УДК 539.376

О.В.Лущиков, ст. викл.
Житомирський військовий інститут радіоелектроніки
В.В.Михайленко, д.ф.-м.н.
Житомирський інженерно-технологічний інститут
А.Ц.Франовський, к.ф.-м.н.
Житомирський державний педагогічний університет

ДО ПИТАННЯ ПРО КОНЦЕПЦІЮ АМПЛІТУДНОЗАЛЕЖНИХ КОМПЛЕКСНИХ МОДУЛІВ В МЕХАНІЦІ НЕПРУЖНИХ ІЗОТРОПНИХ МАТЕРІАЛІВ

Показано, що моногармонічне наближення коливань непружних ізотропних тіл в загальному випадку може бути описане в термінах амплітуднозалежних комплексних модулів в межах точності, яку забезпечує метод найменших квадратів

Моногармонічне наближення коливань фізично нелінійних непружних тіл описується рівняннями, які встановлюють зв'язок між тензорами $\varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij}$, що характеризують механічну деформацію

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} \cos\omega t - \varepsilon''_{ij} \sin\omega t \tag{1}$$

і тензорами σ'_{ij}, σ''_{ij}, які визначають механічне напруження

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} \cos\omega t - \sigma''_{ij} \sin\omega t \tag{2}$$

В загальному випадку цей зв'язок записується у вигляді тензорних функцій

$$\sigma'_{ij} = \sigma'_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}\right), \quad \sigma''_{ij} = \sigma''_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}\right), \tag{3}$$

які повинні задовольняти обмеженням, що накладаються законами термодинаміки, типом симетрії матеріалу і умовою інваріантності амплітуд відносно зсуву в часі [1]. Остання умова означає інваріантність залежностей (3) відносно заміни в (1) і (2) ωt на $\omega t + \varphi$ і може бути представлена у вигляді

$$\begin{cases} \sigma'_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}\right)\cos\varphi - \sigma''_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}\right)\sin\varphi = \sigma'_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}\cos\varphi - \varepsilon''_{kl}\sin\varphi, \varepsilon'_{kl}\sin\varphi + \varepsilon''_{kl}\cos\varphi\right), \\ \sigma'_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}\right)\sin\varphi + \sigma''_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}\right)\cos\varphi = \sigma''_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}\cos\varphi - \varepsilon''_{kl}\sin\varphi, \varepsilon'_{kl}\sin\varphi + \varepsilon''_{kl}\cos\varphi\right). \end{cases} \tag{4}$$

Припустивши диференційованість функцій (3), з рівнянь (4) можна отримати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \sigma'_{ij} = \dfrac{\partial \sigma''_{ij}}{\partial \varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl} - \dfrac{\partial \sigma''_{ij}}{\partial \varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl}, \\ \sigma''_{ij} = \dfrac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial \varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl} - \dfrac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial \varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl}. \end{cases} \tag{5}$$

Для спрощення викладок введемо оператор

$$A[u] = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl} - \frac{\partial u}{\partial \varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl}.$$

Очевидно, що оператор $A[u]$ має такі властивості:

$$A[u \pm v] = A[u] \pm A[v], \quad A[uv] = A[u]v + uA[v], \quad A[f(I_k)] = \frac{\partial f}{\partial I_l}A[I_l], \tag{6}$$

де u, v - диференційовані функції від $\varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij}$, f - функція від $I_k\left(\varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij}\right)$.

Рівняння (5) можна записати у вигляді

$$\sigma'_{ij} = A\left[\sigma''_{ij}\right], \quad \sigma''_{ij} = -A\left[\sigma'_{ij}\right]. \tag{7}$$

Далі скористаємося загальним представленням квазілінійних ізотропних функцій, яке має вигляд [1]:

$$\begin{gathered} \sigma'_{ij} = \beta_{01}(;)\delta_{ij} + \beta_{11}(;)\varepsilon'_{ij} + \beta_{21}(;)\varepsilon''_{ij}, \\ \sigma''_{ij} = \beta_{02}(;)\delta_{ij} + \beta_{12}(;)\varepsilon'_{ij} + \beta_{22}(;)\varepsilon''_{ij}, \\ (;) = \left(I'_1, I''_1, I'_2, I''_2, I_{12}\right), \end{gathered} \tag{8}$$

$$I'_1 = \varepsilon'_{ii}, I''_1 = \varepsilon''_{ii}, I'_2 = \varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij}, I''_2 = \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{ij}, I_{12} = \varepsilon'_{ij}\varepsilon''_{ij}. \tag{9}$$

Враховуючи, що

$$\frac{\partial I'_1}{\partial \varepsilon'_{ij}} = \delta_{ij}, \frac{\partial I''_1}{\partial \varepsilon''_{ij}} = \delta_{ij}, \frac{\partial I'_2}{\partial \varepsilon'_{ij}} = 2\varepsilon'_{ij}, \frac{\partial I''_2}{\partial \varepsilon''_{ij}} = 2\varepsilon''_{ij}, \frac{\partial I_{12}}{\partial \varepsilon'_{ij}} = \varepsilon''_{ij}, \frac{\partial I_{12}}{\partial \varepsilon''_{ij}} = \varepsilon'_{ij},$$

отримаємо

$$A\left[\beta_{ij}\right] = I_1'\frac{\partial\beta_{ij}}{\partial I_1''} + 2I_{12}\frac{\partial\beta_{ij}}{\partial I_2''} + \left(I_2' - I_2''\right)\frac{\partial\beta_{ij}}{\partial I_{12}} - I_1''\frac{\partial\beta_{ij}}{\partial I_1'} - 2I_{12}\frac{\partial\beta_{ij}}{\partial I_2'}, \tag{10}$$

тобто $A\left[\beta_{ij}\right]$ $\left(i = 0,1,2,\ j = 1,2\right)$ також є функцією інваріантів (9) . Крім того, $A\left[\varepsilon_{ij}'\right] = -\varepsilon_{ij}''$, $A\left[\varepsilon_{ij}''\right] = \varepsilon_{ij}'$. Підставивши залежності (8) в рівняння (7) і прирівнявши скалярні коефіцієнти при $\delta_{ij}, \varepsilon_{ij}'$ і ε_{ij}'', отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \beta_{01} = A\left[\beta_{02}\right], \\ \beta_{02} = -A\left[\beta_{01}\right], \\ \beta_{11} = \beta_{22} + A\left[\beta_{12}\right], \\ \beta_{22} = \beta_{11} - A\left[\beta_{21}\right], \\ \beta_{12} = -\beta_{21} - A\left[\beta_{11}\right], \\ \beta_{21} = -\beta_{12} + A\left[\beta_{22}\right]. \end{cases} \tag{11}$$

Розглянемо рівняння $A\left[\beta\right] = 0$, де β-функція інваріантів (9). З (10) слідує, що цьому рівнянню відповідає характеристична система

$$\frac{dI_1''}{I_1'} = \frac{dI_2''}{2I_{12}} = \frac{dI_{12}}{I_2' - I_2''} = \frac{dI_1'}{-I_1''} = \frac{dI_2'}{-2I_{12}}.$$

Першими інтегралами цієї системи є

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(I_1'^2 + I_1''^2\right),\ I_2 = \frac{1}{2}\left(I_2' + I_2''\right),$$
$$J_1 = \frac{1}{4}\left(I_1'^2 I_2' + I_1''^2 I_2'' + 2I_1' I_1'' I_{12}\right),\ J_2 = \frac{1}{4}\left(I_2'^2 + I_2''^2 + 2I_{12}^2\right). \tag{12}$$

Тому загальним розв'язком рівняння $A\left[\beta\right] = 0$ є довільна диференційована функція від I_1, I_2, J_1, J_2. З 3-го і 4-го та 5-го і 6-го рівнянь системи (11) слідує $A\left[\beta_{12} - \beta_{21}\right] = 0$ і $A\left[\beta_{11} + \beta_{22}\right] = 0$.Тому функції

$$2\mu' = \beta_{11} + \beta_{22},\ 2\mu'' = \beta_{12} - \beta_{21} \tag{13}$$

є функціями величин (12). Для знаходження загального розв'язку системи (11) зробимо заміну змінних. В якості нових змінних візьмемо I_1, I_2, J_1, J_2 і функцію $J\left(I_1', I_1'', I_2', I_2'', I_{12}\right)$, яку виберемо так, щоб вираз для $A\left[\beta\right]$ набув найпростішого вигляду. Оператор $A\left[\beta\right]$, виражений через нові змінні, позначимо $A_1\left[\beta\right]$. Враховуючи властивості (6), будемо мати

$$A_1\left[\beta\right] = \frac{\partial\beta}{\partial I_1}A\left[I_1\right] + \frac{\partial\beta}{\partial I_2}A\left[I_2\right] + \frac{\partial\beta}{\partial J_1}A\left[J_1\right] + \frac{\partial\beta}{\partial J_2}A\left[J_2\right] + \frac{\partial\beta}{\partial J}A\left[J\right] = \frac{\partial\beta}{\partial J}A\left[J\right].$$

Нехай J залежить тільки від I_1', I_1'' і задовольняє рівняння $A\left[J\right] = 1$, тобто $I_1'\frac{\partial J}{\partial I_1''} - I_1''\frac{\partial J}{\partial I_1'} = 1$.

Загальний розв'язок цього рівняння $J = arcsin\frac{I_1''}{\sqrt{I_1'^2 + I_1''^2}} + g\left(I_1'^2 + I_1''^2\right)$, де g - довільна диференційована функція. Візьмемо $g \equiv 0$. Функція

$$J = arcsin\frac{I_1''}{\sqrt{I_1'^2 + I_1''^2}}. \tag{14}$$

функціонально незалежна з I_1, I_2, J_1, J_2 так як задовольняє рівняння $A\left[J\right] = 1$. Отже, $A_1\left[\beta\right] = \frac{\partial\beta}{\partial J}$.

Для функцій β_{01}, β_{02}, $F = \beta_{12} + \beta_{21}$, $G = \beta_{11} - \beta_{22}$ з системи (11) отримаємо

$$\frac{\partial\beta_{02}}{\partial J} = \beta_{01},\ \frac{\partial\beta_{01}}{\partial J} = -\beta_{02},\ \frac{\partial F}{\partial J} = 2G,\ \frac{\partial G}{\partial J} = -2F, \tag{15}$$

звідки знаходимо

$$\beta_{02} = C_1 \sin J + C_2 \cos J,\ \beta_{01} = C_1 \cos J - C_2 \sin J,$$
$$F = C_3 \sin 2J + C_4 \cos 2J,\ G = C_3 \cos 2J - C_4 \sin 2J,$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 - довільні диференційовані функції від інваріантів (12). Замінюючи J за формулою (14) і враховуючи (13), отримаємо загальний розв'язок системи (11) у вигляді

$$\beta_{01} = \lambda' I_1' - \lambda'' I_1'',\ \beta_{02} = \lambda' I_1'' + \lambda'' I_1',$$
$$\beta_{11} = \mu' + \eta'\left(I_1'^2 - I_1''^2\right) - 2\eta'' I_1' I_1'',\ \beta_{12} = \mu'' + 2\eta' I_1' I_1'' + \eta''\left(I_1'^2 - I_1''^2\right),$$
$$\beta_{21} = -\mu'' + 2\eta' I_1' I_1'', + \eta''\left(I_1'^2 - I_1''^2\right),\ \beta_{22} = \mu' - \eta'\left(I_1'^2 - I_1''^2\right) + 2\eta'' I_1' I_1'',$$

де λ', λ'', μ', μ'', η', η'' -функції від інваріантів (12). Залежності (8) можна представити у вигляді

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}' &= \left(\lambda' I_1' - \lambda'' I_1''\right)\delta_{ij} + \left(\mu' + \eta'\left(I_1'^2 - I_1''^2\right) - 2\eta'' I_1' I_1''\right)\varepsilon_{ij}' + \\ &\quad + \left(-\mu'' + 2\eta' I_1' I_1'' + \eta''\left(I_1'^2 - I_1''^2\right)\right)\varepsilon_{ij}'', \\ \sigma_{ij}'' &= \left(\lambda' I_1'' + \lambda'' I_1'\right)\delta_{ij} + \left(\mu'' + 2\eta' I_1' I_1'' + \eta''\left(I_1'^2 - I_1''^2\right)\right)\varepsilon_{ij}' + \\ &\quad + \left(\mu' - \eta'\left(I_1'^2 - I_1''^2\right) + 2\eta'' I_1' I_1''\right)\varepsilon_{ij}'',\end{aligned} \tag{16}$$

або в комплексній формі

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\lambda}\tilde{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij} + \tilde{\mu}\tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\eta}\tilde{\varepsilon}_{kk}^2\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij}\ , \tag{17}$$

де

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}' + \sqrt{-1}\sigma_{ij}'',\ \tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}' + \sqrt{-1}\varepsilon_{ij}'',\ \tilde{\lambda} = \lambda' + \sqrt{-1}\lambda'',\ \tilde{\mu} = \mu' + \sqrt{-1}\mu'',$$
$$\tilde{\eta} = \eta' + \sqrt{-1}\eta'',\ \bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \varepsilon_{ij}' - \sqrt{-1}\varepsilon_{ij}''.$$

Для величин

$$\overline{D} = \sigma_{ij}''\varepsilon_{ij}' - \sigma_{ij}'\varepsilon_{ij}'',\ \overline{\Pi} = \sigma_{ij}'\varepsilon_{ij}' + \sigma_{ij}''\varepsilon_{ij}''\ ,$$

які, як відомо [2,3], характеризують дисиповану та накопичену механічну енергію, з врахуванням (16), можна записати

$$\begin{aligned}\overline{D} &= 2\lambda'' I_1 + 2\mu'' I_2 + 2\eta'\left(I_1' I_1''\left(I_2' - I_2''\right) - I_{12}\left(I_1'^2 - I_1''^2\right)\right) + \eta''\left(4I_1' I_1'' I_{12} + \left(I_1'^2 - I_1''^2\right)\left(I_2' - I_2''\right)\right), \\ \overline{\Pi} &= 2\lambda' I_1 + 2\mu' I_2 + \eta'\left(4I_1' I_1'' I_{12} + \left(I_1'^2 - I_1''^2\right)\left(I_2' - I_2''\right)\right) - 2\eta''\left(I_1' I_1''\left(I_2' - I_2''\right) - I_{12}\left(I_1'^2 - I_1''^2\right)\right),\end{aligned} \tag{18}$$

де

$$\begin{aligned}4I_1' I_1'' I_{12} + \left(I_1'^2 - I_1''^2\right)\left(I_2' - I_2''\right) &= 8J_1 - 4I_1 I_2\,, \\ \left(I_1' I_1''\left(I_2' - I_2''\right) - I_{12}\left(I_1'^2 - I_1''^2\right)\right)^2 &= 8I_1^2\left(J_2 - I_2^2\right) + 16J_1\left(I_1 I_2 - J_1\right).\end{aligned} \tag{19}$$

Розглянемо деякі частинні випадки.

Для нестискуваного матеріалу $\left(\tilde{\varepsilon}_{kk} = 0\right)$ залежність (17) набуває вигляду $\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\mu}\tilde{\varepsilon}_{ij}$.

У випадку монофазної деформації $\varepsilon_{ij}'' = \alpha\varepsilon_{ij}'$ ($\alpha = const$), $\dfrac{\tilde{\varepsilon}_{kk}^2\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij}}{\tilde{\varepsilon}_{ij}} = 2I_1$, (по i, j не сумувати) і (17) має вигляд $\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\lambda}\tilde{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij} + \left(\tilde{\mu} + 2I_1\tilde{\eta}\right)\tilde{\varepsilon}_{ij}$.

Отже, в розглянутих частинних випадках концепція амплітуднозалежних комплексних модулів має місце. В загальному випадку ця концепція, як видно з (17), не виконується.

Апроксимуємо рівняння (16) рівняннями виду

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}_{ij}' &= \left(\overline{\lambda}' I_1' - \overline{\lambda}'' I_1''\right)\delta_{ij} + \overline{\mu}'\varepsilon_{ij}' - \overline{\mu}''\varepsilon_{ij}''\ , \\ \overline{\sigma}_{ij}'' &= \left(\overline{\lambda}' I_1'' + \overline{\lambda}'' I_1'\right)\delta_{ij} + \overline{\mu}'\varepsilon_{ij}'' + \overline{\mu}''\varepsilon_{ij}'\ ,\end{aligned} \tag{20}$$

в яких величини $\overline{\lambda}', \overline{\lambda}'', \overline{\mu}', \overline{\mu}''$ вважаються функціями аргументів $I_1', I_1'', I_2', I_2'', I_{12}$. Знайдемо ці функції з умови мінімуму величини

$$\Sigma = \left(\sigma_{ij}' - \overline{\sigma}_{ij}'\right)\left(\sigma_{ij}' - \overline{\sigma}_{ij}'\right) + \left(\sigma_{ij}'' - \overline{\sigma}_{ij}''\right)\left(\sigma_{ij}'' - \overline{\sigma}_{ij}''\right).$$

Розв’язавши систему рівнянь

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial\overline{\lambda}'} = 0,\ \frac{\partial\Sigma}{\partial\overline{\lambda}''} = 0,\ \frac{\partial\Sigma}{\partial\overline{\mu}'} = 0,\ \frac{\partial\Sigma}{\partial\overline{\mu}''} = 0\,,$$

відносно величин $\overline{\lambda}', \overline{\lambda}'', \overline{\mu}', \overline{\mu}''$, з врахуванням (19), можна показати, що ці величини є функціями набору аргументів I_1, I_2, J_1, J_2 (12).

Отже, в межах точності, яку забезпечує метод найменших квадратів при апроксимації рівнянь (16) рівняннями (20), можна користуватися наближеними рівняннями стану

$$\sigma_{ij}' \approx \overline{\sigma}_{ij}',\ \sigma_{ij}'' \approx \overline{\sigma}_{ij}''\ .$$

Крім того, можна показати, що апроксимація (20) не змінює характеристик накопичення та дисипації енергії (18), вирази для яких можна записати в такому ж вигляді, як і в лінійній теорії, але із змінними коефіцієнтами:

$$\overline{D} = 2\overline{\lambda}'' I_1 + 2\overline{\mu}'' I_2,$$
$$\overline{\Pi} = 2\overline{\lambda}' I_1 + 2\overline{\mu}' I_2.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Электротермовязкоупругость:Механика связанных полей в элементах конструкций.-К.:Наук.думка, 1988.-т.4.-320 с.
2. Михайленко В.В. До питання про дисипацію та накопичення електромеханічної енергії при коливаннях в’язкопружних п’єзоелектричних тіл // Вісник Київського ун-ту, серія: фіз.-мат. науки. - 1997.-С. 128-132.
3. Михайленко В.В. Общая структура амплитудных определяющих уравнений неупругих пьезоэлектрических тел при циклических электромеханических процессах. // Прикл. механика. – 1996. – 32, N 12. – С. 37-42.

ЛУЩИКОВ Олександр Володимирович – старший викладач кафедри математики Житомирського військового інституту радіоелектроніки

Наукові інтереси:

- механіка деформівного твердого тіла.

МИХАЙЛЕНКО Василь Васильович – доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри вищої математики Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

- механіка деформівного твердого тіла.

ФРАНОВСЬКИЙ Анатолій Цезарович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та інформатики Житомирського державного педагогічного університету.

Наукові інтереси:

- механіка деформівного твердого тіла.

Подано…………

А.В.Лущиков,В.В.Михайленко. К вопросу о концепции амплитуднозависимых комплексных модулей в механике неупругих изотропных тел.

Показано, что моногармоническое приближение колебаний неупругих изотропных тел в общем случае может быть описано в терминах амплитуднозависимых комплексных модулей в пределах точности, которую обеспечивает метод наименьших квадратов.

A.V. Lushchikov, V.V. Mikhailenko. To the question of conception of amplitude-depending complex modules in mechanics of non-elastic isotropic solids.

Monoharmonical approach of oscillations of non-elastic isotropic solids in general case can be described in terms of amplitude-depending complex modules with exactness of method of least squares.