Житомирський державний університет імені Івана Франка
Студентське наукове товариство
фізико-математичного факультету

До 10-ї річниці створення кафедри прикладної математики та інформатики

НАУКОВИЙ ПОШУК МОЛОДИХ ДОСЛІДНИКІВ

Випуск VI

Житомир

Вид-во ЖДУ ім. І. Франка

2013

УДК 378.937
Н32

Рекомендовано вченою радою Житомирського державного університету імені Івана Франка, протокол № 8 від 29 березня 2013 року

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Лось Л. В. – заслужений діяч науки і техніки України, доктор технічних наук, академік Інженерної академії України, професор кафедри математики та загальнотехнічних дисциплін Житомирського агроекологічного університету;

Антонова О. Є. – доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри педагогіки Житомирського державного університету імені Івана Франка.

Н32 Науковий пошук молодих дослідників: збірник наукових праць студентів, магістрантів та викладачів / за ред. О. М. Королюк – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2013. – Вип. 6. – 260 с.

У збірнику представлено результати дослідної роботи за актуальними напрямками психолого-педагогічних, фізико-математичних наук та інформаційних технологій магістрантів, студентів-дипломників, членів проблемних груп та наукових гуртків, здобувачів і викладачів

Королюк О. М.,

кандидат педагогічних наук,

доцент кафедри математики

ВИКОРИСТАННЯ ВЕКТОРІВ ДО ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМ І РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ШКІЛЬНОГО КУРСУ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Вектор є одним із фундаментальних понять сучасної математики. Сьогодні на векторній основі викладається лінійна алгебра, аналітична і диференціальна геометрії.

Способи виконання різних операцій над векторами (додавння, віднімання, різні типи множення), їх властивості описує векторна алгебра.

Апарат векторної алгебри дозволяє спростити доведення деяких теорем шкільного курсу стереометрії. Використання векторних співвідношень у багатьох випадках полегшує міркування й розрахунки у стереометричних задачах.

Застосування векторного методу передбачає три основні етапи:

1) формулювання умови задачі на «мові векторів», що передбачає введення в розгляд певних векторів, складання векторних рівностей, які відповідають умові задачі;
2) перетворення складених рівностей, використовуючи властивості операцій над векторами;
3) геометричне тлумачення одержаних результатів [4].

Для прикладу, на «мові векторів»:

- твердження: точки А і В збігаються, можна тлумачити: ОА = ОВ або АВ = 0;
- прямі АВ і СД паралельні, як АВ = k СД;
- точки А, В, С лежать на одній прямій: АВ = k AC;
- прямі АВ і СД перпендикулярні: АВ□ □□СД =□ □ □
- відрізки АВ і СД мають однакову довжину a: $АВ^2 = СД^2 = a^2$;
- кут між векторами a і b дорівнює φ : $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$.

З методичної точки зору в процесі навчання стереометрії в школі буде доцільним продемонструвати доведення деяких відомих тверджень, навести приклади розв'язування вже знайомих задач за допомогою векторного методу. По-перше, такі вправи дозволять продемонструвати можливості цього методу, оскільки часто, як уже було зазначено, суттєво спрощують математичні дії, міркування. По-друге, повторне доведення дасть можливість учням зайвий раз повторити матеріал, краще його засвоїти та закріпити знання. І нарешті, у такий спосіб розвивається логічне мислення, учні заохочуються відшукувати нестандартні способи досягнення математичних істин.

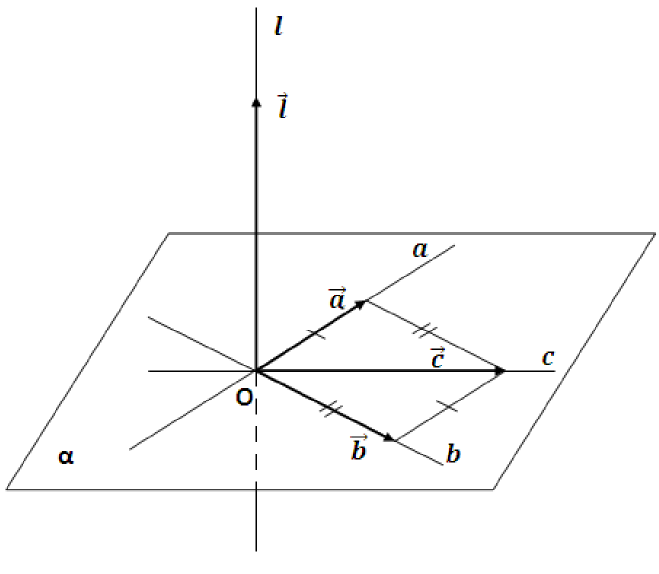
Розглянемо декілька прикладів.

1. У 10класі під час вивчення теми «Перпендикулярність прямих і площин у просторі» доводиться ***ознака перпендикулярності прямої і площини***: *якщо пряма перпендикулярна до двох прямих площини, які перетинаються, то вона перпендикулярна до цієї площини.*

Доведення цієї ознаки, яке наводиться у шкільних підручниках, традиційно зводиться до виконання певних додаткових побудов та розгляду п’яти пар рівних трикутників [3]. Воно є досить громіздким, його здійснення потребує багато часу.

Цю саму ознаку можна довести і в інший спосіб, використовуючи вектори.

Доведення. Нехай прямі *а* і *в* лежать у площині L і перетинаються в точці О (рис. 1). Пряма *l* перетинає площину в точці О і *l* □ *a* , *l*□ □ *b*. Покажемо, що *l* □□*c,* де *c* – пряма, яка також лежить у площині L і проходить через точку О.



Нехай вектори $\vec{a}, \vec{в}, \vec{l}, \vec{c}$ - напрямні вектори прямих *a*, *в*, *l*, *c* відповідно.

Оскільки за умовою $\vec{a}$ □ $\vec{l}$ і $\vec{в}$ □ □$\vec{l}$□, то скалярні добутки векторів .

$$\vec{l}\,\vec{a} = 0 \qquad \vec{l}\,\vec{b} = 0$$

Вектори $\vec{a}$, $\vec{в}$ не колінеарні, тоді вектор $\vec{c}$ можна подати у такому вигляді: $\vec{c} = n\vec{a} + m\vec{в}$, де n . m – деякі числа.

Рис. 1.

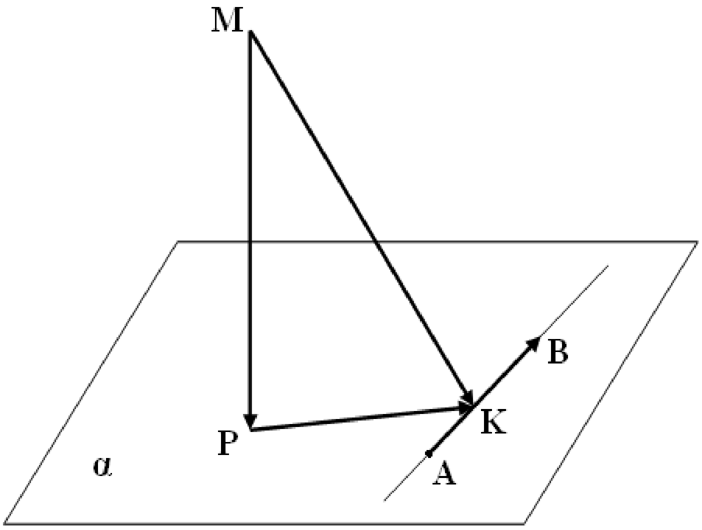
Знаходимо скалярний добуток:

$$\vec{l}\,\vec{c} = \vec{l}(n\vec{a} + m\vec{в}) = \vec{l}\,\vec{a}n + \vec{l}\,\vec{в}\,m = 0 \cdot n + 0 \cdot m = 0.$$

Отже, $\vec{l} \cdot \vec{c} = 0$, тобто *l* □□*c*. Що і потрібно було довести.

2. Важливе в шкільному курсі стереометрії (10 кл.) місце займає й ***теорема про три перпендикуляри***: *пряма, яка лежить у площині* *перпендикулярна до похилої тоді і тільки тоді, коли ця пряма перпендикулярна до її проекції*. Автори шкільних підручниках обирають певні способи її доведення [2; 3]. Після вивчення в 11 класі теми «Координати та вектори в просторі» можна запропонувати учням довести цю теорему векторним методом, використовуючи склаляриний добуток векторів.

Доведення. Нехай l – пряма, яка лежить у площині □□ і проходить через основу похилої МК, проведеної до цієї площини з точки М, і МР – перпендикуляр до площині □ (рис. 2).



Очевидно, $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PK}$.

Виберемо на прямій l довільним чином дві точки А і В, розглянемо вектор $\overrightarrow{AB}$.

Для доведення теореми потрібно довести *достатню* умову: якщо $\overrightarrow{AB}$ □□ $\overrightarrow{PK}$ □□ то $\overrightarrow{AB}$ □□$\overrightarrow{MK}$□ □ □ □ □ □

а також *необхідну* умову – якщо $\overrightarrow{AB}$ □□$\overrightarrow{MK}$□ □ □ □ □ то $\overrightarrow{AB}$ □ РК (2).

Доведемо (1). Запишемо:

□ □ □ □ □ □$\overrightarrow{AB} \cdot$□$\overrightarrow{MK}$□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ *Рис.*□ □ □ □

2.□ $\overrightarrow{AB}$□$\cdot\left(\overrightarrow{MP}\right.$□$\left.+ \overrightarrow{PK}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PK} = 0$

□ □ □ □ □ □ (оскільки $\overrightarrow{AB}$ □□$\overrightarrow{PK}$□ і МР□□□□).

Отже, $\overrightarrow{AB} \cdot$□$\overrightarrow{MK}$□ □ □ □ □ □ що означає $\overrightarrow{AB}$ □□$\overrightarrow{MK}$□ □ а це означає, що l □□ МК.

Аналогічно можна довести (2) – необхідність.

Таким чином, теорему про три перпендикуляри доведено.

3. Використання векторного методу може значно спростити розв'язування деяких задач. Проілюструємо це на прикладі ***задачі***: *через вершини рівностороннього трикутника ABC і його центр O проведено паралельні прямі, які перетинають деяку площину в точках A_1, B_1, C_1, O_1 . Визначте довжину відрізка OO_1, якщо довжини відрізків AA_1, BB_1, CC_1 дорівнюють відповідно a, b, c і якщо весь трикутник ABC розміщений з одного боку площини* [1]. *Розв'язання (синтетичний меод).* Центром правильного трикутника є точка перетину його медіан. Тому пряма AO перетинає відрізок BC у його середині M (рис. 3),

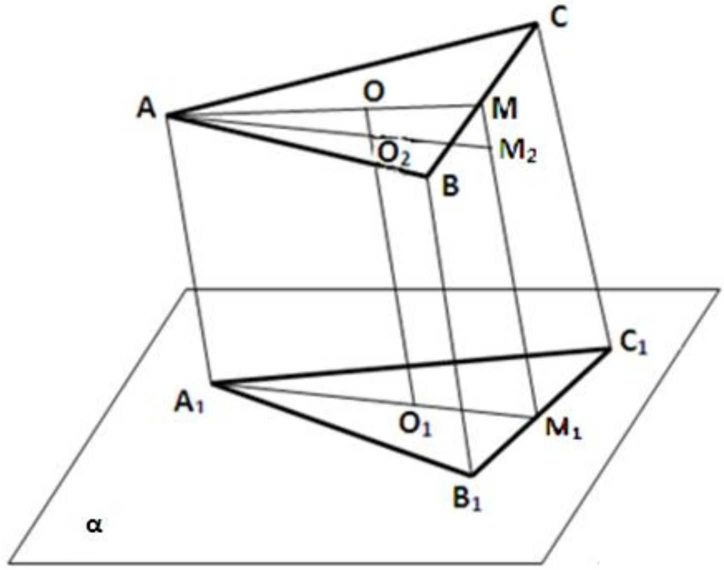


Рис. 3.

а площина, що проходить через AA_1 і O, перетинає трапецію B_1BCC_1 – по її середній лінії MM_1. Отже,

$$MM_1 = \frac{1}{2}(BB_1 + CC_1) = \frac{1}{2}(b + c).$$

Припустимо, що відрізок a менший від відрізків b і c.

Тоді через вершину A проведемо пряму, паралельну A_1M_1. Вона перетне OO_1 і MM_1 в точках O_2 і M_2.

Трикутники $\Delta AOO_2 \sim \Delta AMM_2$, (*)

$$MM_2 = MM_1 - AA_1 = \frac{1}{2}(b + c) - a = \frac{1}{2}(b + c - 2a).$$

З умови (*): $OO_2 : MM_2 = AO : AM = 2 : 3$, тоді

$$OO_2 = \frac{2}{3}MM_2 = \frac{1}{3}(b + c - 2a).$$

Отже, $OO_1 = OO_2 + AA_1 = \frac{1}{3}(b + c - 2a) + a = \frac{1}{3}(a + b + c)$.

Відповідь. $OO_1 = \frac{1}{3}(a + b + c)$.

Під час вивчення векторів можна повернутись до задачі і розв’язати її векторним методом, наприклад, використавши теорему про центроїд тетраедра:

$$3\,\overrightarrow{O_1O}=\overrightarrow{O_1A}+\overrightarrow{O_1B}+\overrightarrow{O_1C}=\overrightarrow{O_1A_1}+\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{O_1B_1}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{O_1C_1}+\overrightarrow{C_1C}=$$
$$=\left(\overrightarrow{O_1A_1}+\overrightarrow{O_1B_1}+\overrightarrow{O_1C_1}\right)+\left(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{C_1C}\right)=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{C_1C}.$$

Оскільки відомі довжини цих векторів, то,

$$3\cdot O_1O=a+b+c, \qquad O_1O=\frac{1}{3}(a+b+c).$$

Як бачимо, у розглянутих прикладах векторний спосіб доведення, розв’язання є значно простішим, тому має справити на учнів враження, перконати в доцільності застосування векторів у геометрії, потужності та універсальності векторного методу.

Література

1. Бевз Г.П. Методика розв’язування стереометричних задач : посіб. для вчителя / Бевз Г.П. – К. : Рад шк., 1988, – 192 с.
2. Бурда М. І. . Геометрія : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. : акдем. рівень / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. – К. : Зодіак-ЕКО, 2010. – 176 с.
3. Нелін Є.П. Геометрія : дворівн. підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. : акдем. і проф. рівні / Є.П. Нелін. – Х. : Гімназія, 2010. – 240 с.
4. Слєпкань З.І. Методика навчання математки : підруч. / Слєпкань З.І. – К. : Вища шк., 2006. – 582 с.