Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет імені Івана Франка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу
Освітньо-кваліфікаційний рівень «бакалавр»

ДИПЛОМНА РОБОТА

Аналітична теорія кватерніонних функцій

Виконала: студентка 42 групи,
спеціальності 6.040201 Математика*
денного відділення
Вигівська Людмила Вячеславівна
Керівник: кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри математичного аналізу
Герус Олег Федорович

м. Житомир – 2014 рік

Зміст

Вступ

«Відкриття кватерніонів – крок вперед до розуміння величин, пов'язаних з простором: його можна зрівняти з відкриттям Декарта системи координат.»

Дж. Максвел

Актуальність теми.

Числа натуральні… цілі… раціональні… комплексні… Що далі? Адже якщо комплексні числа виявились такими корисними і дуже широко застосовуються, то відкриття інших, більш загальних видів чисел теж є дуже перспективним.

Об'єкти типу кватерніонів були запропоновані ще в XVIII ст. Леонардом Ейлером та Карлом Гаусом, але класичне оформлення вони отримали завдяки Гамільтону. Тому вважається, що першим кватерніони відкрив у 1843 р. Уільям Гамільтон. Але ще до відкриття Гамільтоном у 1840 році Родрігес опублікував у далеко не останньому періодичному виданні Journal de mathematiques pures et appliquees роботу, присвячену обертанням тривимірного простору. Ця робота містила практично повний опис алгебри кватерніонів – Родрігес назвав їх параметрами групи обертань, - за винятком, мабуть, самого слова «кватерніон».

Але робота Родрігеса, навіть будучи опублікованою в досить престижному математичному журналі, пройшла непоміченою. Можливо, вона просто не потрапила на очі фахівцям.

Як тільки Гамільтон зрозумів, що комплексні числа – це всього лише впорядковані пари дійсних чисел, то він подумав над тим, як побудувати (і чи можливо це) систему нових чисел – трійок дійсних чисел, тобто чисел виду $a + b\, i + c\, j$, де i, j – дві різні уявні одиниці. Ці числа він назвав триплетами («триплет» в перекладі з латинської означає «трійка»). Спочатку все йшло добре і Гамільтон розвивав цю теорію, але, дійшовши до множення триплетів, зрозумів, що нічого не вийде. Бо який би спосіб множення триплетів він не підбирав, завжди виявлялися такі пари ненульових триплетів, які в добутку давали нуль: $a \neq 0$, $x \neq 0$, але $a\, x = 0$. Та Уільям не падав духом, і восени 1843 р. йому спало на думку розглянути числову систему не з трьома, а з чотирма одиницями (одна дійсна і три уявних). Мова йшла саме про кватерніони (від латинського quaterni, що значить «по чотири»).

Суть свого відкриття Гамільтон виклав в 1844 р. в невеличкій статті (на чотирьох сторінках) «О кватернионах или о новой системе мнимых в алгебре».

Відкриття кватерніонів справило сильне враження на математиків того часу. Відомий французький фізик і математик А. Пуанкаре писав: «Это была революция в арифметике, подобная той, которую совершил Лобачевский в геометрии».

Тому теорія кватерніонів зацікавила багатьох математиків. Лише в XIX ст. було видано майже 600 наукових робіт, присвячених кватерніонам. В цих роботах кватерніони успішно застосовувались до розв’язання різних задач фізики, геометрії, теорії чисел.

Значне застосування зараз має векторне числення, яке виникло на базі кватерніонів, де вектори були введені, як кватерніони спеціального виду. Відкриття кватерніонів також стало імпульсом для створення ряду важливих розділів сучасної математики: теорії матриць, багатовимірної геометрії та ін.

Основна проблема, зокрема, полягає в тому, щоб поширити на алгебру кватерніонів поняття аналітичної функції, яке досить добре відоме в комплексному аналізі.

Відомо декілька підходів до таких поширень (аналітичні функції як суми степеневих рядів; аналітичні функції як такі, що задовольняють умови Коші-Рімана; аналітичні функції як такі, що мають в кожній точці області скінченну похідну).

В цій роботі ми розглядаємо підхід київського математика Леоніда Байрака, який базується на матричній інтегральній формулі Коші:

$$f(H) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)(zE - H)^{-1}\,dz,$$

де $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одинична матриця, $H = \begin{pmatrix} q_0 + iq_1 & q_2 + iq_3 \\ -q_2 + iq_3 & q_0 - iq_1 \end{pmatrix}$ – матричне представлення кватерніона, *f(z)* – звичайна аналітична функція комплексної змінної, ядро $(zE-H)^{-1}$ – кватерніон спеціального виду. В результаті ми одержуємо кватерніонну функцію, яку називають аналітичною функцією. Тому ця формула є узагальненням інтегральної формули Коші, яка дозволяє будувати аналітичні функції.

В роботі на основі даної формули виведено загальну формулу аналітичної функції:

$$f(q) = Re\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-\lambda}dz\right) + \frac{q-q_0}{|q-q_0|} Im\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-\lambda}dz\right).$$

або

$$f(q) = Re(f(\lambda)) + \frac{q-q_0}{|q-q_0|} Im(f(\lambda)).$$

Ця формула справедлива і для $\bar{\lambda}$, де $\lambda - q_0 + i|q - q_0|, \bar{\lambda} - q_0 - i|q - q_0| \in \mathbb{C}$ - власні значення кватерніона.

Мета і завдання дослідження.

Об'єктом дослідження є кватерніонний аналіз.

Предметом дослідження є аналітичні функції кватерніонної змінної.

Метою дослідження є побудова аналітичних функцій кватерніонної змінної.

Для досягнення мети в роботі було поставлено такі завдання:

– розглянути кватерніони, операції над ними та їх властивості;

– побудувати кватерніонні функції, аналітичні за Байраком;

– порівняти одержані кватерніонні функції, аналітичні за Байраком, з кватерніонними функціями, аналітичними за Вейєрштрасом.

Зробимо більш детальний огляд одержаних результатів.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дипломної роботи, сформульовано мету дослідження, коротко викладено зміст основної частини роботи.

В розділі 1 розглянуто поняття «кватерніон», сформульовано основні властивості цих чисел та операції над ними.

В розділі 2 з використанням інтегральної формули Коші введено поняття функції від кватерніона та побудовано ряд аналітичних функцій.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку та загального плану дипломної роботи, постановка задач та формулювання робочих гіпотез належать науковому керівнику – О. Ф. Герусу. Здійснення всіх результатів роботи проведено особисто автором.

Подяки. Висловлюю щиру подяку науковому керівнику, доценту кафедри математичного аналізу О. Ф. Герусу за постановку задач, корисні поради та постійну увагу до роботи.

Особливу подяку висловлюю професору кафедри математичного аналізу М.М. Осадчому за допомогу в удосконаленні дипломної роботи.

Розділ 1

Кватерніони. Властивості та операції над ними.

Наведемо основні представлення кватерніонів, сформулюємо їх властивості та операції, які можна над ними виконувати.

Кватерніон - це впорядкована четвірка дійсних чисел

$$q = [q_0, q_1, q_2, q_3,], \tag{1.1}$$

що містить в собі інформацію про скаляр і тривимірний вектор. В компонентах кватерніон будемо зображати у вигляді рядка або стовпця (залежно від зручності написання) у квадратних дужках.

У кватерніоні розрізняють скалярну частину

$$\text{scal } q = q_0, \tag{1.2}$$

яка представляє собою скаляр, і векторну частину

$$\text{vect } q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

що являє собою тривимірний вектор.

Кватерніон, що має тільки скалярну частину ,

$$q = [q_0, 0, 0, 0], \tag{1.4}$$

називається чисто скалярним.

Кватерніон , що має тільки векторну частину ,

$$q = [0, q_1, q_2, q_3,], \tag{1.5}$$

називається чисто векторним.

Для кватерніона визначено також декілька скалярних характеристик.

1. Норма:

$$\|q\| = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2. \tag{1.6}$$

2. Модуль:

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \tag{1.7}$$

3. Модуль векторної частини:

$$\langle q \rangle = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}, \tag{1.8}$$

для позначення якого будемо використовувати ідентифікатор кватерніона в кутових дужках .

4. Аргумент – кутова величина, що дорівнює аргументу комплексного числа з дійсною частиною q_0 та уявною частиною $\langle \mathbf{q} \rangle$ (рис. 1.1), що приймає значення із замкнутого інтервалу $[0, \pi]$.

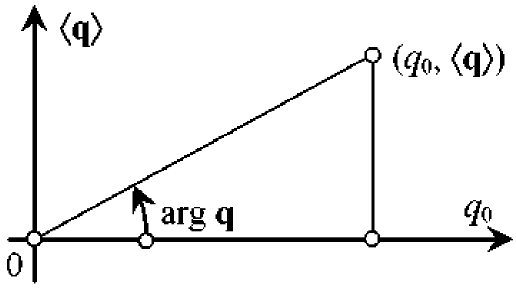

Рис. 1.1

Аргумент кватерніона, зазвичай, визначають формулою:

$$\arg q = \arccos \frac{q_0}{|q|}. \tag{1.9}$$

Однак ця формула погано обумовлена поблизу країв інтервалу. Для обчислень краще використовувати вбудовані функції arg(x+iy) (комплексного числа) або atan2(x,y), наявні в багатьох математичних програмах, які використовують не тільки скалярну частину кватерніона і його модуль, але і модуль векторної його частини:

$$\arg q = \arg[q_0 + i\langle q \rangle] = \operatorname{atan2}[q_0; \langle q \rangle]. \tag{1.10}$$

Як випливає з формул (1.6) і (1.7), норма і модуль кватерніона дорівнюють нулю тільки для нульового кватерніона

$$\mathbf{O} = [0,0,0,0]. \tag{1.11}$$

Аргумент нульового кватерніона не визначений.

5. Кватерніон нормований, якщо його норма дорівнює одиниці. Верзором чи знаком кватерніона будемо називати нормований кватерніон, отриманий на його основі:

$$\bar{q} = [q_0, -q_1, -q_2, -q_3]. \tag{1.12}$$

Операції над кватерніонами

1. Кватерніонне спряження, що позначається рискою над кватерніоном, визначається так

$$\bar{q} = [q_0, -q_1, -q_2, -q_3], \tag{1.13}$$

результатом якого є знову є кватерніон.

2. Додавання кватерніонів, що позначається знаком +, визначається формулою:

$$q + p = \begin{bmatrix} q_0 + p_0 \\ q_1 + p_1 \\ q_2 + p_2 \\ q_3 + p_3 \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

Кватерніони додаються покомпонентно. Результатом кватерніонного додавання є знову кватерніон. Додавання кватерніонів комутативне.

Аналогічно визначається і віднімання кватерніонів:

$$q - p = \begin{bmatrix} q_0 - p_0 \\ q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

Справедливі також наступні рівності:

$$\overline{p + q} = \bar{p} + \bar{q}; \overline{p - q} = \bar{p} - \bar{q}. \quad (1.16)$$

3. Множення числа на кватерніон чи кватерніон на число, що позначається як звичайний знак множення, визначається формулою:

$$a \cdot q = q \cdot a = \begin{bmatrix} a \cdot q_0 \\ a \cdot q_1 \\ a \cdot q_2 \\ a \cdot q_3 \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

В результаті множення числа на кватерніон чи кватерніона на число одержується знову кватерніон. Ця операція комутативна.

4. Добуток кватерніонів, що позначається знаком $*$, визначається формулою:

$$q * p = \begin{bmatrix} q_0 \cdot p_0 - q_1 \cdot p_1 - q_2 \cdot p_2 - q_3 \cdot p_3 \\ q_0 \cdot p_1 + q_1 \cdot p_0 + q_2 \cdot p_3 - q_3 \cdot p_2 \\ q_0 \cdot p_2 - q_1 \cdot p_3 + q_2 \cdot p_0 + q_3 \cdot p_1 \\ q_0 \cdot p_3 + q_1 \cdot p_2 - q_2 \cdot p_1 + q_3 \cdot p_0 \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

В результаті кватерніонного множення одержується також кватерніон.

Добуток кватерніонів не комутативний, тобто його результати залежать від порядку множників.

Деякі **властивості кватерніонного добутку**.

Добуток кватерніонів є асоціативний:

$$q * p * r = (q * p) * r = q * (p * r). \quad (1.19)$$

Добуток кватерніонів дистрибутивний по відношенню до суми:

$$q * (p + r) = q * p + q * r; \quad (p + r) * q = p * q + r * q. \tag{1.20}$$

Крім того, справедливі твердження:

Скалярна частина добутку кватерніонів не змінюється при циклічній перестановці множників:

$$scal(p * q * r) = scal(r * p * q) = scal(q * r * p). \tag{1.21}$$

Скалярна частина добутку двох кватерніонів не залежить від кількості множників:

$$scal(p * q) = scal(q * p). \tag{1.22}$$

Спряжене значення від добутку двох кватерніонів дорівнює добутку їх спряжених значень, взятих в зворотньому порядку:

$$\overline{p * q} = \bar{q} * \bar{p}. \tag{1.23}$$

За індукцією, це правило можна поширити на будь-яку кількість множників:

$$\overline{p * q * r * s} = \bar{s} * \bar{r} * \bar{q} * \bar{p}. \tag{1.24}$$

Норма добутку двох кватерніонів дорівнює добутку норм множників:

$$\|p * q\| = \|p\| * \|q\| \tag{1.25}$$

За індукцією, це правило можна поширити на будь-яку кількість множників:

$$\|p * q * r * s\| = \|p\| * \|q\| * \|r\| * \|s\| \tag{1.26}$$

Одиничним є тотожній кватерніон:

$$I = [1,0,0,0]. \ I * q = q * I = q. \tag{1.27}$$

Множення довільного кватерніона на тотожній зліва чи справа не змінює вихідний кватерніон.

Добуток кватерніона на спряжений до нього виражається формулою:

$$q * \bar{q} = \bar{q} * q = [\|q\|, 0,0,0] = \|q\| * I. \tag{1.28}$$

5. Скалярний добуток кватерніонів обчислюється за формулою:

$$s = \frac{\bar{p} \times q + \bar{q} \times p}{2} = \begin{bmatrix} p_0 \cdot q_0 + p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 + p_3 \cdot q_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1.29}$$

В результаті цієї операції одержується чисто скалярний кватерніон, скалярна частина якого рівна скалярному добутку кватерніонів-множників, якщо їх приймати як чотирьохмірні вектори, а векторна частина їх рівна нулю.

6. Векторний добуток кватерніонів виражається формулою:

$$v = \frac{p*q-q*p}{2} = \begin{bmatrix} 0 \\ p_2 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_2 \\ p_3 \cdot q_1 - p_1 \cdot q_3 \\ p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1 \end{bmatrix}. \qquad (1.30)$$

В результаті цієї операції одержимо чисто векторний кватерніон, скалярна частина якого рівна нулю, а векторна частина рівна векторному добутку векторних частин кватерніонів-множників. Попередню формулу можна записати так:

$$v = \frac{p*q-q*p}{2} = vect\, p * vect\, q. \qquad (1.31)$$

Два кватерніони *p* і *q* називаються колінеарними, якщо колінеарні їх векторні частини, тобто коли векторний добуток цих кватерніонів рівний нуль-кватерніону:

$$v = \frac{p*q-q*p}{2} = 0. \qquad (1.32)$$

З цієї формули випливає, що множення колінеарних кватерніонів комутативне.

7. Добуток чисто векторних кватерніонів:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 \cdot q_1 - p_2 \cdot q_2 - p_3 \cdot q_3 \\ p_2 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_2 \\ p_3 \cdot q_1 - p_1 \cdot q_3 \\ p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1 \end{bmatrix}. \qquad (1.33)$$

В результаті цієї операції одержимо кватерніон загального вигляду, скалярна частина якого рівна скалярному добутку векторних частин множників, взятих з протилежним знаком, а векторна частина рівна векторному добутку векторних частин множників.

8. Добуток двох кватерніонів, що мають дві нульові компоненти:

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \cdot q_0 - p_1 \cdot q_1 \\ p_0 \cdot q_1 + p_1 \cdot q_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (1.34)$$

З цієї формули випливає, що кватерніони такого виду перемножаються як комплексні числа. В скалярній частині кватерніона знаходиться дійсна частина, а у векторній – уявна частина комплексного числа. Тому якщо позначити:

$$P = p_0 + ip_1;\ Q = q_0 + iq_1; R = r_0 + ir_1; \qquad (1.35)$$

то буде вірна наступна формула:

$$P * Q = R; \qquad (1.36)$$

9. Обернений кватерніон визначається формулою:

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|}. \qquad (1.37)$$

В результаті множення кватерніона на обернений до нього і з правого і з лівого боку, одержується тотожній кватерніон:

$$q * q^{-1} = q^{-1} * q = I. \qquad (1.38)$$

Норми і модулі взаємно-обернених кватерніонів взаємно обернені:

$$\|q^{-1}\| = \|q\|^{-1};\ |q^{-1}| = |q|. \qquad (1.39)$$

Кватерніон, обернений до спряженого, дорівнює спряженому від оберненого до нього:

$$\bar{q}^{-1} = \overline{q^{-1}}. \qquad (1.40)$$

Обернений від добутку двох кватерніонів дорівнює добутку обернених, взятих в зворотньому порядку:

$$(p * q)^{-1} = q^{-1} * p^{-1}. \qquad (1.41)$$

За правилом індукції попередню операцію можна поширити на будь-яке число множників:

$$(p * q * r * s)^{-1} = s^{-1} * r^{-1} * q^{-1} * p^{-1}. \qquad (1.42)$$

Наведемо ще одне представлення кватерніонів.

Кватерніони – це числа виду $q = a + b\,i + c\,j + d\,k$, де a,b,c,d – довільні дійсні числа, а i,j,k – уявні одиниці. Причому $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Кватерніон також можна представити у вигляді матриці:

$$H = \begin{pmatrix} q_0 + iq_1 & q_2 + iq_3 \\ -q_2 + iq_3 & q_0 - iq_1 \end{pmatrix}.$$

1. Додавання кватерніонів.

Нехай є два кватерніони

$$q = a + b\,i + c\,j + d\,k \text{ та } q' = a' + b'\,i + c'\,j + d'\,k.$$

Тоді їх сума запишеться у вигляді:

$$q + q' = (a + b\,i + c\,j + d\,k) + (a' + b'\,i + c'\,j + d'\,k) =$$
$$= (a + a') + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k.$$

2. Множення кватерніонів.

Щоб описати цю операцію, досить вказати, чому рівні всі попарні добутки чисел *i,j,k*.

$$i^2 = -1, j^2 = -1, k^2 = -1,$$
$$ij = k,\ ji = -k,$$
$$jk = i,\ kj = -i,$$
$$ki = j,\ ik = -j.$$

Краще запам’ятати цю «таблицю множення» допоможе рис. 1.2, на якому кватерніони *i,j,k* зображені трьома точками кола, розміщеними за напрямком руху стрілки годинника. Добуток будь-яких двох чисел з трійки *i,j,k* дорівнює третьому числу, якщо рухатися від першого множника до другого за годинниковою стрілкою, і рівне третьому числу зі знаком мінус, якщо рух відбувається проти руху стрілки годинника. Тому знову ж таки тут бачимо, що переставний закон множення не виконується, так як множення залежить від порядку співмножників.

Нехай $q = a + bi + cj + dk$, а $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$.

То $qq_1 = (aa_1 - bb_1 - cc_1 - dd_1) + (ab_1 + ba_1 + cd_1 - dc_1)i +$
$+(ac_1 + ca_1 + db_1 - bd_1)j + (ad_1 + da_1 + bc_1 - cb_1)k.$

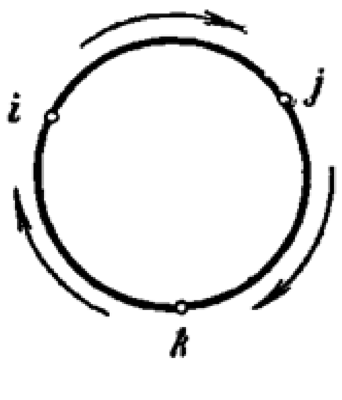

Рис. 1.2

3. Ділення кватерніонів.

Так як добуток кватерніонів не комутативний, а залежить від порядку множників, то замість одного рівняння варто розглядати два:

$$q_2x=q_1 \text{ і } xq_2=q_1.$$

Згідно до цього, розв'язок першого рівняння буде називатися лівим коренем від ділення q_1 на q_2 і позначається $x_л$, а розв'язок другого – правим коренем $x_п$.

Для того, щоб знайти ці корені, помножимо обидві частини першого рівняння зліва на $\overline{q_2}$, а потім на $\frac{1}{|q_2|^2}$. Одержимо:

$$x = \frac{1}{|q_2|^2}\overline{q_2}q_1.$$

Якщо підставити знайдений корінь в перше рівняння, то переконуємося, що це є дійсно розв'язок. Таким чином,

$$x_л = \frac{1}{|q_2|^2}\overline{q_2}q_1.$$

Аналогічно:

$$x_п = \frac{1}{|q_2|^2}q_1\overline{q_2}.$$

Отже, встановлено дві найбільш важливі властивості системи кватерніонів:

1) Для множення кватерніонів виконується сполучний закон, але не виконується переставний.
2) Кватерніони – це система з діленням.

Ще одна дуже важлива властивість кватерніонів полягає у тому, що модуль добутку дорівнює добутку модулів. Тобто,

$$|q_1q_2|^2 = (q_1q_2)(\overline{q_1q_2}) = (q_1q_2)(\overline{q_2}\ \overline{q_1}) = q_1(q_2\overline{q_2})q_1 = |q_1|^2|q_2|^2.$$

Одержана нами рівність $|q_1q_2|^2 = |q_1|^2|q_2|^2$ приводить до цікавої тотожності – це тотожність чотирьох квадратів.

Нехай

$$q_1 = a + b\,i + c\,j + d\,k\,,\ q_2 = a' + b'\,i + c'\,j + d'\,k,$$

тоді якщо використати попередню властивість, то одержимо:

$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\ (a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) = (a\,a' - b\,b' - c\,c' - d\,d')^2 + (a\,b' + b\,a' + c\,d' - d\,c')^2 + (a\,c' + c\,a' + d\,b' - b\,d')^2 + (a\,d' + d\,a' + b\,c' - c\,b')^2.$

Тобто добуток суми чотирьох квадратів на суму чотирьох квадратів знову є сума чотирьох квадратів.

Висновок до Розділу 1. Ми розглянули поняття «кватерніон», основні його властивості та ввели операції над ними. Наведені теоретичні відомості будуть необхідні в подальшому для побудови кватерніонного аналізу.

Розділ 2

Побудова аналітичних функцій кватерніонної змінної. Інтегральна формула Коші для кватерніонів.

Є два основні підходи побудови кватерніонних функцій. Один з них базується на зведенні кватерніонів до комплексних чисел, а так як комплексний аналіз вже побудовано, то аналогічно до нього будується і кватерніонний аналіз.

Другий підхід побудови аналітичних функцій кватерніонної змінної спирається на використання інтегральної формули Коші. Цей підхід розвиває київський математик Леонід Байрак. Власне, на його статтю ми і будемо спиратися [1].

Для того, щоб перейти безпосередньо до теореми, за допомогою якої можна побудувати будь-яку функцію, спочатку розглянемо поняття власного вектора та власного значення.

Поняття власного вектора і власного значення.

Нехай задано квадратну матрицю Н. Ненульовий вектор $\vec{x}$ називається власним вектором матриці Н, якщо виконується рівність Н$\vec{x}$ = λ $\vec{x}$, де λ – деяке число, яке називається власним значенням матриці Н.

Власним значенням матриціН називається таке число λ $\in \mathbb{C}$, для якого існує власний вектор, тобто рівняння Н $\vec{x}$ = λ $\vec{x}$ має ненульові розв’язки $x \in \mathbb{H}$.

Відомо, що для будь-якої матриці, елементами якої є комплексні числа, існує хоча б один власний вектор[2].

Теорема. Власними значеннями кватерніона $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \in \mathbb{H}, q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ є числа $\lambda = q_0 + i|q - q_0|, \bar{\lambda} = q_0 - i|q - q_0| \in \mathbb{C}$.

Доведення.

Відомо, (див. [7]) що будь-який кватерніон можна подати у вигляді матриці, тобто

$$H = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 + iq_1 & q_2 + iq_3 \\ -q_2 + iq_2 & q_0 - iq_1 \end{pmatrix}.$$

З означення власного значення маємо:

$\lambda \in \mathbb{C}$, $\exists\, \vec{x} \neq 0$, тобто рівняння Н$\vec{x}$ = λ $\vec{x}$ має ненульові розв’язки

$\vec{x} = \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \eta \in \mathbb{C}, \zeta \in \mathbb{C}.$

Складемо характеристичне рівняння:

$(H - \lambda E)\vec{x} = 0.$

Підставивши відповідні значення, одержимо:

$$\left(\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) * \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} z_1 - \lambda & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

що рівносильно системі:

$$\begin{cases} (z_1 - \lambda)\eta + z_2\zeta = 0; \\ -\overline{z_2}\eta + (\overline{z_1} - \lambda)\zeta = 0. \end{cases}$$

Відомо, що система має єдиний ненульовий розв'язок, коли її детермінант рівний нулю.

$$\begin{vmatrix} z_1 - \lambda & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} - \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(z_1 - \lambda)(\overline{z_1} - \lambda) + z_2\overline{z_2} = 0;$$

$$z_1\overline{z_1} - \lambda(z_1 + \overline{z_1}) + \lambda^2 + z_2\overline{z_2} = 0;$$

$$\lambda^2 - \lambda(z_1 + \overline{z_1}) + z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = 0;$$

Одержали квадратне рівняння відносно λ.

Підставивши замість $z_1 + \overline{z_1}$, $z_1\overline{z_1}$, $z_2\overline{z_2}$ їх значення

$$z_1 + \overline{z_1} = q_0 + iq_1 + q_0 - iq_1 = 2q_0;$$

$$z_1\overline{z_1} = (q_0 + iq_1)(q_0 - iq_1) = q_0^2 + q_1^2;$$

$$z_2\overline{z_2} = (q_2 + iq_3)(q_2 - iq_3) = q_2^2 + q_3^2,$$

маємо:

$$\lambda^2 - 2q_0\lambda + q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 0.$$

Шукаємо дискримінант:

$$D = 4q_0^2 - 4(q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) = 4q_0^2 - 4q_0^2 - 4q_1^2 - 4q_2^2 - 4q_3^2 =$$

$$= -4(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) = -4|q - q_0|^2.$$

Отже

$$\lambda_{1,2} = \frac{2q_0 \pm 2i|q - q_0|}{2}.$$

Або

$\lambda_1 = q_0 + i|q - q_0|;$

$\lambda_2 = q_0 - i|q - q_0|,$

що й треба було довести.

Для того, щоб знайти власний вектор $\vec{x} = \binom{\eta}{\zeta}, \eta \in \mathbb{C}, \zeta \in \mathbb{C},$ досить розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} (z_1 - \lambda)\eta + z_2\zeta = 0; \\ -\bar{z}_2\eta + (\bar{z}_1 - \lambda)\zeta = 0. \end{cases}$$

відносно η та ζ. Розв'яжемо цю систему методом Гауса. Для цього перше рівняння помножимо на $\bar{z}_2$, друге – на $(z_1 - \lambda)$ і додамо їх. Маємо:

$z_2\bar{z}_2\zeta + (\bar{z}_1 - \lambda)(z_1 - \lambda)\,\zeta = 0.$

Тоді або $\zeta = 0$, або $z_2\bar{z}_2 + (\bar{z}_1 - \lambda)(z_1 - \lambda) = 0.$

Так як $\vec{x} = \binom{\eta}{\zeta} -$ власний вектор, то $\vec{x} = \binom{\eta}{\zeta} \neq 0$, тобто $\eta, \zeta \neq 0$. Тоді $z_2\bar{z}_2 + (\bar{z}_1 - \lambda)(z_1 - \lambda) = 0$. Розв'язавши це рівняння відносно λ, ми одержимо два корені $\lambda_{1,2} = q_0 \ \pm i|q \quad q_0|$, тобто

$$\forall \vec{x} = \binom{\eta}{\zeta} \neq 0, \eta \in \mathbb{C}, \zeta \in \mathbb{C}, \lambda_{1,2} = q_0 \ \pm i|q - q_0|.$$

Теорема про інтегральну формулу Коші для кватерніонів.

Нехай власні значення $\lambda = q_0 + i|q - q_0|, \ \bar{\lambda} = q_0 - i|q - q_0| \in \mathbb{C}$ кватерніона

$q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \in \mathbb{H}, \ q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}, \ q \neq q_0,$ де $|q - q_0| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2},$

лежать всередині простого замкнутого контура Γ□$\mathbb{C}$, орієнтованого в додатньому напрямку і нехай функція *f(z)* неперервна на Γ і аналітична всередині Γ. Тоді визначено кватерніонне значення функції *f(q)*, причому

$$f(q) = Re\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-\lambda}dz\right) + \frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-\lambda}dz\right). \qquad (1)$$

або

$$f(q) = Re\big(f(\lambda)\big) + \frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\big(f(\lambda)\big). \qquad (2)$$

де Re та Im, відповідно, дійсна та уявна частини від свого виразу.

Зауваження. Аналогічні формули можуть бути написані і для другого власного значення $\bar{\lambda}$ кватерніона *q*. А саме

$$f(q) = Re\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-\bar{\lambda}}dz\right) + \frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-\bar{\lambda}}dz\right). \qquad (1а)$$

і, відповідно,

$$f(q) = Re\left(f(\bar{\lambda})\right) + \frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\left(f(\bar{\lambda})\right). \qquad (2а)$$

Доведення.

Згідно інтегральної формули Коші для матриць (див. [6]):

якщо H □ ℂ (H – n*n вимірна квадратна матриця) має власні значення $\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_s$в Г, де Г – замкнутий контур, що включає в себе $\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_s$ і функція f – неперервна на Г і аналітична всередині Г, то

$$f(H) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(zE - H)^{-1}dz, \qquad (3)$$

де $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одинична матриця.

Відомо (див. [7]), що будь-якому кватерніону $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \in \mathbb{H}$ можна поставити у відповідність деяку матрицю *H*. А саме

$$H = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 + iq_1 & q_2 + iq_3 \\ -q_2 + iq_3 & q_0 - iq_1 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Обчислимо знаменник підінтегрального виразу (3), тобто

$$zE - H = z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_0 + iq_1 & q_2 + iq_3 \\ -q_2 + iq_3 & q_0 - iq_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_0 + iq_1 & q_2 + iq_3 \\ -q_2 + iq_3 & q_0 - iq_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} z \quad q_0 \quad iq_1 & q_2 \quad iq_3 \\ q_2 - iq_3 & z - q_0 + iq_1 \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Обернена величина цієї матриці, як відомо, буде дорівнювати:

$$(zE - H)^{-1} = \frac{1}{\det(zE-H)}\begin{pmatrix} z - q_0 + iq_1 & q_2 + iq_3 \\ -q_2 + iq_3 & z - q_0 - iq_1 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

де

$$\det(zE - H) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2), \qquad (7)$$

причому, характеристичні числа

$$\lambda_1 = \lambda = q_0 + i|q - q_0|,\ \lambda_2 = \bar{\lambda} = q_0 - i|q - q_0|. \qquad (8)$$

Тому:

$$\alpha_{11} = \frac{z - q_0 + iq_1}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)}, \alpha_{12} = \frac{q_2 + iq_3}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)},$$

$$\alpha_{21} = \frac{-q_2 + iq_3}{(z \quad \lambda_1)(z \quad \lambda_2)}, \alpha_{22} = \frac{z - q_0 - iq_1}{(z \quad \lambda_1)(z \quad \lambda_2)}.$$

Таким чином, знаючи обернену матрицю (6), можна обчислити шуканий інтеграл (3). Оскільки інтеграл від матриці (3) зводиться (за означенням)до почленного інтегрування елементів даної матриці, то нам треба всього лише обчислити чотири інтеграли, підставивши в (3) замість матриці (6) її елементи. Покажемо, що інтеграли для елементів матриці (6) зводяться до звичайних

інтегралів типу Коші для аналітичної функції $f\ (z) \in \Gamma$, в точках спектра

$\mathrm{Re}(f(\lambda)) \in \mathbb{R}$ матриці H.

Рівність (3) в матричній формі набуває вигляду:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(H) & f_{12}(H) \\ f_{21}(H) & f_{22}(H) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)\alpha_{11}dz & \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)\alpha_{12}dz \\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)\alpha_{21}dz & \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)\alpha_{22}dz \end{pmatrix}$$

Лема. Справедливі рівності:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{q_1}{|q - q_0|}\right)\frac{1}{(z - \lambda_1)} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{q_1}{|q - q_0|}\right)\frac{1}{(z - \lambda_2)},$$

$$\alpha_{12} = \frac{q_3 - iq_2}{2|q - q_0|}\left(\frac{1}{z - \lambda_1} - \frac{1}{z - \lambda_2}\right),$$

$$\alpha_{21} = \frac{q_3 + iq_2}{2|q - q_0|}\left(\frac{1}{z - \lambda_1} - \frac{1}{z - \lambda_2}\right),$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{q_1}{|q - q_0|}\right)\frac{1}{(z - \lambda_1)} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{q_1}{|q - q_0|}\right)\frac{1}{(z - \lambda_2)}.$$

Доведення.

Доведемо першу рівність.

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{q_1}{|q - q_0|}\right)\frac{1}{(z - \lambda_1)} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{q_1}{|q - q_0|}\right)\frac{1}{(z - \lambda_2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{|q - q_0| + q_1}{|q - q_0|}\right)\frac{1}{(z - \lambda_1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{|q - q_0| - q_1}{|q - q_0|}\right)\frac{1}{(z - \lambda_2)} =$$

$$= \frac{1}{2|q - q_0|}\left(\frac{|q - q_0|(z - \lambda_2) + q_1(z - \lambda_2) + |q - q_0|(z - \lambda_1) - q_1(z - \lambda_1)}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2|q - q_0|} * \frac{|q - q_0|z - |q - q_0|\lambda_2 + q_1(z - \lambda_2) + |q - q_0|z -}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)}$$

$$\frac{-|q - q_0|\lambda_1 - q_1 z - q_1\lambda_1}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)} =$$

$$= \frac{1}{2|q - q_0|} * \frac{2|q - q_0|z - |q - q_0|(q_0 - i|q - q_0|) +}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)}$$

$$\frac{+q_1(q_0 + i|q - q_0|) - q_1(q_0 - i|q - q_0|)}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)} =$$

$$= \frac{1}{2|q - q_0|} * \frac{2|q - q_0|z - |q - q_0|q_0 + i|q - q_0|^2 -}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)}$$

$$\frac{-q_0|q - q_0| - i|q - q_0|^2 + q_1 q_0 + iq_1|q - q_0| - q_1 q_0 + iq_1|q - q_0|}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)} =$$

$$= \frac{1}{2|q - q_0|}\frac{2|q - q_0|z - 2q_0|q - q_0| + 2i|q - q_0|q_1}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)} =$$

$$= \frac{z - q_0 + iq_1}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)}.$$

Отже, перша рівність доведена.

Аналогічно доводимо інші три рівності.

$$\alpha_{12} = \frac{q_3 - iq_2}{2|q - q_0|}\left(\frac{1}{z - \lambda_1} - \frac{1}{z - \lambda_2}\right) =$$

$$= \frac{q_3 - iq_2}{2|q - q_0|}\left(\frac{z - \lambda_2 - z + \lambda_1}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)}\right) =$$

$$= \frac{q_3 - iq_2}{2|q - q_0|}\left(\frac{z - q_0 + i|q - q_0| - z + q_0 + i|q - q_0|}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)}\right) =$$

$$= \frac{q_3 - iq_2}{2|q - q_0|} * \frac{2i|q - q_0|}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)} =$$

$$= \frac{i(q_3 - iq_2)}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)} =$$

$$= \frac{iq_3 + q_2}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}.$$

$$\alpha_{21} = \frac{q_3 + iq_2}{2|q-q_0|}\left(\frac{1}{z-\lambda_1} - \frac{1}{z-\lambda_2}\right) =$$

$$= \frac{q_3 + iq_2}{2|q-q_0|}\left(\frac{z - q_0 + i|q-q_0| - z + q_0 + i|q-q_0|}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}\right) =$$

$$= \frac{q_3 + iq_2}{2|q-q_0|} * \frac{2i|q-q_0|}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)} =$$

$$= \frac{i(q_3 + iq_2)}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)} =$$

$$= \frac{-q_2 + iq_3}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}.$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{q_1}{|q-q_0|}\right)\frac{1}{(z-\lambda_1)} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{q_1}{|q-q_0|}\right)\frac{1}{(z-\lambda_2)} =$$

$$= \frac{1}{2|q-q_0|}\left(\frac{|q-q_0| - q_1}{(z-\lambda_1)} + \frac{|q-q_0| + q_1}{(z-\lambda_2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2|q-q_0|} * \frac{|q-q_0|z - |q-q_0|q_0 + i|q-q_0|^2 -}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}$$

$$\frac{-q_1 z + q_1 q_0 - q_1|q-q_0| + |q-q_0|z - |q-q_0|q_0 -}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}$$

$$\frac{-i|q-q_0|^2 + q_1 z - q_1 q_0 - iq_1|q-q_0|}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)} =$$

$$= \frac{1}{2|q-q_0|} * \frac{2|q-q_0|(z - q_0 - iq_1)}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)} =$$

$$= \frac{z - q_0 - iq_1}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}.$$

Отже, лему повністю доведено.

Звідки слідує, що

$$f_{11}(H) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \alpha_{11} f(z)dz = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{q_1}{|q-q_0|}\right)f(\lambda_1) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{q_1}{|q-q_0|}\right)f(\lambda_2), \quad (9)$$

$$f_{12}(H) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \ \alpha_{12} f(z)dz = \frac{q_3 - iq_2}{2|q-q_0|}(f(\lambda_1) - f(\lambda_2)), \tag{10}$$

$$f_{21}(H) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \ \alpha_{21} f(z)dz = \frac{q_3 + iq_2}{2|q-q_0|}(f(\lambda_1) - f(\lambda_2)), \tag{11}$$

$$f_{22}(H) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \ \alpha_{22} f(z)dz = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{q_1}{|q-q_0|}\right)f(\lambda_1) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{q_1}{|q-q_0|}\right)f(\lambda_2). \tag{12}$$

Таким чином, ми знайшли всі компоненти (9)-(12) матриці $f\ (H)$ з (3). Наша задача тепер полягає в тому, щоб представити цю матрицю у вигляді (4), що дозволить перейти від матричного запису до кватерніонного. Для цього досить показати, що

$$f_{22}(H) = \overline{f_{11}(H)}; \tag{13}$$

$$f_{21}(H) = -\overline{f_{12}(H)}. \tag{14}$$

Дійсно, вводячи позначення для дійсних коефіцієнтів

$$a = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{q_1}{|q-q_0|}\right), \tag{15}$$

$$b = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{q_1}{|q-q_0|}\right), \tag{16}$$

одержуємо, що

$$\overline{f_{11}(H)} = \overline{af(\lambda_1) + bf(\lambda_2)} = \overline{af(\lambda_1) + bf\left(\overline{\lambda_1}\right)} = \overline{af(\lambda_1)} + \overline{bf\left(\overline{\lambda_1}\right)} =$$

$$= a\overline{f(\lambda_1)} + b\overline{f\left(\overline{\lambda_1}\right)} = af\overline{(\lambda_1)} + bf\overline{\left(\overline{\lambda_1}\right)} = af(\lambda_2) + bf(\lambda_1) = f_{22}(H). \tag{17}$$

Аналогічно при

$$c = \frac{q_3}{2|q\ \ q_0|}, \tag{18}$$

$$d = \frac{q_2}{2|q-q_0|}, \tag{19}$$

одержуємо, що

$$\overline{f_{12}(H)} = \overline{(c - id)\left(f(\lambda_1) - f\left(\overline{\lambda_1}\right)\right)} = \overline{(c - id)}\,\overline{\left(f(\lambda_1) - f\left(\overline{\lambda_1}\right)\right)} =$$

$$= (c + id)\overline{(f(\lambda_1)} - \overline{(f\left(\overline{\lambda_1}\right)} = (c + id)\left(f\left(\overline{\lambda_1}\right) - f\left(\overline{\overline{\lambda_1}}\right)\right); \tag{20}$$

або

$$\overline{f_{12}(H)} = (c + id)(f(\lambda_2) - f(\lambda_1)) = -(c + id)(f(\lambda_1) - f(\lambda_2)) = -f_{21}(H). \tag{21}$$

Отже, формули (13)-(14) доведені, а значить дійсна і уявна частини елементів (9)-(10) матриці $f\ (H)$ з формули (3) у відповідності з (4) представляють шукані компоненти кватерніонної функції $f\,(q) = f\,(q_0 + iq_1 + jq_2 +$

$kq_3) \in$ H. З урахуванням того, що $\lambda_1 = \lambda$; $\lambda_2 = \bar{\lambda}$ і, використовуючи позначення (15)-(16), знаходимо

$$f_{11}(H) = af(\lambda) + bf(\bar{\lambda}) = af(\lambda) + b\overline{f(\lambda)} =$$

$$= a\left(Re(f(\lambda)) + iIm(f(\lambda))\right) + b\left(Re(f(\lambda)) - iIm(f(\lambda))\right); \quad (22)$$

або

$$f_{11}(H) = (a+b)Re(f(\lambda)) + i(a-b)Im(f(\lambda))) =$$

$$= Re(f(\lambda)) + i\frac{q_1}{|q-q_0|}Im(f(\lambda))). \quad (23)$$

Далі, використовуючи позначення (18)-(19), отримаємо

$$f_{12}(H) = (c-id)\left(f(\lambda) - f(\bar{\lambda})\right) = (c-id)(f(\lambda) - \overline{f(\lambda)}) =$$

$$= (c-id)(2iIm(f(\lambda))) = 2(d+ic)Im(f(\lambda)); \quad (24)$$

або

$$f_{12}(H) = \frac{q_2}{|q-q_0|}Im(f(\lambda)) + i\frac{q_3}{|q-q_0|}Im(f(\lambda)). \quad (25)$$

Тепер, з комплексних чисел (22) і (24) ми можемо відокремити дійсну і уявну частини як компоненти кватерніона $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \in$ H, який можна представити у виді (4). Отримуємо, що

$$f(q) = Re(f(\lambda)) + i\frac{q_1}{|q-q_0|}Im(f(\lambda)) + j\frac{q_2}{|q-q_0|}Im(f(\lambda)) + k\frac{q_3}{|q-q_0|}Im(f(\lambda)). \quad (26)$$

або

$$f(q) = Re(f(\lambda)) + \frac{iq_1+jq_2+kq_3}{|q-q_0|}Im(f(\lambda)) = Re(f(\lambda)) + \frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im(f(\lambda)). \quad (27)$$

Отже, формула (2) доведена. Якщо ж нам невідомо комплексне значення функції $f(\lambda)$ для комплексного власного значення $\lambda = q_0 + i|q-q_0|$ кватерніона $q \in$H, то тоді ми можемо використати для обчислення $f(\lambda)$ інтегральну формулу Коші для комплексного змінного λ, і, у відповідності з умовами теореми одержити для (2) формулу (1).

Аналогічно можна одержати формули (1а) і (2а) чим і завершується доведення теореми.

Отримані формули (1) та (2) і спряжені до них формули (1а) та (2а) дозволяють ефективно обчислювати аналітичні в значенні (3) функції від кватерніонів.

Зауваження.

1. Комплексна і кватерніонна одиниця *i* повністю співпадають, так як кватерніони можна отримати подвоєнням комплексних чисел Келлі-Діксона (див., наприклад [7]), тому їх можна не розрізняти. Більше того, з урахуванням властивостей кватерніонної матриці *f(H)* з (3), яка представлена своїми компонентами (9)-(12), ми можемо записати для нашої кватерніонної функції

$$f(q) = f_{11}(H) + f_{12}(H)j, \tag{28}$$

де $f_{11}(H)$ і $f_{12}(H)$ – комплексні функції, які у вигляді (27), з урахуванням представлення (4) утворюють шуканий кватерніон $f(q)$, так як *ij=k*.

В розгорнутому вигляді вираз (28), з урахуванням (8), набуде вигляду

$$f(q) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{q_1}{|q-q_0|}\right)f(\lambda) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{q_1}{|q-q_0|}\right)f(\bar{\lambda}) + \left(\frac{q_2 - iq_3}{2|q-q_0|}\left(f(\lambda) - f(\bar{\lambda})\right)\right)j, \tag{29}$$

де $\lambda = q_0 + i|q - q_0|$, $\bar{\lambda} = q_0 - i|q - q_0| \in \mathbb{C}$ для кватерніона $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \in \mathbb{H}, q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$, $q \neq q_0$, де $|q - q_0| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$.

З урахуванням співвідношень (15)-(16) і (18)-(19) маємо

$$f(q) = af(\lambda) + bf(\bar{\lambda}) + (c - id)\left(f(\lambda) - f(\bar{\lambda})\right)j, \tag{30}$$

звідки після перетворень, з врахуванням тотожності $zj = j\bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$, отримаємо:

$$f(q) = \frac{f(\lambda) + f(\bar{\lambda})}{2} + \frac{q - q_0}{|q - q_0|}\frac{f(\lambda) + f(\bar{\lambda})}{2i}, \tag{31}$$

Формулу (31) можна також отримати безпосередньо із виразів (2) або (2a). Перевага запису (31) перед еквівалентними їй виразами (2) або (2a) в тому, що вона не містить в собі операторів Re та Im.

2. З формули (2) або (2a) випливає, якщо кватерніон є дійсним числом, то в уявній частині кватерніона виникає невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Такий випадок потребує особливої уваги.

2.1. Експоненціальна та логарифмічна функції кватерніонної змінної.

1. Експонента від кватерніона e^q.

Визначимо експоненту в кватерніонному просторі. Для цього скористаємося рівністю (2). Маємо:

$$f(q) = e^q = Re\left(e^{\lambda}\right) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im\left(e^{\lambda}\right)$$

або

$$e^{q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3} = Re\left(e^{q_0 + i|q - q_0|}\right) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im\left(e^{q_0 + i|q - q_0|}\right).$$

Знайдемо окремо значення $e^{q_0 + i|q - q_0|}$.

$$e^{q_0 + i|q - q_0|} = e^{q_0} e^{i|q - q_0|}.$$

Так як $e^{i|q - q_0|} \in \mathbb{C}$, а в комплексній області справедлива формула Ейлера, тому маємо:

$$e^{i|q - q_0|} = cos(|q - q_0|) + isin(|q - q_0|).$$

$$e^{q_0 + i|q - q_0|} = e^{q_0} e^{i|q - q_0|} = e^{q_0} cos(|q - q_0|) + ie^{q_0} sin(|q - q_0|).$$

$$e^{q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3} = Re\left(e^{q_0 + i|q - q_0|}\right) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im\left(e^{q_0 + i|q - q_0|}\right) =$$

$$= Re\left(e^{q_0} cos(|q - q_0|) + ie^{q_0} sin(|q - q_0|)\right) +$$

$$+ \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im\left(e^{q_0} cos(|q - q_0|) + ie^{q_0} sin(|q - q_0|)\right) =$$

$$= e^{q_0} cos(|q - q_0|) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} e^{q_0} sin(|q - q_0|) =$$

$$= e^{q_0} \left(cos(|q - q_0|) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} sin(|q - q_0|)\right).$$

Отже,

$$e^q = e^{q_0} \left(cos(|q - q_0|) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} sin(|q - q_0|)\right).$$

Зауваження.

Рівність $e^{q_0 + i|q - q_0|} = e^{q_0} e^{i|q - q_0|}$ справедлива. Проте $e^{q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3} \neq e^{q_0} e^{iq_1} e^{jq_2} e^{kq_3}$. Покажемо це.

Відомо, що

$$e^{iq_1} = cos(q_1) + isin(q_1),$$

$$e^{jq_2} = cos(q_2) + jsin(q_2),$$

$$e^{kq_3} = cos(q_3) + ksin(q_3).$$

Тоді

$$e^{q_0+iq_1+jq_2+kq_3} - e^{q_0}\big(cos(q_1) + isin(q_1)\big) * \big(cos(q_2) + jsin(q_2)\big) *$$
$$* \big(cos(q_3) + ksin(q_3)\big). \qquad (1)$$

З іншого боку

$$e^{q} = e^{q_0+iq_1+jq_2+kq_3} = e^{q_0}\left(cos(|q-q_0|) + \frac{q-q_0}{|q-q_0|}sin(|q-q_0|)\right).$$

Так як $q - q_0 = iq_1 + jq_2 + kq_3$, то

$$cos(|q-q_0|) + \frac{q-q_0}{|q-q_0|}sin(|q-q_0|) = cos(|q-q_0|) +$$

$$+i\frac{q_1}{|q-q_0|}sin(|q-q_0|) + j\frac{q_2}{|q-q_0|}sin(|q-q_0|) + k\frac{q_3}{|q-q_0|}sin(|q-q_0|).$$

Перемноживши добутки (1), одержимо:

$$\big(cos(q_1) + isin(q_1)\big) * \big(cos(q_2) + jsin(q_2)\big) * \big(cos(q_3) + isin(q_3)\big) -$$
$$=\big(cos(q_1)cos(q_2) + jcos(q_1)sin(q_2) + isin(q_1)cos(q_2) + ksin(q_1)sin(q_2)\big) *$$
$$* \big(cos(q_3) + ksin(q_3)\big) =$$
$$= cos(q_1)cos(q_2)cos(q_3) + jcos(q_1)sin(q_2)cos(q_3) +$$
$$+isin(q_1)cos(q_2)cos(q_3) + ksin(q_1)sin(q_2)cos(q_3) +$$
$$+ kcos(q_1)cos(q_2)sin(q_3) + i\,cos(q_1)sin(q_2)sin(q_3) +$$
$$-jsin(q_1)cos(q_2)sin(q_3) - sin(q_1)sin(q_2)sin(q_3).$$

В двох останніх рівностях прирівняємо відповідні коефіцієнти при *i, j, k*. Матимемо:

$$cos(|q-q_0|) = cos(q_1)cos(q_2)cos(q_3) - sin(q_1)sin(q_2)sin(q_3);$$

$$\frac{q_1}{|q-q_0|}sin(|q-q_0|) = sin(q_1)cos(q_2)cos(q_3) + cos(q_1)sin(q_2)sin(q_3);$$

$$\frac{q_2}{|q-q_0|}sin(|q-q_0|) = cos(q_1)sin(q_2)cos(q_3) - sin(q_1)cos(q_2)sin(q_3);$$

$$\frac{q_3}{|q-q_0|}sin(|q-q_0|) = sin(q_1)sin(q_2)cos(q_3) + cos(q_1)cos(q_2)sin(q_3).$$

Для того, щоб довести, що $e^{q_0+iq_1+jq_2+kq_3} \neq e^{q_0}e^{iq_1}e^{jq_2}e^{kq_3}$, досить показати, що хоч одна з наведених вище рівностей не виконується. Розглянемо першу рівність

$$cos(|q-q_0|) = cos(q_1)\,cos(q_2)\,cos(q_3) - sin(q_1)sin(q_2)sin(q_3).$$

Якщо $q_1 = q_2 = q_3 = 0$, то рівність виконується, тобто

$$cos(0) = cos(0)\,cos(0)\,cos(0) - sin(0)sin(0)sin(0).$$

Якщо ж $q_3 = 0$, а $q_1 = q_2$, то

$$cos(q_1\sqrt{2}) = cos(q_1)\,cos(q_1) = cos^2(q_1).$$

Таке рівняння має безліч розв'язків. Зобразимо це графічно (див. Рис. 1)

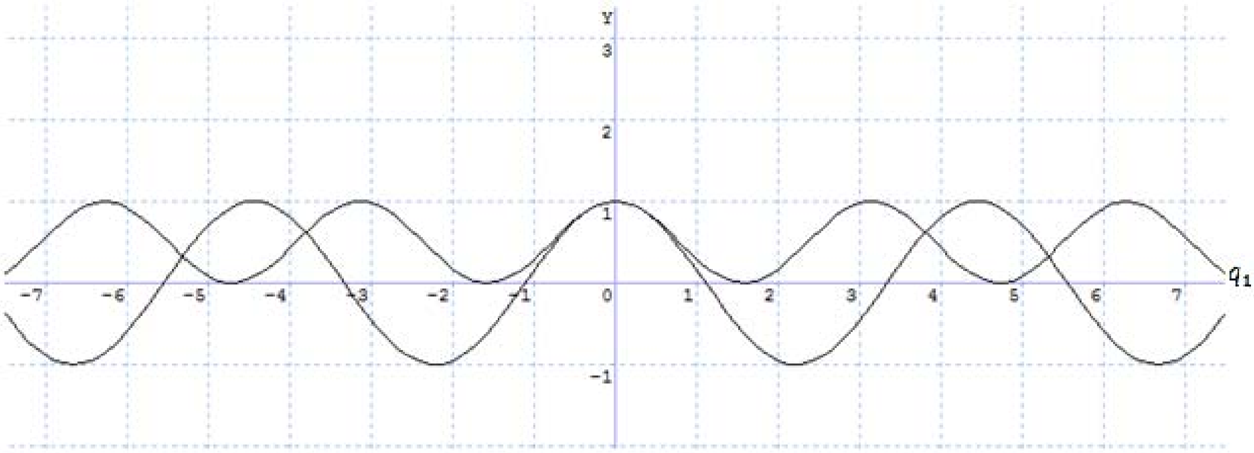

Рис 1.

Якщо ж $q_1 = q_2 = q_3$, то

$$\cos(q_1\sqrt{3}) = \cos(q_1)\cos(q_1)\cos(q_1) - sin(q_1)sin(q_1)sin(q_1).$$

Побудуємо графік даного рівняння (див. Рис. 2).

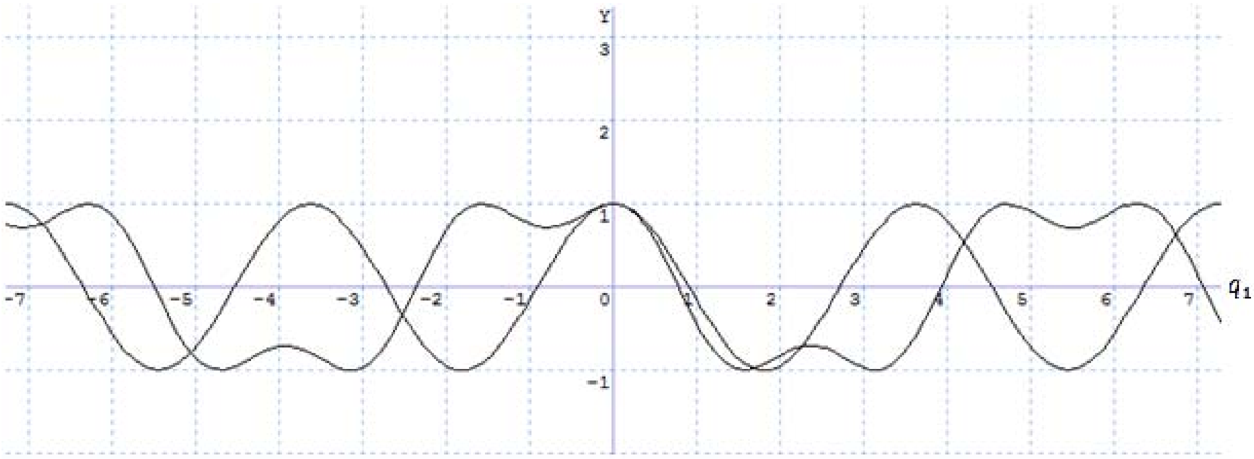

Рис 2.

Знову маємо безліч розв'язків.

Отже, ця рівність в частинних випадках має безліч точок, що співпадають, але співпадають не всі точки, тобто дана рівність не є тотожною. Тому і в загальному випадку рівність $\cos\left(\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}\right)=\cos(q_1)\cos(q_2)\cos(q_3)-sin(q_1)sin(q_2)sin(q_3)$, не виконується. Аналогічні міркування можна навести і щодо інших трьох рівностей.

Якщо розглядати показникову функцію e^q в кватерніонному просторі як суму степеневого ряду, то теорема додавання в ньому не виконується, тобто експонента суми не дорівнює добутку експонент:

$$e^q = e^{q_0+iq_1+jq_2+kq_3} \neq e^{q_0} * e^{iq_1} * e^{jq_2} * e^{kq_3},$$

хоча в комплексному аналізі ця теорема виконується.

Візьмемо два кватерніони q_1 і q_2. Тоді

$$e^{q_1+q_2} = \left(1+q_1+\frac{q_1^2}{2!}+\cdots\right) * \left(1+q_2+\frac{q_2^2}{2!}+\cdots\right) =$$

$$= 1+(q_1+q_2)+\left(q_1q_2+\frac{q_1^2}{2!}+\frac{q_2^2}{2!}\right)+\cdots =$$

$$= 1+(q_1+q_2)+\frac{1}{2!}(q_1^2+q_2^2+2q_1q_2)+\cdots.$$

Але

$$(q_1+q_2)^2 = q_1^2+q_2^2+q_1q_2+q_2q_1 \neq q_1^2+q_2^2+2q_1q_2.$$

Завдяки не комутативності кватерніонів маємо, що експонента суми кватерніонів не дорівнює добутку експонент.

2. Натуральний логарифм від кватерніона *Ln(q)*.

Визначимо натуральний логарифм. Для цього скористаємося рівністю (2). Маємо:

$$f(q) = Ln(q) = Re(Ln(\lambda)) + \frac{q-q_0}{|q-q_0|} Im(Ln(\lambda)).$$

Визначимо окремо $\mathrm{Ln}(\lambda)$. Так як $\lambda \in \mathbb{C}$, то

$$Ln(\lambda) = Ln(q_0 + t|q - q_0|) = ln|q_0 + t|q - q_0|| + targ(q_0 + t|q - q_0| + 2k\pi) =$$

$$= ln|q| + tarctg\left(\frac{|q - q_0|}{q_0} + 2k\pi\right).$$

Отже,

$$f(q) = Ln(q) = Re(Ln(\lambda)) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im(Ln(\lambda)) =$$

$$= Re\left(ln|q| + tarctg\left(\frac{|q - q_0|}{q_0} + 2k\pi\right)\right) +$$

$$+ \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im\left(ln|q| + tarctg\left(\frac{|q - q_0|}{q_0} + 2k\pi\right)\right) =$$

$$= ln|q| + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} arctg\left(\frac{|q - q_0|}{q_0} + 2k\pi\right).$$

2.2. Тригонометричні функції.

До основних тригонометричних функцій відносять: синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс та косеканс. Визначимо ці функції в кватерніонному просторі, використовуючи інтегральну формулу Коші для кватерніонів.

1. Синус кватерніона *sin(q)*.

$$f(q) = sin(q) = Re(sin(\lambda)) + \frac{q-q_0}{|q-q_0|} Im(sin(\lambda)) =$$

$$= Re(sin(q_0 + i|q-q_0|)) + \frac{q-q_0}{|q-q_0|} Im(sin(q_0 + i|q-q_0|)) =$$

$$= Re(sin(q_0)\,cos(i|q-q_0|) + cos(q_0) sin(i|q-q_0|)) +$$

$$+ \frac{q-q_0}{|q-q_0|} Im(sin(q_0)\,cos(i|q-q_0|) + cos(q_0)\,sin(i|q-q_0|)) =$$

$$= Re(sin(q_0)\,ch(|q-q_0|) + icos(q_0) sh(|q-q_0|)) +$$

$$+ \frac{q-q_0}{|q-q_0|} Im(sin(q_0)\,ch(|q-q_0|) + icos(q_0) sh(|q-q_0|)) =$$

$$= sin(q_0)\,ch(|q-q_0|)) + \frac{q-q_0}{|q-q_0|} cos(q_0) sh(|q-q_0|).$$

При доведенні ми скористалися відомими співвідношення з комплексного аналізу:

$$cos(i|q-q_0|) = ch(|q-q_0|);$$

$$sin(i|q-q_0|) = i\,sh(|q-q_0|).$$

Так як комплексна та кватерніонна уявна одиниця i повністю співпадають.

2. Косинус кватерніона *cos(q)*.

$$f(q) = cos(q) = Re(cos(\lambda)) + \frac{q-q_0}{|q-q_0|} Im(cos(\lambda)) =$$

$$= Re(cos(q_0 + i|q-q_0|)) + \frac{q-q_0}{|q-q_0|} Im(cos(q_0 + i|q-q_0|)) =$$

$$= Re(cos\,(q_0)\,cos(i|q-q_0|) - sin(q_0) sin(i|q-q_0|)) +$$

$$+ \frac{q-q_0}{|q-q_0|} Im(cos\,(q_0)\,cos(i|q-q_0|) - sin(q_0)\,sin(i|q-q_0|)) =$$

$$= Re(cos\,(q_0)\,ch(|q-q_0|) - isin(q_0) sh(|q-q_0|)) +$$

$$+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im(cos(q_0)ch(|q-q_0|)-isin(q_0)sh(|q-q_0|))=$$

$$=cos(q_0)\,ch(|q-q_0|)-\frac{q-q_0}{|q-q_0|}sin(q_0)\,sh(|q-q_0|).$$

3. Тангенс від кватерніона $tg(q)$.

$$f(q)=tg(q)=Re(tg(\lambda))+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im(tg(\lambda))=$$

Так як $tg(q)=\frac{sin(q)}{cos(q)}$,маємо

$$tg(\lambda)=tg(q_0+i|q-q_0|)=\frac{sin(q_0+i|q-q_0|)}{cos(q_0+i|q-q_0|)}=$$

$$=\frac{sin(q_0)ch^2(|q-q_0|)cos(q_0)+i\,sin^2(q_0)ch(|q-q_0|)sh(|q-q_0|)+}{cos^2(q_0)ch^2(|q-q_0|)+sin^2(q_0)sh^2(|q-q_0|)}$$

$$\frac{+icos^2(q_0)sh(|q-q_0|)ch(|q-q_0|)-cos(q_0)sin(q_0)sh^2(|q-q_0|)}{cos^2(q_0)ch^2(|q-q_0|)+sin^2(q_0)sh^2(|q-q_0|)}=$$

$$=\frac{sin(q_0)cos(q_0)(ch^2(|q-q_0|-sh^2(|q-q_0|))+}{cos^2(q_0)(1+sh^2(|q-q_0|))+sin^2(q_0)sh^2(|q-q_0|)}$$

$$\frac{+ich(|q-q_0|)sh(|q-q_0|)(sin^2(q_0)+cos^2(q_0))}{cos^2(q_0)+cos^2(q_0)sh^2(|q-q_0|)+sin^2(q_0)sh^2(|q-q_0|)}=$$

$$=\frac{sin(q_0)cos(q_0)+ich(|q-q_0|)sh(|q-q_0|)}{cos^2(q_0)+sh^2(|q-q_0|)}=$$

$$=\frac{sin(q_0)cos(q_0)}{cos^2(q_0)+sh^2(|q-q_0|)}+\frac{ich(|q-q_0|)sh(|q-q_0|)}{cos^2(q_0)+sh^2(|q-q_0|)}.$$

Отже,

$$tg(q)=Re(tg(q_0+i|q-q_0|))+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im(tg(q_0+i|q-q_0|))=$$

$$=Re\left(\frac{sin(q_0)cos(q_0)}{cos^2(q_0)+sh^2(|q-q_0|)}+\frac{ich(|q-q_0|)sh(|q-q_0|)}{cos^2(q_0)+sh^2(|q-q_0|)}\right)+$$

$$+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\left(\frac{sin(q_0)cos(q_0)}{cos^2(q_0)+sh^2(|q-q_0|)}+\frac{ich(|q-q_0|)sh(|q-q_0|)}{cos^2(q_0)+sh^2(|q-q_0|)}\right)=$$

$$=\frac{sin(q_0)cos(q_0)}{cos^2(q_0)+sh^2(|q-q_0|)}+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}*\frac{ch(|q-q_0|)sh(|q-q_0|)}{cos^2(q_0)+sh^2(|q-q_0|)}.$$

4. Котангенс від кватерніона $ctg(q)$.

$$f(q)=ctg(q)=Re(ctg(\lambda))+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im(ctg(\lambda))=$$

$$= Re\left(\frac{cos(q_0 + i|q - q_0|)}{sin(q_0 + i|q - q_0|)}\right) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im\left(\frac{cos(q_0 + i|q - q_0|)}{sin(q_0 + i|q - q_0|)}\right) =$$

$$= Re\left(\frac{cos(q_0)\, ch(|q - q_0|) - isin(q_0) sh(|q - q_0|)}{sin(q_0)\, ch(|q - q_0|) + icos(q_0) sh(|q - q_0|)}\right) +$$

$$+ \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im\left(\frac{cos(q_0)\, ch(|q - q_0|) - isin(q_0) sh(|q - q_0|)}{sin(q_0)\, ch(|q - q_0|) + icos(q_0) sh(|q - q_0|)}\right) =$$

$$= Re\left(\frac{(cos(q_0)\, ch(|q - q_0|) - isin(q_0)\, sh(|q - q_0|) * (sin(q_0)\, ch(|q - q_0|) -}{sin^2(q_0) ch^2(|q - q_0|) + cos^2(q_0) sh^2(|q - q_0|)}\right.$$

$$\left.\frac{-icos(q_0) sh(|q - q_0|))}{sin^2(q_0) ch^2(|q - q_0|) + cos^2(q_0) sh^2(|q - q_0|)}\right) +$$

$$+ \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im\left(\frac{(cos(q_0)\, ch(|q - q_0|) - isin(q_0)\, sh(|q - q_0|) *}{sin^2(q_0) ch^2(|q - q_0|) + cos^2(q_0) sh^2(|q - q_0|)}\right.$$

$$\left.\frac{* (sin(q_0) ch(|q - q_0|) - icos(q_0) sh(|q - q_0|))}{sin^2(q_0) ch^2(|q - q_0|) + cos^2(q_0) sh^2(|q - q_0|)}\right) =$$

$$= Re\left(\frac{cos(q_0)\, sin(q_0) ch^2(|q - q_0|) + i\, cos^2(q_0)\, ch(|q - q_0|)\, sh(|q - q_0|) -}{sin^2(q_0) ch^2(|q - q_0|) + cos^2(q_0) sh^2(|q - q_0|)}\right.$$

$$\left.\frac{-sin^2(q_0)\, ch(|q - q_0|)\, sh(|q - q_0|) + sin(q_0) cos(q_0)\, sh^2(|q - q_0|)}{sin^2(q_0) ch^2(|q - q_0|) + cos^2(q_0) sh^2(|q - q_0|)}\right) +$$

$$+ \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im\left(\frac{cos(q_0)\, sin(q_0) ch^2(|q - q_0|) + i\, cos^2(q_0)\, ch(|q - q_0|)\, sh(|q - q_0|) -}{sin^2(q_0) ch^2(|q - q_0|) + cos^2(q_0) sh^2(|q - q_0|)}\right.$$

$$\left.\frac{-sin^2(q_0)\, ch(|q - q_0|)\, sh(|q - q_0|) + sin(q_0) cos(q_0)\, sh^2(|q - q_0|)}{sin^2(q_0) ch^2(|q - q_0|) + cos^2(q_0) sh^2(|q - q_0|)}\right) =$$

$$= Re\left(\frac{cos(q_0)\, sin(q_0) (ch^2(|q - q_0|) - sh^2(|q - q_0|)) +}{sin^2(q_0) ch^2(|q - q_0|) + cos^2(q_0) sh^2(|q - q_0|)}\right.$$

$$\left.\frac{+i\, ch(|q - q_0|)\, sh(|q - q_0|) (cos^2(q_0) + sin^2(q_0))}{sin^2(q_0) ch^2(|q - q_0|) + cos^2(q_0) sh^2(|q - q_0|)}\right) +$$

$$+ \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im\left(\frac{cos(q_0) sin(q_0) (ch^2(|q - q_0|) - sh^2(|q - q_0|)) +}{sin^2(q_0) ch^2(|q - q_0|) + cos^2(q_0) sh^2(|q - q_0|)}\right.$$

$$\left.\frac{+i\, ch(|q - q_0|)\, sh(|q - q_0|) (cos^2(q_0) + sin^2(q_0))}{sin^2(q_0) ch^2(|q - q_0|) + cos^2(q_0) sh^2(|q - q_0|)}\right) =$$

$$= Re\left(\frac{cos(q_0)\, sin(q_0) + i\, ch(|q - q_0|)\, sh(|q - q_0|)}{sin^2(q_0) + sin^2(q_0) sh^2(|q - q_0|) + cos^2(q_0) sh^2(|q - q_0|)}\right) +$$

$$+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\left(\frac{cos\,(q_0)\,sin(q_0)+i\,ch(|q-q_0|)\,sh(|q-q_0|)}{sin^2(q_0)+sin^2(q_0)sh^2(|q-q_0|)+cos^2(q_0)sh^2(|q-q_0|)}\right)=$$

$$=\frac{cos\,(q_0)\,sin(q_0)}{sin^2(q_0)+sh^2(|q-q_0|)}+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}*\frac{ch(|q-q_0|)\,sh(|q-q_0|)}{sin^2(q_0)+sh^2(|q-q_0|)}.$$

5. Секанс від кватерніона $sec(q)$.

$$f(q)=sec(q)=Re(sec(\lambda))+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im(sec(\lambda))=$$

$$=Re\left(\frac{1}{cos(q_0+i|q-q_0|)}\right)+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\left(\frac{1}{cos(q_0+i|q-q_0|)}\right)=$$

$$=Re\left(\frac{1}{cos\,(q_0)\,ch(|q-q_0|)-isin(q_0)sh(|q-q_0|)}\right)+$$

$$+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\left(\frac{1}{cos\,(q_0)\,ch(|q-q_0|)-isin(q_0)sh(|q-q_0|)}\right)=$$

$$=Re\left(\frac{cos\,(q_0)\,ch(|q-q_0|)+isin(q_0)sh(|q-q_0|)}{cos^2(q_0)+cos^2(q_0)sh^2(|q-q_0|)+sin^2(q_0)sh^2(|q-q_0|)}\right)+$$

$$+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\left(\frac{cos\,(q_0)\,ch(|q-q_0|)+isin(q_0)sh(|q-q_0|)}{cos^2(q_0)+cos^2(q_0)sh^2(|q-q_0|)+sin^2(q_0)\,sh^2(|q-q_0|)}\right)=$$

$$=Re\left(\frac{cos\,(q_0)\,ch(|q-q_0|)+isin(q_0)sh(|q-q_0|)}{cos^2(q_0)+sh^2(|q-q_0|)}\right)+$$

$$+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\left(\frac{cos\,(q_0)\,ch(|q-q_0|)+isin(q_0)sh(|q-q_0|)}{cos^2(q_0)+sh^2(|q-q_0|)}\right)=$$

$$=\frac{cos\,(q_0)\,ch(|q-q_0|)}{cos^2(q_0)+sh^2(|q-q_0|)}+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}*\frac{sin(q_0)sh(|q-q_0|)}{cos^2(q_0)+sh^2(|q-q_0|)}.$$

6. Косеканс від кватерніона $csc(q)$.

$$f(q)=csc(q)=Re(csc(\lambda))+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im(csc(\lambda))=$$

$$=Re\left(\frac{1}{sin(q_0+i|q-q_0|)}\right)+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\left(\frac{1}{sin(q_0+i|q-q_0|)}\right)=$$

$$=Re\left(\frac{1}{sin\,(q_0)\,ch(|q-q_0|)+icos(q_0)sh(|q-q_0|)}\right)+$$

$$+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\left(\frac{1}{sin\,(q_0)\,ch(|q-q_0|)+icos(q_0)sh(|q-q_0|)}\right)=$$

$$=Re\left(\frac{sin(q_0)\,ch(|q-q_0|)-icos(q_0)sh(|q-q_0|)}{sin^2(q_0)+sin^2(q_0)sh^2(|q-q_0|)+cos^2(q_0)sh^2(|q-q_0|)}\right)+$$

$$+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\left(\frac{sin(q_0)\,ch(|q-q_0|)-icos(q_0)sh(|q-q_0|)}{sin^2(q_0)+sin^2(q_0)sh^2(|q-q_0|)+cos^2(q_0)sh^2(|q-q_0|)}\right)=$$

$$=Re\left(\frac{sin(q_0)\,ch(|q-q_0|)-icos(q_0)sh(|q-q_0|)}{sin^2(q_0)+sh^2(|q-q_0|)}\right)+$$

$$+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\left(\frac{sin(q_0)\,ch(|q-q_0|)-icos(q_0)sh(|q-q_0|)}{sin^2(q_0)+sh^2(|q-q_0|)}\right)=$$

$$=\frac{sin(q_0)\,ch(|q-q_0|)}{sin^2(q_0)+sh^2(|q-q_0|)}+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}*\frac{cos(q_0)sh(|q-q_0|)}{sin^2(q_0)+sh^2(|q-q_0|)}.$$

Зауваження. Якщо порівняти підхід Байрака до побудови тригонометричних аналітичних функцій кватерніонної змінної із підходом Вейєрштраса побудови тригонометричних аналітичних функцій комплексної змінної, то приходимо до висновку, що ці підходи рівносильні. Для цього досить показати, що співпадають синус та косинус.

2.3. Гіперболічні функції.

До основних гіперболічних функцій відносять: гіперболічні синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс та косеканс. Визначимо ці функції в кватерніонному просторі, використовуючи інтегральну формулу Коші для кватерніонів.

1. Гіперболічний синус від кватерніона $sh(q)$.

$$f(q) = sh(q) = Re(sh(\lambda)) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im(sh(\lambda)) =$$

$$= Re(sh(q_0 + i|q - q_0|)) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im(sh(q_0 + i|q - q_0|)) =$$

Так як

$$sin(i(q_0 + i|q - q_0|)) = ish(q_0 + i|q - q_0|);$$

$$isin(i(q_0 + i|q - q_0|)) = i^2 sh(q_0 + i|q - q_0|);$$

$$isin(i(q_0 + i|q - q_0|)) = -sh(q_0 + i|q - q_0|),$$

то

$$sh(q_0 + i|q - q_0|) = -isin(iq_0 + i^2|q - q_0|) = -isin(iq_0 - |q - q_0|).$$

Отже, гіперболічний синус можна звести до звичайного синуса. Маємо:

$$sh(q) = Re(sh(q_0 + i|q - q_0|)) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im(sh(q_0 + i|q - q_0|)) =$$

$$= Re\big(-isin(iq_0 - |q - q_0|)\big) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im\big(-isin(iq_0 - |q - q_0|)\big) =$$

$$= Re(-i(sin(iq_0)\,cos(|q - q_0|) - cos(iq_0)sin|q - q_0|)) +$$

$$+ \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im(-i(sin(iq_0)\,cos(|q - q_0|) - cos(iq_0)sin|q - q_0|)) =$$

$$= Re(-i(i\,sh(q_0)\,cos(|q - q_0|) - ch(q_0)sin|q - q_0|)) +$$

$$+ \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im(-i(i\,sh(q_0)\,cos(|q - q_0|) - ch(q_0)sin|q - q_0|)) =$$

$$= Re(sh(q_0)\,cos(|q - q_0|) + ich(q_0)sin|q - q_0|) +$$

$$+ \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im(sh(q_0)\,cos(|q - q_0|) + ich(q_0)sin|q - q_0|) =$$

$$= sh(q_0)\,cos(|q - q_0|) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} ch(q_0)sin|q - q_0|.$$

2. Гіперболічний косинус від кватерніона $ch(q)$.

Аналогічно, як був зведений гіперболічний синус до синуса, так само можна звести гіперболічний косинус до косинуса. Для цього скористаємося відомою формулою комплексного аналізу:

$$cos\big(i(q_0 + i|q - q_0|)\big) = ch(q_0 + i|q - q_0|);$$

$$ch(q_0 + i|q - q_0|) = cos(iq_0 + i^2|q - q_0|) = cos(iq_0 - |q - q_0|).$$

Отже,

$$f(q) = ch(q) = Re(ch(\lambda)) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im(ch(\lambda)) =$$

$$= Re(ch(q_0 + i|q - q_0|)) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im(ch(q_0 + i|q - q_0|)) =$$

$$= Re\big(cos(iq_0 - |q - q_0|)\big) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im\big(cos(iq_0 - |q - q_0|)\big) =$$

$$= Re(cos(iq_0)\,cos(|q - q_0|) + sin(iq_0)\,sin(|q - q_0|)) +$$

$$+ \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im(cos(iq_0)\,cos(|q - q_0|) + sin(iq_0)\,sin(|q - q_0|)) =$$

$$= Re(ch(q_0)\,cos(|q - q_0|) + ish(q_0)\,sin(|q - q_0|)) +$$

$$+ \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im(ch(q_0)\,cos(|q - q_0|) + ish(q_0)\,sin(|q - q_0|)) =$$

$$= ch(q_0)\,cos(|q - q_0|) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} sh(q_0)\,sin(|q - q_0|).$$

3. Гіперболічний тангенс від кватерніона *th(q)*.

$$f(q) = th(q) = Re\big(th(\lambda)\big) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im\big(th(\lambda)\big).$$

Так як $th(q) = -itg(iq)$, то

$$th(\lambda) = -itg(i\lambda) = -itg(i(q_0 + i|q - q_0|)) =$$

$$= -itg(iq_0 - |q - q_0|)) = -i\frac{sin(iq_0 - |q - q_0|)}{cos(iq_0 - |q - q_0|)}.$$

$$th(q) = \frac{1}{ch^2(q_0) + sin^2|q - q_0|} + \left(sh(q_0)\,ch(q_0) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|}\right) sin(|q - q_0|)\,cos(|q - q_0|).$$

4. Гіперболічний котангенс від кватерніона *cth(q)*.

$$f(q) = cth(q) = Re\big(cth(\lambda)\big) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im\big(cth(\lambda)\big) =$$

$$= Re\left(\frac{ch(\lambda)}{sh(\lambda)}\right) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im\left(\frac{ch(\lambda)}{sh(\lambda)}\right) =$$

$$= Re\left(\frac{ch(q_0)\,cos(|q-q_0|)+ish(q_0)\sin(|q-q_0|)}{sh(q_0)\,cos(|q-q_0|)+ich(q_0)\sin(|q-q_0|)}\right)+$$

$$+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\left(\frac{ch(q_0)\,cos(|q-q_0|)+ish(q_0)\,sin(|q-q_0|)}{sh(q_0)\,cos(|q-q_0|)+ich(q_0)\sin(|q-q_0|)}\right)=$$

$$= Re\left(\frac{ch(q_0)\,sh(q_0)(cos^2(|q-q_0|)+sin^2(|q-q_0|))-}{sh^2(q_0)\,cos^2(|q-q_0|)+ch^2(q_0)sin^2(|q-q_0|)}\right.$$

$$\left.\frac{-i\,cos(|q-q_0|)\,sin(|q-q_0|)\left(ch^2(q_0)-sh^2(q_0)\right)}{sh^2(q_0)\,cos^2(|q-q_0|)+ch^2(q_0)sin^2(|q-q_0|)}\right)+$$

$$+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\left(\frac{ch(q_0)\,sh(q_0)(cos^2(|q-q_0|)+sin^2(|q-q_0|))-}{sh^2(q_0)\,cos^2(|q-q_0|)+ch^2(q_0)sin^2(|q-q_0|)}\right.$$

$$\left.\frac{-i\,cos(|q-q_0|)\,sin(|q-q_0|)\left(ch^2(q_0)-sh^2(q_0)\right)}{sh^2(q_0)\,cos^2(|q-q_0|)+ch^2(q_0)sin^2(|q-q_0|)}\right)=$$

$$= Re\left(\frac{ch(q_0)\,sh(q_0)-icos(|q-q_0|)\,sin(|q-q_0|)}{sh^2(q_0)+sin^2(|q-q_0|)}\right)+$$

$$+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\left(\frac{ch(q_0)\,sh(q_0)-icos(|q-q_0|)\,sin(|q-q_0|)}{sh^2(q_0)+sin^2(|q-q_0|)}\right)=$$

$$=\frac{ch(q_0)\,sh(q_0)}{sh^2(q_0)+sin^2(|q-q_0|)}+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}*\frac{-cos(|q-q_0|)\,sin(|q-q_0|)}{sh^2(q_0)+sin^2(|q-q_0|)}.$$

5. Гіперболічний секанс від кватерніона *sch(q)*.

$$f(q)=sch(q)=Re(sch(\lambda))+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im(sch(\lambda))=$$

$$= Re\left(\frac{1}{ch(\lambda)}\right)+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\left(\frac{1}{ch(\lambda)}\right)=$$

$$= Re\left(\frac{1}{ch(q_0)\,cos(|q-q_0|)+ish(q_0)\sin(|q-q_0|)}\right)+$$

$$+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\left(\frac{1}{ch(q_0)\,cos(|q-q_0|)+ish(q_0)\sin(|q-q_0|)}\right)=$$

$$= Re\left(\frac{ch(q_0)\,cos(|q-q_0|)-ish(q_0)\sin(|q-q_0|)}{ch^2(q_0)\,cos^2(|q-q_0|)+sh^2(q_0)\sin^2(|q-q_0|)}\right)+$$

$$+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\left(\frac{ch(q_0)\,cos(|q-q_0|)-ish(q_0)\sin(|q-q_0|)}{ch^2(q_0)\,cos^2(|q-q_0|)+sh^2(q_0)\sin^2(|q-q_0|)}\right)=$$

$$= Re\left(\frac{ch(q_0)\,cos(|q-q_0|)-ish(q_0)\sin(|q-q_0|)}{cos^2(|q-q_0|)+sh^2(q_0)}\right)+$$

$$+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\left(\frac{ch(q_0)\,cos(|q-q_0|)-ish(q_0)\sin(|q-q_0|)}{cos^2(|q-q_0|)+sh^2(q_0)}\right)=$$

$$=\frac{ch(q_0)\,cos(|q-q_0|)}{cos^2(|q-q_0|)+sh^2(q_0)}+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}*\frac{-sh(q_0)\sin(|q-q_0|)}{cos^2(|q-q_0|)+sh^2(q_0)}.$$

6. Гіперболічний косеканс від кватерніона *csch(q).*

$$f(q)=csch(q)=Re\big(csch(\lambda)\big)+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\big(csch(\lambda)\big)=$$

$$=Re\left(\frac{1}{sh(\lambda)}\right)+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\left(\frac{1}{sh(\lambda)}\right)=$$

$$=Re\left(\frac{1}{sh(q_0)\,cos(|q-q_0|)+ich(q_0)\sin(|q-q_0|)}\right)+$$

$$+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\left(\frac{1}{sh(q_0)\,cos(|q-q_0|)+ich(q_0)\sin(|q-q_0|)}\right)=$$

$$=Re\left(\frac{sh(q_0)\,cos(|q-q_0|)-ich(q_0)\sin(|q-q_0|)}{sh^2(q_0)+sin^2(|q-q_0|)}\right)+$$

$$+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\left(\frac{sh(q_0)\,cos(|q-q_0|)-ich(q_0)\sin(|q-q_0|)}{sh^2(q_0)+sin^2(|q-q_0|)}\right)=$$

$$=\frac{sh(q_0)\,cos(|q-q_0|)}{sh^2(q_0)+sin^2(|q-q_0|)}+\frac{q-q_0}{|q-q_0|}*\frac{-ch(q_0)\sin(|q-q_0|)}{sh^2(q_0)+sin^2(|q-q_0|)}.$$

Зауваження. Якщо порівняти підхід Байрака до побудови гіперболічних аналітичних функцій кватерніонної змінної із підходом Вейєрштраса побудови гіперболічних аналітичних функцій комплексної змінної, то приходимо до висновку, що ці підходи рівносильні. Для цього досить показати, що співпадають гіперболічний синус та гіперболічний косинус.

2.4. Степенева кватерніонна функція з показником 2, $\frac{1}{2}$, -1.

1. Квадратний корінь від кватерніона $\sqrt{q}$.

$$f(q) = \sqrt{q} = Re\left(\sqrt{\lambda}\right) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im\left(\sqrt{\lambda}\right) =$$

$$= Re\left(\sqrt{q_0 + i|q - q_0|}\right) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im\left(\sqrt{q_0 + i|q - q_0|}\right) =$$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{|q| + q_0}{2}}\right) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|}\left(\sqrt{\frac{|q| - q_0}{2}}\right).$$

2. Квадрат кватерніона q^2.

$$f(q) = q^2 = Re(\lambda^2) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im(\lambda^2) =$$

$$= Re(\lambda^2) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im(\lambda^2) =$$

$$= Re((q_0 + i|q - q_0|)^2) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im((q_0 + i|q - q_0|)^2) =$$

$$= Re(q_0{}^2 + 2iq_0|q - q_0| - |q - q_0|^2) +$$

$$+ \frac{q - q_0}{|q - q_0|} Im(q_0{}^2 + 2iq_0|q - q_0| - |q - q_0|^2) =$$

$$= q_0{}^2 - |q - q_0|^2 + \frac{q - q_0}{|q - q_0|} 2q_0|q - q_0|.$$

Піднесемо кватерніон до квадрату. Тобто:

$$q^2 = (q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3)^2 = q_0{}^2 + iq_0q_1 + jq_0q_2 + kq_0q_3 +$$

$$+ iq_1q_0 - q_1{}^2 + kq_1q_2 - jq_1q_3 + jq_2q_0 - kq_2q_1 - q_2{}^2 + iq_2q_3 +$$

$$+ kq_3q_0 + jq_3q_1 - iq_3q_2 - q_3{}^2 =$$

$$= q_0{}^2 - q_1{}^2 - q_2{}^2 - q_3{}^2 + i(q_0q_1 + q_1q_0 + q_2q_3 - q_3q_2) +$$

$$+ j(q_0q_2 - q_1q_3 + q_2q_0 + q_3q_1) + k(q_0q_3 + q_1q_2 - q_2q_1 + q_3q_0) =$$

$$= q_0{}^2 - |q - q_0|^2 + i(q_0q_1 + q_1q_0 + q_2q_3 - q_3q_2) +$$

$$+ j(q_0q_2 - q_1q_3 + q_2q_0 + q_3q_1) + k(q_0q_3 + q_1q_2 - q_2q_1 + q_3q_0).$$

Порівнюючи отриману формулу з попередньою, помічаємо, що дійсні частини цих формул однакові. Перевіримо, чи співпадають уявні частини. Спростимо уявну частину. З формули Байрака, маємо:

$$\frac{q-q_0}{|q-q_0|}2q_0|q-q_0| = 2iq_1q_0 + 2jq_2q_0 + 2kq_3q_0.$$

Прирівняємо коефіцієнти при *i, j, k*. Тобто:

$$q_0q_1 + q_1q_0 + q_2q_3 - q_3q_2 = 2q_1q_0;$$

$$q_0q_2 - q_1q_3 + q_2q_0 + q_3q_1 = 2q_2q_0;$$

$$q_0q_3 + q_1q_2 - q_2q_1 + q_3q_0 = 2q_3q_0.$$

Очевидно, що ці рівності виконуються. Отже, формули побудови аналітичних функцій і за Байраком і за Вейєрштрасом рівносильні.

3. Обернений кватерніон.

$$f(q) = q^{-1} = Re(\lambda^{-1}) + \frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im(\lambda^{-1}).$$

Окремо знайдемо λ^{-1}.

$$\lambda^{-1} = (q_0 + i|q-q_0|)^{-1} = \frac{1}{q_0 + i|q-q_0|} = \frac{q_0 - i|q-q_0|}{(q_0 + i|q-q_0|)(q_0 - i|q-q_0|)} =$$

$$= \frac{q_0 - i|q-q_0|}{q_0^2 + |q-q_0|^2} = \frac{q_0 - i|q-q_0|}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = \frac{q_0 - i|q-q_0|}{|q|^2} =$$

$$= \frac{q_0}{|q|^2} - i\frac{|q-q_0|}{|q|^2}.$$

Отже,

$$f(q) = q^{-1} = Re\left(\frac{q_0}{|q|^2} - i\frac{|q-q_0|}{|q|^2}\right) + \frac{q-q_0}{|q-q_0|}Im\left(\frac{q_0}{|q|^2} - i\frac{|q-q_0|}{|q|^2}\right) =$$

$$= \frac{q_0}{|q|^2} + \frac{q-q_0}{|q-q_0|} * \left(-\frac{|q-q_0|}{|q|^2}\right) = \frac{q_0}{|q|^2} - \frac{q-q_0}{|q|^2} = \frac{q_0 - q + q_0}{|q|^2} = \frac{2q_0 - q}{|q|^2}.$$

Висновки

В даній роботі розкрито суть поняття «кватерніон», описано його подання у різних формах, сформульовано основні властивості та операції над кватерніонами. Введено поняття функції від кватерніона та побудовано аналітичні функції з використанням узагальненої інтегральної формули Коші для матриць. В роботі також доведено, що експонента суми кватерніонів не дорівнює добутку експонент. Під час доведення факту, що не виконується теорема додавання для кватерніонної експоненти, отримано нову систему функціональних рівнянь.

Використовуючи матричне представлення кватерніона, в ході дослідження сформульовано і доведено теорему про власні комплексні значення кватерніона, і теорему про інтегральну формулу Коші для кватерніонів.

Для прикладу у дипломній роботі побудовано експоненціальну, логарифмічну функції; тригонометричні та гіперболічні функції, а також степеневу функцію з показником 2, $\frac{1}{2}$, -1.

Мій особистий вклад в цю роботу, полягає у тому, що я спробувала порівняти аналітичні функції, побудовані методом Леоніда Байрака, співпадають з такими ж функціями, визначеними як суми степеневих рядів за формулами комплексного аналізу. Порівнявши основні елементарні функції: експоненту, квадрат кватерніона, синус, косинус, синус гіперболічний та косинус гіперболічний, виявила, що ці підходи рівносильні.

Список використаних джерел

1. http://e-science.ru/forum/index.php?showtopic=21283

2. http://ru.wikipedia.org/wiki/Собственный_вектор

3. http://techlibrary.ru/b/2k1p1r1e1f1f1c_2j.2v._2s1c1a1t1f1r1o1j1p1o2c_1j_1t1r1f1w1n1f1r1o1a2g_1d1f1p1n1f1t1r1j2g._2012.pdf

4. Балк М. Б., Балк Г. Д., Полухин А. А.. Реальные применения мнимых чисел. / М. Б. Балк, Г. Д. Балк, А. А. Полухин. — К.: Рад. шк., 1988. — 255 с.

5. Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. / И. Л. Кантор, А. С. Солодовников — М.: Наука, 1973. — 144 с.

6. Ланкастер П. «Теория матриц» / П. Ланкастер. — М.: Наука, 1973. — 282 с.

7. Сильвестров В.В.Системы чисел // Соросовский образовательный журнал. 1998. № 8. С. 121-127.