УДК 539.376

Михайленко В.В., Лущиков А.В., Якименко С.Н.

Визначальні рівняння для непружних п’єзоелектричних тіл при гармонічних навантаженнях

Определяющие уравнения для неупругих физически нелинейных пьезоэлектрических тел при гармоническом электромеханическом нагружении

Основным вопросом при постановке задач о колебаниях физически нелинейных неупругих тел является вопрос об амплитудных определяющих уравнениях. В большинстве работ по данной тематике амплитудные уравнения получаются в результате применения методов Галеркина и эквивалентной линеаризации к общим определяющим уравнениям. В монографии [3] предложен другой подход к построению амплитудных определяющих уравнений, ориентированный на колебательные процессы. Согласно этому подходу амплитуды зависимых переменных, например механических напряжений и индукции электрического поля рассматриваются как тензорные функции независимых переменных, например деформаций и напряженности электрического поля, а затем используются различного рода представления этих функций. Далее требуется, чтобы получаемые таким образом соотношения удовлетворяли ограничениям, накладываемым вторым законом термодинамики, условиям инвариантности амплитуд относительно временного сдвига и, возможно, ряду условий более частного характера.

В настоящей работе второй подход используется в измененном варианте, а именно, амплитуды зависимых переменных также формально записываются в виде тензорных функций амплитуд независимых переменных, затем, на основе теоремы о разложении векторных полей, термодинамических ограничений и условия инвариантности амплитуд относительно временного сдвига обосновывается возможность представления амплитудных определяющих уравнений через потенциалы. После этого могут использоваться те или иные представления, но уже не тензорных, а скалярных функций амплитуд независимых переменных.

Представим приведенное диссипативное неравенство термоэлектромеханики в виде системы неравенств Планка и Фурье [3]

$$-\dot{\Phi} - \eta\dot{\Theta} + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + E_i D_i = D'_{эм} \geq 0 \tag{1}$$

$$-h_j \Theta_{,j} \geq 0, \tag{2}$$

где Φ-свободная энергия; $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$-напряжения и деформация; η, Θ -энтропия и температура; E_j, D_j - напряженность и индукция электрического поля; h_j-тепловой поток; $D'_{эм}$ -скорость электромеханической диссипации энергии; точка означает дифференцирование по времени, а запятая перед индексом – по координате. Если уравнение состояния для теплового потока выбрать в форме закона Фурье, то неравенство (2) будет удовлетворяться автоматически.

Пусть в результате воздействия гармонической электромеханической нагрузки с круговой частотой ω в пьезоэлектрическом теле устанавливается напряженно-деформированное и электрическое состояние вида

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij} = \sigma'_{ij}\cos\omega t - \sigma''_{ij}\sin\omega t, \varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij}\cos\omega t - \varepsilon''_{ij}\sin\omega t, \\ &E_j = E'_j\cos\omega t - E''_j\sin\omega t, D_j = D'_j\cos\omega t - D''_j\sin\omega t. \end{aligned} \tag{3}$$

Считая, что температура за цикл изменяется очень мало, подставим (3) в (1) и усредним за цикл полученное соотношение. Тогда для усредненной за цикл диссипативной функции получим выражение

$$D' = \langle D'_{эм} \rangle = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} D'_{эм} dt = \frac{\omega}{2}\left(\sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij} + E''_j D'_j - E'_j D''_j\right). \tag{4}$$

Таким образом, при предположении о колебательном характере напряжений, деформаций, напряженности и индукции электрического поля (3) усредненная за цикл диссипативная функция полностью электромеханически определима, т. е. определяется связью между $\sigma'_{ij}, \sigma''_{ij}, E'_{ij}, E''_{ij}, \varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij}, D'_j, D''_j$. Для установления этой связи можно из неравенства (1) путем той или иной аппроксимации функционала $\Phi = \hat{\Phi}$ получить некоторые определяющие уравнения для напряжений $\sigma_{ij} = \hat{\sigma}_{ij}$ и напряженности $E_j = \hat{E}_j$ электрического поля. Применяя к полученным функционалам процедуру усреднения Галеркина с учетом (3), можно найти связь между амплитудами

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= \sigma'_{ij}(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k), \sigma''_{ij} = \sigma''_{ij}(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k), \\ E'_j &= E'_j(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k), E''_j = E''_j(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k). \end{aligned} \tag{5}$$

Вместе с тем, любая конкретизация общих функционалов представляет собой достаточно сложную проблему и осуществима только на основе всей накопленной для данного материала экспериментально-теоретической информации, куда более шире той, которая требуется для описания реакции материала на циклические истории типа (3). Поэтому усреднение по Галеркину является прежде всего одним из возможных способов теоретического исследования структуры амплитудных определяющих уравнений (5) в рамках той или иной термодинамической теории пьезоэлектрической среды. Так, в монографии [3] с его помощью рассмотрены специфические особенности амплитудных уравнений для сред типа Фойгта, с внутренними переменными, с затухающей памятью, а также среды, описываемой тензорно-линейными (квазилинейными) соотношениями электровязкоупругости. В работах [6,7] усреднение по Галеркину применяется к соотношениям общей кратноинтегральной теории электровязкоупругости [3], которая строится на основе тех же эвристических соображений, что и чисто механическая теория [2,4]. Использование кратноинтегральных соотношений позволило установить некоторые общие специфические особенности амплитудных связей (5). В частности, в [4,7] показано, что если для ядер кратноинтегральной теории постулировать выполнение принципа взаимности [2], т. е. считать, что они имеют такую же симметрию относительно перестановки индексов, что и соответствующие коэффициенты нелинейной электроупругой среды, то моногармоническое поведение вязкоупругого пьезоэлектрического материала полностью определяется двумя интегральными (энергетическими) характеристиками, одна из которых, общая для всех возможных наборов независимых переменных, характеризует среднюю за цикл мощность диссипации (4), а другая, своя для каждого набора, - консервативные свойства материала. Отметим, что постановка этого вопроса и его решение для некоторых частных механических моделей представлены в монографиях [5,9]. Сказанное выше математически конкретизируется представлением амплитудных определяющих уравнений в потенциалах

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= \frac{\partial U}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon''_{ij}}, \sigma''_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon''_{ij}} + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon'_{ij}}, \\ E'_k &= \frac{\partial U}{\partial D'_k} - \frac{\partial D}{\partial D''_k}, E''_k = \frac{\partial U}{\partial D''_k} + \frac{\partial D}{\partial D'_k}. \end{aligned} \tag{6}$$

Потенциалы U, D однозначно определяются по энергетическим характеристикам

$$\overline{U} = \sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} + E'_k D'_k + E''_k D''_k, \tag{7}$$

$$\overline{D} = \frac{2}{\omega} D' = \sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij} + E''_k D'_k - E'_k D''_k, \tag{8}$$

для чего эти последние необходимо представить как функции независимых переменных с набором аргументов

$$\Gamma_{ijkl} = \varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{kl} + \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{kl}, \Gamma_{ijk} = \varepsilon'_{ij}D'_k + \varepsilon''_{ij}D''_k, \Gamma_{kl} = D'_k D'_l + D''_k D''_l \tag{9}$$

и выполнить интегрирование согласно формулам

$$U = \int_0^1 \overline{U}(\lambda\varepsilon'_{ij}, \lambda\varepsilon''_{ij}, \lambda D'_k, \lambda D''_k)\frac{d\lambda}{\lambda}, \quad D = \int_0^1 \overline{D}(\lambda\varepsilon'_{ij}, \lambda\varepsilon''_{ij}, \lambda D'_k, \lambda D''_k)\frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{10}$$

Для среды с конкретной симметрией строения зависимости $\overline{U}\left(\varepsilon'_{ij},\varepsilon''_{ij},D'_k,D''_k\right)$, $\overline{D}\left(\varepsilon'_{ij},\varepsilon''_{ij},D'_k,D''_k\right)$ а следовательно, и зависимости $U\left(\varepsilon'_{ij},\varepsilon''_{ij},D'_k,D''_k\right),D\left(\varepsilon'_{ij},\varepsilon''_{ij},D'_k,D''_k\right)$ реализуются через соответствующий набор инвариантов тензоров (9). Консервативные характеристики для других наборов независимых переменных $\left(\varepsilon_{ij},E_k\right)$, $\left(\sigma_{ij},E_k\right)$, $\left(\sigma_{ij},D_k\right)$ связаны с функцией (7) подобно тому , как связаны с внутренней энергией электроупругой среды другие электроупругие потенциалы. Например, величина

$$\overline{H}=\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij}+\sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij}-D'_kE'_k-D''_kE''_k \tag{11}$$

является амплитудным аналогом электрической энтальпии и используется совместно с мощностью диссипации (8) как характеристика моногармонического поведения материала при выборе в качестве независимых переменных деформаций ε_{ij} и напряженности электрического поля E_k . Уравнения в потенциалах имеют в этом случае вид

$$\begin{gathered}\sigma'_{ij}=\frac{\partial H}{\partial\varepsilon'_{ij}}-\frac{\partial D}{\partial\varepsilon''_{ij}},\sigma''_{ij}=\frac{\partial H}{\partial\varepsilon''_{ij}}+\frac{\partial D}{\partial\varepsilon'_{ij}},\\ D'_k=-\frac{\partial H}{\partial E'_k}+\frac{\partial D}{\partial E''_k},D''_k=-\frac{\partial H}{\partial E''_k}-\frac{\partial D}{\partial E'_k}.\end{gathered} \tag{12}$$

Если характеристики $\overline{H},\overline{D}$ известны, скажем, определены экспериментально, и записаны как функции аргументов типа (9), где D'_k,D''_k следует заменить на E'_k,E''_k, то нахождение потенциалов H,D проводится согласно формулам (10) с заменой $\overline{U}$ на $\overline{H}$, U на H и D'_k,D''_k на E'_k,E''_k. Уравнения в потенциалах являются амплитудными аналогами соответствующих уравнений электроупругости [1]. Потенциалы, кроме аргументов типа (9), являются также функциями частоты ω и , в общем случае, температуры. Если U,D - линейные функции величин (9) (квадратичные по $\varepsilon'_{ij},\varepsilon''_{ij}$, D'_k,D''_k), из (6) получаем амплитудные определяющие уравнения линейной теории.

Предположение о выполнении для ядер кратноинтегральных соотношений принципа взаимности , в рамках которого в [4,7] получены уравнения (6) или (12), является довольно жестким. А именно, оно накладывает на функции $U,D,\overline{U},\overline{D}$ как функции аргументов (9), ограничения в виде равенств

$$\frac{\partial^2U}{\partial\varepsilon'_{ij}\partial\varepsilon''_{kl}}=\frac{\partial^2U}{\partial\varepsilon''_{ij}\partial\varepsilon'_{kl}},\quad \frac{\partial^2U}{\partial D'_k\partial D''_l}=\frac{\partial^2U}{\partial D''_k\partial D'_l},\quad \frac{\partial^2U}{\partial\varepsilon'_{ij}\partial D''_k}=\frac{\partial^2U}{\partial\varepsilon''_{ij}\partial D'_k}. \tag{13}$$

Заметим, что эти равенства не являются тривиальными в отличие от аналогичных равенств, в которых фигурируют величины только с одним или только с двумя штрихами.

Другой подход к построению теории амплитудных определяющих уравнений для процессов (3) основан на формализме Эделена [10] и приводит к аналогичным результатам. При этом ограничения в виде равенств (13) снимаются. Согласно этому подходу амплитуды независимых переменных, например, напряжений $\sigma'_{ij},\sigma''_{ij}$ и напряженности электрического поля E'_k,E''_k (5) с самого начала формально рассматриваются как тензорные и векторные функции компонент деформации $\varepsilon'_{ij},\varepsilon''_{ij}$ и индукции электрического поля D'_k,D''_k, частоты и температуры (далее акцентировать внимание на зависимостях от частоты и температуры не будем). Затем, на основании теорем о разложении векторных полей, термодинамических ограничений и условия инвариантности амплитуд относительно сдвига времени обосновывается возможность представления амплитудных определяющих уравнений через потенциалы в виде (6) (или (12)).

Рассмотрим произвольные зависимости (5) и потребуем от них инвариантности относительно временного сдвига, или, что одно и то же, инвариантности к замене в (3) ωt на $\omega t+\varphi$ [9]

$$QS(\Lambda)=S(Q\Lambda), \tag{14}$$

где

$$S=\left(\sigma'_{ij},\sigma''_{ij},E'_k,E''_k\right)^T,\Lambda=\left(\varepsilon'_{ij},\varepsilon''_{ij},D'_k,D''_k\right)^T,$$

$$Q=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\ 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Соотношения (14) всегда выполняются для гармонических процессов [9]. Путем исключения параметра φ равенства (14) можно записать в дифференциальной форме

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial\varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl}-\frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial\varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl}+\frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial D'_{k}}D''_{k}-\frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial D''_{k}}D'_{k}+i\tilde{\sigma}_{ij}=0,\\ &\frac{\partial\tilde{E}_{i}}{\partial\varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl}-\frac{\partial\tilde{E}_{i}}{\partial\varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl}+\frac{\partial\tilde{E}_{i}}{\partial D'_{k}}D''_{k}-\frac{\partial\tilde{E}_{i}}{\partial D''_{k}}D'_{k}+i\tilde{E}_{i}=0,\end{aligned}\qquad(15)$$

где введены обозначения

$$\tilde{\sigma}_{ij}=\sigma'_{ij}+i\sigma''_{ij},\tilde{E}_k=E'_k+iE''_k,i=\sqrt{-1}.\qquad(16)$$

Расписав выражение для функции диссипации (8) с учетом равенств (15), можно показать, что функция накопления $\overline{U}$ из (7), как функция независимых переменных удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl}-\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl}+\frac{\partial\Phi}{\partial D'_{k}}D''_{k}-\frac{\partial\Phi}{\partial D''_{k}}D'_{k}=0.\qquad(17)$$

Этому же уравнению удовлетворяет и функция $\overline{D}$. Для этого следует расписать с учетом (14) выражение для $\overline{U}$. Общим интегралом уравнения (17), отражающего инвариантность функций $\overline{D}$ и $\overline{U}$ относительно временного сдвига, является произвольная функция аргументов (9). В основе формализма Эделена лежит следующая теорема, доказанная в [10]:

Теорема. Если $\vec{X}$ - элемент N-мерного векторного пространства E_N с внутренним произведением $A\otimes B$, а $\vec{Y}(\vec{X})$ - непрерывно-дифференцируемое отображение $E_N\to E_N$, то любое решение неравенства

$$\vec{X}\otimes\vec{Y}(\vec{X})\geq 0\qquad(18)$$

представимо в виде

$$\begin{aligned}&\vec{Y}(\vec{X})=grad\Psi(\vec{X})+U(\vec{X});\\ &\Psi(\vec{X})=\int_0^1\vec{X}\otimes Y(\lambda\vec{X})d\lambda;\\ &U_i(\vec{X})=\int_0^1\lambda X_j\left[\frac{\partial Y_i(\lambda\vec{X})}{\partial(\lambda X_j)}-\frac{\partial Y_j(\lambda\vec{X})}{\partial(\lambda X_i)}\right]d\lambda;\\ &\vec{U}(\vec{X})\otimes\vec{X}=0.\end{aligned}\qquad(19)$$

Обобщение этой теоремы на случай , когда в соотношениях (19) появляется скалярный множитель, приведено, например в [3].

Потребуем теперь от зависимостей (5) удовлетворения условию неотрицательности диссипации

$$\overline{D}=\sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij}-\sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij}+E''_kD'_k-E'_kD''_k\geq 0.\qquad(20)$$

Обозначив $\vec{X}=(\varepsilon'_{ij},\varepsilon''_{ij},D'_k,D''_k)$, $\vec{Y}=(\sigma''_{ij},-\sigma'_{ij},E''_k,-E'_k)$ и воспользовавшись теоремой, получаем

$$\begin{aligned}&\sigma'_{ij}=-\frac{\partial D}{\partial\varepsilon''_{ij}}-D''_{ij};\sigma''_{ij}=\frac{\partial D}{\partial\varepsilon'_{ij}}+D'_{ij};\\ &E'_k=-\frac{\partial D}{\partial D''_k}-R''_k;E''_k=\frac{\partial D}{\partial D'_k}+R'_k,\end{aligned}\qquad(21)$$

где функция D определяется вторым соотношением (10). Очевидно, что она, как и функция $\overline{D}$, зависит от набора аргументов (9). Для функций $D'_{ij}, D''_{ij}, R'_k, R''_k$ имеем

$$D'_{ij}\varepsilon'_{ij} + D''_{ij}\varepsilon''_{ij} + R'_k D'_k + R''_k D''_k = 0. \tag{22}$$

Следующим ограничением на зависимости (5) является неотрицательность функции накопления (7)

$$\overline{U} = \sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} + E'_k D'_k + E''_k D''_k \geq 0. \tag{23}$$

Использование этой функции как меры накопления электромеханической энергии в элементарном объеме тела обосновывается например, в работе [8]. Заметим, что неравенство (23), в отличие от неравенства (20), не следует из термодинамики и постулируется нами дополнительно. В линейной теории, например, требование о выполнении неравенства (23) дает физически содержательные ограничения на консервативные характеристики материала. Подставляя (21) в (23), приходим к неравенству

$$-D''_{ij}\varepsilon'_{ij} + D'_{ij}\varepsilon''_{ij} - R''_k D'_k + R'_k D''_k \geq 0. \tag{24}$$

Обозначив $\vec{X} = \left(\varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij}, D'_k, D''_k\right)$, $\vec{Y} = \left(-D''_{ij}, D'_{ij}, -R''_k, R'_k\right)$ и воспользовавшись приведенной выше теоремой, получаем

$$D'_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon''_{ij}} + g''_{ij};\, D''_{ij} = -\frac{\partial U}{\partial \varepsilon'_{ij}} - g'_{ij};$$
$$R'_k = \frac{\partial U}{\partial D''_k} + g''_k;\, R''_k = -\frac{\partial U}{\partial D'_k} - g'_k, \tag{21}$$

где функция U определяется первым соотношением (10). Объединяя (21) и (25), приходим к уравнениям

$$\sigma'_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon''_{ij}} + g'_{ij};\, \sigma''_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon''_{ij}} + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon'_{ij}} + g'_{ij};$$
$$E'_k = \frac{\partial U}{\partial D'_k} - \frac{\partial D}{\partial D''_k} + g'_k;\, E''_k = \frac{\partial U}{\partial D''_k} + \frac{\partial D}{\partial D'_k} + g''_k. \tag{26}$$

Функции $g'_{ij}, g''_{ij}, g'_k, g''_k$ удовлетворяют условиям

$$g'_{ij}\varepsilon'_{ij} + g''_{ij}\varepsilon''_{ij} + g'_k D'_k + g''_k D''_k = 0,$$
$$g''_{ij}\varepsilon'_{ij} - g'_{ij}\varepsilon''_{ij} + g''_k D'_k - g'_k D''_k = 0; \tag{27}$$

причем первое из них является следствием теоремы, примененной к неравенству (24), а второе- следствием уравнений (22), (25), (17).

<u>Замечание</u>. Уравнения (26) можно получить и без ограничения $\overline{U} \geq 0$ (23). Для этого достаточно ввести функцию U согласно (10). Очевидно, что тогда

$$\overline{U} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon'_{ij}}\varepsilon'_{ij} + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon''_{ij}}\varepsilon''_{ij} + \frac{\partial U}{\partial D'_k} D'_k + \frac{\partial U}{\partial D''_k} D''_k. \tag{28}$$

Если теперь ввести функции $g'_{ij}, g''_{ij}, g'_k, g''_k$ в соответствии с равенствами (25), то из (7), (21), (17), (28), (22) получим для них условия (27). Уравнения (21) преобразуются при этом в уравнения (26). Этот способ является более наглядным при использовании других наборов независимых переменных. При этом соответствующая консервативная характеристика (например “энтальпия” H (11)) может быть найдена, если расписать выражение для функции диссипации $\overline{D}$ (8) с учетом соответствующих условий инвариантности в дифференциальной форме. Очевидно, что эти условия получаются из (15) путем соответствующей замены величин (например $D \to E, E \to D$).

Условия (27) при подстановке уравнений (26) в (17), (8) приводят к тому, что функции $g'_{ij}, g''_{ij}, g'_k, g''_k$ являются “безмощностными”. Они не дают вклада ни в диссипацию, ни в накопление электромеханической энергии. Используя третье из соотношений (19) и условия инвариантности (15), можно показать, что достаточными условиями равенств $g'_{ij} = 0$, $g''_{ij} = 0$, $g'_k = 0$, $g''_k = 0$ и представимости тем самым амплитудных уравнений в потенциалах (6) являются следующие условия симметрии

$$\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial\varepsilon'_{kl}}-\frac{\partial\sigma''_{ij}}{\partial\varepsilon''_{kl}}=\frac{\partial\sigma'_{kl}}{\partial\varepsilon'_{ij}}-\frac{\partial\sigma''_{kl}}{\partial\varepsilon''_{ij}};$$
$$\frac{\partial E'_k}{\partial D'_l}-\frac{\partial E''_k}{\partial D''_l}=\frac{\partial E'_l}{\partial D'_k}-\frac{\partial E''_l}{\partial D''_k}; \qquad (29)$$
$$\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial D'_k}-\frac{\partial\sigma''_{ij}}{\partial D''_k}=\frac{\partial E'_k}{\partial\varepsilon'_{ij}}-\frac{\partial E''_k}{\partial\varepsilon''_{ij}}.$$

Дифференцируя (6), можно убедиться, что эти условия являются также необходимыми.

В случае уравнений (12) первое из условий (29) остается в силе, во втором необходимо выполнить замену $D\to E,\ E\to D$. Третье условие принимает вид

$$\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial E'_k}-\frac{\partial\sigma''_{ij}}{\partial E''_k}=-\left(\frac{\partial D'_k}{\partial\varepsilon'_{ij}}-\frac{\partial D''_k}{\partial\varepsilon''_{ij}}\right). \qquad (30)$$

Очевидно, что если амплитудные уравнения получаются как результат усреднения по Галеркину (первый подход) каких-либо общих определяющих уравнений, условие инвариантности амплитуд относительно сдвига по времени выполняется автоматически. Возникает естественный вопрос, как в этом случае обстоит дело с выполнением условий симметрии типа (29) и (30). Если в качестве общих выступают кратноинтегральные соотношения электроупругости, для ядер которых постулируется «принцип взаимности», равенства (29) или (30) выполняются. Более того, в силу (13) имеют место более сильные равенства, например $\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial\varepsilon'_{kl}}=\frac{\partial\sigma'_{kl}}{\partial\varepsilon'_{ij}},\frac{\partial\sigma''_{ij}}{\partial\varepsilon''_{kl}}=\frac{\partial\sigma''_{kl}}{\partial\varepsilon''_{ij}}$ и т.п., являющиеся достаточными, но не необходимыми для равенств (29). Поэтому условия симметрии (29), как менее ограничительные, допускает более широкий класс амплитудных зависимостей, представимых в потенциалах, чем предположение о выполнении «принципа взаимности» для ядер в общей теории.

В общем случае вопрос о симметрии типа (29) или (30), как и вопрос о выполнении «принципа взаимности» в общей теории, остается открытым. Несмотря на это, любые амплитудные уравнения получаемые как результат усреднения по Галеркину общих уравнений (первый подход) допускают выделение потенциальной части. Оставшиеся члены этих уравнений типа функций $g'_{ij},g''_{ij},g'_k,g''_k$ в (26) не будут влиять на диссипацию и накопление и поэтому, как это делается в подобных случаях в классической континуальной механике, могут быть отброшены.

Отметим также, что при описанном выше втором подходе общая структура амплитудных определяющих уравнений не зависит от того, какая среда рассматривается: вязкоупругая, упругопластическая или упруговязкопластическая. Поэтому амплитудные уравнения при втором подходе имеют более широкую область применения.

С использованием теорем, представленных в [3], легко получить более общие результаты, обобщающие соотношения (26) на случай, когда в них появляется скалярный множитель.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость: Механика связ. полей в элементах конструкций.- Киев: Наук. думка, 1986.- т.5 -279 с.
2. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970.- 280 с.
3. Карнаухов В.Г., Киричок Н.Ф. Электортермовязкоупругость: Механика связ. полей в элементах конструкций. -Киев: Наук. думка, 1988.- т.4.- 320 с.
4. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В., Франовский А.У. Развитие теории определяющих уравнений физически нелинейных вязкоупругих тел при циклической деформации // Прикл. механика.- 1996.- 32, № 10. С. 46-51.
5. Карнаухов В.Г., Сенченков Н.К., Гуменюк Б.П. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении.-Киев: Наук. думка, 1985.-288 с.

6. Михайленко В.В. Общая структура амплитудных определяющих уравнений неупругих пьезоэлектрических тел при циклических электромеханических процессах // Прикл. механика.- 1996.- 32, № 12.- С. 37-42.
7. Михайленко В.В. О потенциальности определяющих уравнений для неупругих пьезоэлектрических материалов при моногармонических воздействиях // Прикл. механика.- 1997. -33, № 6.- С. 49-51.
8. Михайленко В.В. До питання про дисипацію та накопичення електромеханічної енергії при коливаннях в'язкопружних п'єзоелектричних тіл // Вісник Київськ. ун-ту, серія: фіз.-мат. науки, 1997.-С.128-132.
9. Термомеханика эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении / В.Н. Потуряков, В.И. Дирда, В.Г. Карнаухов и др.- Киев: Наук. Думка, 1987.-288 с.
10. Edelen D.G.B. Primitive thermodynamics: a new look at the Clausius- Duhem inequality // Ibid. – 1974.- 12, № 2.- P. 121-141.

Обосновывается возможность представления амплитудных определяющих уравнений, описывающих моногармонические колебания физически нелинейных неупругих пьезоэлектрических тел, в потенциалах. В основу положено условие инвариантности амплитуд относительно сдвига во времени и неотрицательность диссипации и накопления энергии.