УДК 539.376

В.Г. Карнаухов, д.ф.-м.н.
Інститут механіки НАН України
О.В.Лущиков, ст. викл.
Житомирський військовий інститут радіоелектроніки
В.В.Михайленко, д.ф.-м.н.
Житомирський інженерно-технологічний інститут

НАБЛИЖЕНА ТЕОРІЯ ВИЗНАЧАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПРИ КОЛИВАННЯХ НЕПРУЖНИХ ІЗОТРОПНИХ ТІЛ

Пропонується наближена теорія амплітудних визначальних рівнянь, що описують коливання фізично нелінійних непружних ізотропних тіл при одночастотному навантаженні

При дослідженні коливань фізично нелінійних непружних тіл досить часто використовується одночастотне наближення таких коливань, коли тензори механічних деформацій і напружень апроксимуються рівностями [1,2,3]

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon'_{ij}\cos\omega t-\varepsilon''_{ij}\sin\omega t\,, \tag{1}$$

$$\sigma_{ij}=\sigma'_{ij}\cos\omega t-\sigma''_{ij}\sin\omega t\,. \tag{2}$$

При цьому визначальні рівняння між напруженнями та деформаціями в загальному випадку представляються у вигляді тензорних функцій

$$\sigma'_{ij}=\sigma'_{ij}\left(\varepsilon'_{kl},\varepsilon''_{kl}\right),\ \ \sigma''_{ij}=\sigma''_{ij}\left(\varepsilon'_{kl},\varepsilon''_{kl}\right), \tag{3}$$

які повинні задовольняти обмеженням, що накладаються типом симетрії матеріалу, умовою інваріантності відносно зсуву в часі [4], другим законом термодинаміки і, можливо, ряду інших обмежень.

Для ізотропних непружних матеріалів залежності (3) в припущенні їх квазілінійності, а також з врахуванням вказаних перших двох обмежень, приймають вигляд [5]:

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij}&=\left(\lambda' I'_1-\lambda'' I''_1\right)\delta_{ij}+\left(\mu'+Q\right)\varepsilon'_{ij}-\left(\mu''-P\right)\varepsilon''_{ij},\\ \sigma''_{ij}&=\left(\lambda' I''_1+\lambda'' I'_1\right)\delta_{ij}+\left(\mu''+P\right)\varepsilon'_{ij}+\left(\mu'-Q\right)\varepsilon''_{ij},\end{aligned} \tag{4}$$

де

$$P=2\eta' I'_1 I''_1+\eta''\left(I'^2_1-I''^2_1\right),\ Q=\eta'\left(I'^2_1-I''^2_1\right)-2\eta'' I'_1 I''_1\,, \tag{5}$$

а λ', λ'', μ', μ'', η', η'' - функції чотирьох інваріантів

$$\begin{aligned}&I_1=\frac{1}{2}\left(I'^2_1+I''^2_1\right),\ \ I_2=\frac{1}{2}\left(I'_2+I''_2\right),\\ &J_1=I'_1 I''_1 I_{12}+\frac{1}{4}\left(I'^2_1-I''^2_1\right)\left(I'_2-I''_2\right),\\ &J_2=\frac{1}{2}I'_1 I''_1\left(I'_2-I''_2\right)-\frac{1}{2}I_{12}\left(I'^2_1-I''^2_1\right),\end{aligned} \tag{6}$$

причому

$$I'_1=\varepsilon'_{ii}\,, I''_1=\varepsilon''_{ii}\,, I'_2=\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij}\,, I''_2=\varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{ij}\,, I_{12}=\varepsilon'_{ij}\varepsilon''_{ij}\,.$$

Характеристики дисипації та накопичення енергії в елементарному об’ємі тіла [6,7]

$$\overline{D}=\sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij}-\sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij}\,,\ \overline{U}=\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij}+\sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} \tag{7}$$

в термінах інваріантів (6) мають вигляд

$$\begin{aligned}\overline{D}&=2\lambda'' I_1+2\mu'' I_2-4\eta' J_2+4\eta'' J_1,\\ \overline{U}&=2\lambda' I_1+2\mu' I_2+4\eta' J_1+4\eta'' J_2.\end{aligned}$$

З іншого боку, в роботі [8] показано, що умова інваріантності відносно зсуву в часі приводить до того, що залежності (3) в загальному випадку представляються у вигляді

$$\sigma'_{ij}=\frac{\partial U}{\partial\varepsilon'_{ij}}-\frac{\partial D}{\partial\varepsilon''_{ij}}+g'_{ij}\,,\ \sigma''_{ij}=\frac{\partial U}{\partial\varepsilon''_{ij}}+\frac{\partial D}{\partial\varepsilon'_{ij}}+g''_{ij}.$$

Потенціали U і D знаходяться за енергетичними характеристиками (7), вираженими як функції деформацій, за формулами

$$U=\int_0^1 \overline{U}\left(\lambda\varepsilon'_{ij},\lambda\varepsilon''_{ij}\right)\frac{d\lambda}{\lambda},\ D=\int_0^1 \overline{D}\left(\lambda\varepsilon'_{ij},\lambda\varepsilon''_{ij}\right)\frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{8}$$

Складові g'_{ij}, g''_{ij} внеску в накопичення і дисипацію енергії не дають. Необхідними і достатніми умовами тотожньої рівності нулю цих складових є такі умови симетрії:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial\varepsilon'_{kl}}-\frac{\partial\sigma''_{ij}}{\partial\varepsilon''_{kl}}=\frac{\partial\sigma'_{kl}}{\partial\varepsilon'_{ij}}-\frac{\partial\sigma''_{kl}}{\partial\varepsilon''_{ij}},\\&\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial\varepsilon''_{kl}}+\frac{\partial\sigma''_{ij}}{\partial\varepsilon'_{kl}}=\frac{\partial\sigma'_{kl}}{\partial\varepsilon''_{ij}}+\frac{\partial\sigma''_{kl}}{\partial\varepsilon'_{ij}}.\end{aligned} \tag{9}$$

В класичній континуальній механіці величинами g'_{ij}, g''_{ij}, як правило, нехтується. Зокрема, в рамках загальної кратноінтегральної теорії в'язкопружності ці величини тотожньо дорівнюють нулю, якщо для ядер цієї теорії постулюється ✂принцип взаємності✂ [9].

В звязку з цим в даній роботі за основні приймаються такі визначальні рівняння:

$$\sigma'_{ij}=\frac{\partial U}{\partial\varepsilon'_{ij}}-\frac{\partial D}{\partial\varepsilon''_{ij}},\ \sigma''_{ij}=\frac{\partial U}{\partial\varepsilon''_{ij}}+\frac{\partial D}{\partial\varepsilon'_{ij}}. \tag{10}$$

Для ізотропних матеріалів в рамках квазілінійного наближення потенціали U і D, як і коефіцієнти в рівняннях (4), є функціями інваріантів (6).

В деяких роботах [1,2,10] залежності (3) використовуються у формі так званої концепції амплітуднозалежних комплексних модулів, суть якої в тому, що рівняння стану (3) з врахуванням позначень

$$\tilde{\sigma}_{ij}=\sigma'_{ij}+\sqrt{-1}\sigma''_{ij},\ \tilde{\varepsilon}_{ij}=\varepsilon'_{ij}+\sqrt{-1}\varepsilon''_{ij},\ \tilde{\lambda}=\lambda'+\sqrt{-1}\lambda'',\ \tilde{\mu}=\mu'+\sqrt{-1}\mu''$$

можна записати, як і в лінійній теорії, у вигляді

$$\tilde{\sigma}_{ij}=\tilde{\lambda}\tilde{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij}+\tilde{\mu}\tilde{\varepsilon}_{ij} \tag{11}$$

(в (4) $P=0,\ Q=0$), де комплексні модулі $\tilde{\lambda},\ \tilde{\mu}$ є функціями інваріантів $I_1,\ I_2$.Причому теоретичне обгрунтування цієї концепції проведено лише для випадку монофазного (простого) деформування [10]. В цьому випадку в (6) $J_1=I_1I_2,\ J_2=0$.

Дана робота присвячена знаходженню точних математичних умов, при яких рівняння (10) в квазілінійному наближенні потенціалів U, D для ізотропних матеріалів можна представити у вигляді концепції амплітуднозалежних комплексних модулів у випадку немонофазного деформування. Сформулюємо основний результат даної роботи у вигляді теореми.

Теорема. Рівняння стану (10) можна представити у вигляді концепції амплітуднозалежних комплексних модулів тоді і тільки тоді, коли комплексний потенціал $U+\sqrt{-1}D$ є аналітичною функцією комплексного аргументу $J_1+\sqrt{-1}J_2$, яка параметрично залежить від інваріантів $I_1,\ I_2$.

Доведення. Достатність. Рівняння (10) після простих, але громіздких перетворень можна представити у вигляді (4), де

$$\lambda'=\frac{\partial U}{\partial I_1}+\left(\frac{\partial U}{\partial J_1}+\frac{\partial D}{\partial J_2}\right)\frac{J_1}{I_1}-\left(\frac{\partial D}{\partial J_1}-\frac{\partial U}{\partial J_2}\right)\frac{J_2}{I_1},\ \ \mu'=\frac{\partial U}{\partial I_2},$$

$$\lambda''=\frac{\partial D}{\partial I_1}+\left(\frac{\partial U}{\partial J_1}+\frac{\partial D}{\partial J_2}\right)\frac{J_2}{I_1}+\left(\frac{\partial D}{\partial J_1}-\frac{\partial U}{\partial J_2}\right)\frac{J_1}{I_1},\ \ \mu''=\frac{\partial D}{\partial I_2},$$

$$P=\left(\frac{\partial U}{\partial J_1}-\frac{\partial D}{\partial J_2}\right)I'_1I''_1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial J_2}+\frac{\partial D}{\partial J_1}\right)\left(I_1'^2-I_1''^2\right),$$

$$Q=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial J_1}-\frac{\partial D}{\partial J_2}\right)\left(I_1'^2-I_1''^2\right)-\left(\frac{\partial U}{\partial J_2}+\frac{\partial D}{\partial J_1}\right)I'_1I''_1.$$

Звідси видно, що якщо

$$\frac{\partial U}{\partial J_1}=\frac{\partial D}{\partial J_2},\ \ \frac{\partial U}{\partial J_2}=-\frac{\partial D}{\partial J_1},$$

тобто функція $U+\sqrt{-1}D$ є аналітичною функцією комплексної змінної $J_1+\sqrt{-1}J_2$, то концепція амплітуднозалежних комплексних модулів має місце, тобто $P=0,\ Q=0$. При цьому

$$\lambda' = \frac{\partial U}{\partial I_1} + 2\frac{\partial U}{\partial J_1}\frac{J_1}{I_1} + 2\frac{\partial U}{\partial J_2}\frac{J_2}{I_1}, \quad \mu' = \frac{\partial U}{\partial I_2},$$
$$\lambda'' = \frac{\partial D}{\partial I_1} + 2\frac{\partial D}{\partial J_1}\frac{J_1}{I_1} + 2\frac{\partial D}{\partial J_2}\frac{J_2}{I_1}, \quad \mu'' = \frac{\partial D}{\partial I_2}. \qquad (12)$$

Із (12), зокрема, випливає, що комплексні модулі $\tilde{\lambda} = \lambda' + \sqrt{-1}\lambda''$ і $\tilde{\mu} = \mu' + \sqrt{-1}\mu''$ є аналітичними функціями змінної $J_1 + \sqrt{-1}J_2$. Аналітичною функцією цієї змінної є також комплексна характеристика $\bar{U} + \sqrt{-1}\bar{D}$, очскільки при $P = 0,\ Q = 0$ із (5) випливає, що $\eta' = 0,\ \eta'' = 0$.

Необхідність.Припустимо, що концепція амплітуднозалежних комплексних модулів має місце, тобто справедливі рівняння стану (11) або

$$\sigma'_{ij} = (\lambda' I'_1 - \lambda'' I''_1)\delta_{ij} + \mu'\varepsilon'_{ij} - \mu''\varepsilon''_{ij},$$
$$\sigma''_{ij} = (\lambda' I''_1 + \lambda'' I'_1)\delta_{ij} + \mu'\varepsilon''_{ij} + \mu''\varepsilon'_{ij}, \qquad (13)$$

де $\lambda', \lambda'', \mu', \mu''$ залежать від I_1, I_2, J_1, J_2. Оскільки основними рівняннями є рівняння (10), то залежності (13) слід вважати такими, що представляються в потенціальній формі (10). Це означає, що для них повинні виконуватись умови (9). Якщо підставити (13) в (9) і прирівняти скалярні коефіцієнти при $\varepsilon'_{kl}\delta_{ij} - \varepsilon'_{ij}\delta_{kl}$, $\varepsilon''_{kl}\delta_{ij} - \varepsilon''_{ij}\delta_{kl}$, $\varepsilon''_{kl}\varepsilon'_{ij} - \varepsilon''_{ij}\varepsilon'_{kl}$, то отримаємо систему рівнянь, з якої знаходимо умови

$$\frac{\partial\mu'}{\partial J_1} = \frac{\partial\mu''}{\partial J_2}, \quad \frac{\partial\mu'}{\partial J_2} = -\frac{\partial\mu''}{\partial J_1}, \quad \frac{\partial\lambda'}{\partial J_1} = \frac{\partial\lambda''}{\partial J_2}, \quad \frac{\partial\lambda'}{\partial J_2} = -\frac{\partial\lambda''}{\partial J_1},$$
$$\frac{\partial\lambda'}{\partial I_2} = \frac{\partial\mu'}{\partial I_1} + 2\frac{\partial\mu'}{\partial J_1}\frac{J_1}{I_1} + 2\frac{\partial\mu'}{\partial J_2}\frac{J_2}{I_1}, \quad \frac{\partial\lambda''}{\partial I_2} = \frac{\partial\mu''}{\partial I_1} + 2\frac{\partial\mu''}{\partial J_1}\frac{J_1}{I_1} + 2\frac{\partial\mu''}{\partial J_2}\frac{J_2}{I_1}, \qquad (14)$$

Умови (14) означають, що функції $\lambda' + \sqrt{-1}\lambda''$ і $\mu' + \sqrt{-1}\mu''$ є аналітичними функціями змінної $J_1 + \sqrt{-1}J_2$. Оскільки при $P = 0,\ Q = 0$ з (5) слідує, що і $\eta' = 0,\ \eta'' = 0$, то функція $\bar{U} + \sqrt{-1}\bar{D}$ також є аналітичною функцією змінної $J_1 + \sqrt{-1}J_2$, а з (8) слідує аналітичність комплексного потенціалу $U + \sqrt{-1}D$. Теорему доведено. Відмітимо, що дві останні рівності (14) легко отримати, скориставшись співвідношеннями (12).

На основі представлених результатів пропонується така наближена теорія амплітудних визначальних рівнянь одночастотного наближення коливань непружних фізично нелінійних ізотропних тіл при моногармонічному навантаженні: комплексна характеристика накопичення та дисипації механічної енергії в елементарному об'ємі тіла $\bar{U} + \sqrt{-1}\bar{D}$ апроксимується аналітичною функцією комплексної змінної $J_1 + \sqrt{-1}J_2$, що параметрично залежить також від інваріантів I_1, I_2 із (6). Після експериментального знаходження в межах даної апроксимації функції $\bar{U} + \sqrt{-1}\bar{D}$ визначається комплексний потенціал $U + \sqrt{-1}D$ згідно з формулами (8). Амплітудні визначальні рівняння приймають вигляд (11) або (13), коефіцієнти в яких, як функції інваріантів (6) I_1, I_2, J_1, J_2, знаходяться за формулами (12).

Запропонована теорія дозволяє описувати процеси немонофазного деформування ізотропних непружних тіл, що є особливо актуальним в тих випадках, коли матеріалу притаманні значні дисипативні властивості. Якщо припустити, що комплексний потенціал $U + \sqrt{-1}D$ не залежить від $J_1 + \sqrt{-1}J_2$ (в цьому випадку він є аналітичною функцією як постійна величина), а є функцією лише інваріантів I_1, I_2, то отримаємо побудовану в [10] теорію, що не враховує немонофазність деформування.

Із наведеного вище випливає, що основним питанням в запропонованій теорії є питання про експериментальне визначення функції $\bar{U} + \sqrt{-1}\bar{D}$. Зрозуміло, що це можна зробити лише в межах тієї чи іншої гіпотези, яка дозволяє переносити результати одновимірних експериментів на складний напружено–деформований стан.

ЛІТЕРАТУРА

1. Карнаухов В.Г., Сенченков И.К., Гуменюк Д.П. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении. – Киев: Наук.думка, 1985.-288 с.
2. Термомеханика эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении / В.Н. Потураев, В.И. Дырда, В.Г. Карнаухов и др.- Киев: Наук.думка, 1987.- 288с.
3. Пальмов В.А. Колебания упругопластических тел.- М.:Наука, 1976.-328с.
4. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Электротермовязкоупругость: Механика связанных полей в элементах конструкций.-К.:Наук.думка, 1988.-т.4.-320 с.

5. Лущиков О.В., Михайленко В.В., Франовський А.Ц. До питання про концепцію амплітуднозалежних комплексних модулів в механіці непружних ізотропних матеріалів // Вісник ЖІТІ – 2001.- №19.- С.22-25.
6. Михайленко В.В. До питання про дисипацію та накопичення електромеханічної енергії при коливаннях в'язкопружних п'єзоелектричних тіл // Вісник Київського ун-ту, серія: фіз.-мат. науки. - 1997.-С. 128-132.
7. Михайленко В.В. Общая структура амплитудных определяющих уравнений неупругих пьезоэлектрических тел при циклических электромеханических процессах. // Прикл. механика. – 1996. – 32, N 12. – С. 37-42.
8. Михайленко В.В. Лущиков А.В., Якименко С.Н. Определяющие уравнения для неупругих физически нелинейных пьезоэлектрических тел при гармоническом электромеханическом нагружении // Збірник наукових праць КДТУ.- Випуск 10.- Кіровоград, КДТУ, 2001.-С.175-185.
9. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.:Наука, 1970.- 280с.
10. Сенченков И.К., Карнаухов В.Г.,Козлов В.И.,Червинко О.П. К вопросу о простом деформировании в задачах о колебаниях и разогреве нелинейных вязкоупругих тел // Прикл. механика.- 1986.-22, №9.- С.82-90.

МИХАЙЛЕНКО Василь Васильович – доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри вищої математики Житомирського інженерно-технологічного інституту.
Наукові інтереси:
- механіка деформівного твердого тіла.

КАРНАУХОВ Василь Гаврилович – доктор фізико-математичних наук, завідувач відділом термопружності Інституту механіки НАН України.
Наукові інтереси:
- механіка деформівного твердого тіла.

ЛУЩИКОВ Олександр Володимирович – старший викладач кафедри математики Житомирського військового інституту радіоелектроніки
Наукові інтереси:
- механіка деформівного твердого тіла.

Подано…………

В.В.Михайленко, В.Г.Карнаухов, А.В.Лущиков. Приближенная теория определяющих уравнений при колебаниях неупругих изотропных тел при моногармоническом негружении
Предлагается приближенная теория амплитудных определяющих уравнений,описывающая колебания физически нелинейных неупругих изотропных тел при одночастотном нагружении.

V.V. Mikhailenko, V.G.Karnauhov A.V. Lushchikov. Approximate theory of determining equations for oscillations of non-elastic isotropic solids under monoharmonical loading.
Approximate theory of determining equations describing oscillations of non-linear non-elastic isotropic solids under monoharmonical loading is proposed.