому, як це робиться в подібних випадках в класичній континуальній механіці, можуть бути відкинуті.

У лінійному випадку рівняння (17) і (21) є точними.

Наведені результати отримані незалежно від типу матеріальної симетрії середовища. При їх використанні для середовищ з конкретною симетрією можна виходити з тих чи інших зображень скалярних функцій тензорних аргументів в рівняннях (17) і (21). Це дозволяє конкретизувати амплітудні рівняння безпосередньо за результатами експериментів на гармонічне навантаження.

Якщо покласти

$$\tilde{U} = U + iD ,$$

то рівняння (17) можна записати в комплексному вигляді

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \varepsilon'_{ij}} + i\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \varepsilon''_{ij}}, \ \tilde{E}_k = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial D'_k} + i\frac{\partial \tilde{U}}{\partial D''_k} .$$

Аналогічне співвідношення можна отримати для рівнянь (21).

Список використаних джерел

1. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Электротермовязкоупругость: Механика связанных полей в элементах конструкций. – Киев: Наук. Думка, 1988. – Т. 4. – 320 с.
2. *Митропольский Ю.А.* Нелинейная механика. Одночастотные колебания. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1997. – 344 с.
3. *Михайленко В.В.* О потенциальности определяющих уравнений для неупругих пьезоэлектрических материалов при моногармонических воздействиях // Прикл. механика. – 1997. – **33**, N 6. – С. 49-51.
4. *Karnaukhov V.G., Mikhailenko V.V.* Nonlinear single-frequency vibrations and dissipative heating of inelastic piezoelectric bodies // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 5. – P. 521-547.
5. *Senchenkov I.K., Karnaukhov V.G.* Thermomechanical behaviour of nonlinear viscoelastic materials under harmonic loading // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, N 11. – P. 1400 - 1432.

Надійшла до редколегії 20.01.2007