Міністерство освіти і науки України

Житомирський державний університет ім. І. Франка

Фізико-математичний факультет

кафедра математичного аналізу

ДИПЛОМНА РОБОТА

на тему:

ДЕЯКІ ОЦІНКИ КОЕФІЦІЄНТІВ ОДНОЛИСТИХ ФУНКЦІЙ

Виконала:
студентка 51-в групи
фізико-математичного
факультету Грищук В.І.

Керівник:
кандидат фізико-математичних
наук, доцент Таргонський А.Л.

Житомир 2014

ЗМІСТ

Вступ.

Проблема коефіцієнтів однолистих функцій грає на протязі багатьох років дуже важливу роль у геометричний теорії функцій комплексного змінного. Як добре відомо, для функцій

$$f(z) = z + c_2 z^2 + ...$$

з класу S вона полягає у визначені для кожного $n \geq 2$ області значень системи коефіцієнтів $\{c_2, c_3, ..., c_n\}$ функцій цього класу. Частковим випадком цієї проблеми є задача знаходження точних оцінок коефіцієнтів, що відноситься до відомої проблеми Бібербаха.

Метою роботи є дослідження однолистих та регулярних функцій або в одиничному крузі, або поза цим кругом, та отримання оцінок їх коефіцієнтів (бажано, по можливості, точних).

Об'єктами дослідження є коефіцієнти регулярних та однолистих функції або в одиничному крузі, або поза цим кругом.

Предметом дослідження є знаходження оцінок для коефіцієнтів однолистих та регулярних функцій.

Для розв'зування такого роду задач працюють багато методів теорії функцій, зокрема параметричний метод, метод варіації, метод квадратичних диференціалів, метод екстремальних метрик та інші.

Результати роботи мають теоретичний характер. Своє практичне застосування подібні результати знаходять у багатьох розділах науки та техніки, зокрема безпосередньо у теорії функцій, теоретичний фізиці, голоморфній динаміці та інших.

Робота складається з вступу, деяких понять та теорем комплексного аналізу, які використовуються у роботі, основної частини, висновку, списку використаних джерел, та анотації на українській, російській та англійській мовах. Основна частина складається з шести розділів у ній, в основному, розглядаються оцінки коефіцієнтів функцій з класу S. Причому деякі з цих оцінок не є точними та їх, можливо, можно покращити. Крім того, наведено застосування оцінок коефіцієнтів до доведення деяких теорем покриття, зокрема теореми Кьобе, до знаходження нерівностей для модуля функції, модуля та аргументу її похідної. Також, наведено застосування оцінок коефіцієнтів до деяких питань опуклих та зіркоподібних областей.

Деякі поняття та теореми комплексного аналізу.

Тут ми введемо найбільш фундаментальні поняття теорії функцій комплексного змінного: поняття функції комплексного змінного, її границі, похідної та поняття аналітичної функції. Центральне місце займає теорема, яка встановлює умови диференціовності функції комплексного змінного. Ці умови прийнято називати *умовами Коші-Рімана*, але задовго до Коші та Рімана вони використовувались в роботах Даламбера та Ейлера. Тому ми будемо, також, їх називати *умовами Даламбера-Ейлера.*

Зараз наведемо деякі означення.

Означення. *Областю на комплексній площині називають множину D точок, яка задовольняє наступним властивостям:*

1) разом з кожною точкою з D цій множині належить і достатньо малий круг з центром в цій точці (властивість відкритості),

2) будь-які дві точки D можно з'єднати ламаною, всі точки якої належать D (властивість зв'язності).

Простими прикладами областей можуть служити околи точок на комплексній площині.

Означення. *Під ε-околом точки a розуміють відкритий круг радіусу ε з центром в цій точці, тобто сукупність точок z, які задовольняють нерівності*

$$|z - a| < \varepsilon.$$

Означення. *Межевою точкою області D називають таку точку, яка сама не належить D, але в будь-якому околі якої містяться точки цієї області.*

Означення. *Сукупність межевих точок області D називають межею* *цієї області.*

Означення. *Область D разом зі своєю межею позначається символом $\overline{D}$ та називається замкненою областю.*

Означення. *Крива називається гладкою, якщо дотична проведена до неї під час руху вздовж кривої змінюється неперервно.*

Означення. *Крива називається кусково-гладкою, якщо її можно розбити на скінчене число гладких кривих.*

Означення. *Область D називається однозв'зною, якщо її межа зв'язна (складається з одної зв'язної частини).*

Означення. *Область називається опуклою, якщо відрізок, що з'єднує дві довільні точки області, повністю міститься у цій області.*

Означення. *Область називається зіркоподібною відносно деякої точки, якщо відрізок, що з'єднує вказану точку з довільною точкою області, повністю міститься у цій області.*

Означення. *У випадку обмеженої області D число зв'язних частин, на які розбивається її межа, називається порядком зв'язності цієї області.*

Нехай є однозв'зна область D та її межа – Γ. Виберемо на Γ будь-яку точку та будемо, відправляючись від цієї точки, обходити Γ.

Означення. *Додатнім напрямом обхода межі області вважаємо такий, при якому область залишається весь час зліва. При цьому деякі точки Γ будемо проходити лише один раз, а інші – декілька раз. Точки першого типу будемо називати простими, а другого типа – кратними точками контура Γ, причому число раз, які проходимо точку, назвемо її кратністю.*

Означення. *Кажуть, що на множині M точок площини z задана функція*

$$w = f(z),$$

якщо вказан закон, за яким кожній точці z з M ставиться у відповідність одна точка або сукупність точок w. У першому випадку функція $w = f(z)$ називається однозначна, а у другому – многозначна.

Означення. *Множину M називають множиною визначення функції $f(z)$, а сукупність N всіх значень w, які $f(z)$ приймає на M, – множиною її зміни.*

Якщо покласти $z = x + iy$ та $w = u + iv$, то задання функції комплексного змінного буде рівносильне заданню двух функцій двух дійсних змінних:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Домовимося відкладати значення z на одній комплексній площині, а значення w – на іншій. Тоді функцію комплексного змінного можно геометрично представити, як деяке відображення множини M площини z на множину N площини w.

Означення. *Якщо при відображенні $w = f(z)$ двом різним точкам M завжди відповідають різні точки N, то таке відображення називається однолистим в M.*

Означення. *Якщо функція $w = f(z)$ однозначна та однолиста на множині M, то таке відображення називається взаємно однозначним в M.*

Означення. *Нехай дана функція $w = f(z)$, яка здійснює відображення множини M на множину N. Функція $z = \varphi(w)$, яка ставить у відповідність кожній точці w з N сукупність таких же точок z, які функцією $w = f(z)$, відображаються в точку w, називається оберненою до функції $w = f(z)$.*

Означення. *Нехай функція $w = f(z)$ відображає множину M на N, а $\omega = g(w)$ – множину N на P. Функція*

$$\omega = h(z) = g\left(f(z)\right),$$

яка відображає M на P, називається складеною функцією, яка складена з компонент f та g, а відповідне відображення h – суперпозицією відображень f та g.

Нехай функція $w = f(z)$ визначена та однозначна в деякому околі точки $z_0 = x_0 + iy_0$, точки крім, можливо, самої точки z_0.

Означення. *Будемо казати, що існує границя функції $f(z)$ при $z \to z_0$ (позначаємо: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$): якщо існують границі*

$$\lim_{x \to x_0, y \to y_0} u(x, y) = u_0$$

та

$$\lim_{x \to x_0, y \to y_0} v(x, y) = v_0;$$

при цьому будемо вважати

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = u_0 + iv_0 = w_0.$$

Так як наше означення зводиться до звичайного означення границь дійсних функцій, то основні властивості граничного переходу зберігаються для функцій комплексного змінного. Зокрема, маємо:

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) \pm g(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) \pm \lim_{z \to z_0} g(z),$$

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) \cdot g(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot \lim_{z \to z_0} g(z),$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim\limits_{z \to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)} \quad \left(\lim_{z \to z_0} g(z) \neq 0 \right).$$

Означення границі можно сформулювати також з допомогою поняття околу точки:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

тоді і тільки тоді, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ *знайдеться* $\delta > 0$ *таке, що для всіх точок з* δ*-околу точки* z_0 *(крім, можливо, самої точки* z_0*) відповідні точки* w *лежать в* ε*-околі точки* w_0; *іншими словами, якщо з нерівностей*

$$0 < |z - z_0| < \delta$$

випливає

$$0 < |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Підкреслимо, що згідно нашого визначення функція $f(z)$ прямує до своєї границі незалежно від способу наближення точки z до z_0. Іншими словами, якщо границя існує, то при $z \to z_0$ по будь-якому закону (наприклад, по довільній лінії або будь-якій послідовності), $f(z)$ буде наближатися до цієї границі.

Означення. *Функція* $f(z)$ *називається неперервною в точці* z_0, *якщо вона визначена в деякому околі точки* z_0 *(включаючи і саму точку* z_0*) та*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Очевидно, *що для неперервності* $f(z)$ *в точці* z_0 *необхідно і досить, щоб функції* $u(x, y)$ *та* $v(x, y)$ *були неперервними в точці* (x_0, y_0).

Означення. *Функція* $f(z)$ *називається неперервною в області* D, *якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.*

Відмітимо без доведення, що для функцій, неперервних в замкнених областях, а також на замкнених лініях або на відрізках ліній, які містять свої кінці, залишаються справедливими звичайні властивості функцій, неперервних на замкнених інтервалах. *Отже, кожна функція* $w = f(z)$, *неперервна на замкненій множині* $\overline{A}$:

1) обмежена на ній, тобто існує така стала M, що для всіх z з $\overline{A}$

$$|f(z)| \leq M;$$

2) досягає свого найбільшого та свого найменшого по модулю значень, тобто в $\overline{A}$ існують такі точки z' та z'', що для всіх z з $\overline{A}$

$$|f(z')| \geq |f(z)|, \quad |f(z'')| \leq |f(z)|;$$

3) рівномірно неперервна, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, яке залежить тільки від ε, що для будь-якої пари z_1 та z_2 з $\overline{A}$, які задовольняють нерівності

$$|z_1 - z_2| < \delta,$$

справедлива нерівність

$$|f\left(z_1\right) - f\left(z_2\right)| < \varepsilon.$$

Відмітимо також без доведення одне важливе твердження.

Теорема 1. *Якщо функція $w = f(z)$ неперервна в області D та реалізує взаємно однозначне відображення цієї області на деяку множину Δ в площині w, то Δ також є областю і обернена функція $z = \varphi(w)$ неперервна в Δ.*

Означення. *Нехай функція $f(z)$ визначена в деякому околі точки z. Будемо казати, що $f(z)$ диференціовна в z, якщо існує границя*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z).$$

Ця границя називається похідною функції $f(z)$ в точці z.

Умови диференціовності функції $f(z)$ в термінах дійсних функцій $u(x, y)$ та $v(x, y)$ виражає наступна теорема.

Теорема 2. (умови Коші-Рімана, Даламбера-Ейлера). *Нехай функція*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

визначена в деякому околі точки z, *причому в цій точці функції* $u(x, y)$ *та* $v(x, y)$ *диференціовні. Тоді для диференціовності функції комплексного змінного* $f(z)$ *в точці* z *необхідно і досить, щоб в цій точці мали місце співвідношення:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Враховуючи умови Даламбера-Ейлера похідну функції $f(z)$ можно представити у наступних рівносильних формах:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Так як звичайні властивості алгебраїчних дій та граничного переходу зберігаються при переході до функцій комплексного змінного, то зберігаються і звичайні правила диференціювання, вивід яких базується лише на вказаних властивостях:

$$(f+g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + g'f, \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2},$$

$$(f(g(z)))' = f'(g(z)) \cdot g'(z), \quad f'(z) = \frac{1}{\varphi'(w)}$$

(в останній формулі f та φ позначають взаємно обернені функції, причому вважаємо, що вони здійснюють взаємно однозначне відображення відповідних околів точок z та w).

Означення. *Функція* $f(z)$, *диференціовна в кожній точці деякої області* D, *називається аналітичною (інакше, регулярною або моногеною) в цій області.*

Теорема 3. *Нехай функція $f(z)$ регулярна в області B. Візьмемо будь-який замкнений круг K, що належить B. Якщо γ є межа K, то для $z \in K$ справедливі формули:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(z')}{z' - z} dz',$$

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(z')}{(z' - z)^{k+1}} dz'.$$

Ці формули мають назву інтегральних формул Коші.

Сформулюємо один важливий результат, який називається лемою Шварца та буде нам необхідним у подальшому.

Лема Шварца. *Якщо функція $f(z)$ регулярна в крузі $|z| < R$, $f(0) = 0$ та $f(z) \leq M$ в $|z| < R$, то*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R} \cdot |z|$$

в $|z| < R$ та, крім того,

$$|f'(0)| \leq \frac{M}{R}.$$

Знаки рівності тут (в перший оцінці при $z \neq 0$) мають місце тільки у випадку, якщо

$$f(z) \equiv e^{i\alpha} \cdot \frac{M}{R} \cdot z,$$

де α – дійсна константа.

Зараз наведемо означення класу функцій для якого, в основному, ми будемо наводити оцінки коефіцієнтів у даній роботі.

Означення. *Позначимо через S клас функцій $f(z)$,*

$$f(z) = z + c_2 z^2 + ...,$$

регулярних та однолистих в $|z| < 1$.

Найпростіші оцінки коефіцієнтів функцій класу S.

Важливі місце в теорії конформних відображень займає дослідження того, які обмеження задає умова однолистості відображення на деякі величини, зв'язані з цим відображенням, як, наприклад, на величину модуля функції, на величини модуля та аргумента її похідної, тобто на степінь учиненого цією функцією викривлення в різних точках області, та таке інше.

Ці обмеження виражаються в різних оцінках. Вихідним пунктом для виводу ряда оцінок, що відносяться до однолистих функцій, служить наступна теорема:

Теорема 4. (теорема площ). *Якщо функція*

$$F(\xi) = \xi + \frac{\alpha_1}{\xi} + ... = \xi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\xi^k}$$

регулярна, виключаючи полюси в $\xi = \infty$, *та однолиста в області* $|\xi| > 1$, *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2 \leq 1. \tag{1}$$

Назва "теорема площ" виникає від того, що ця теорема є аналітичним виразом наступного геометричного твердження: *при відображенні області* $|\xi| > \rho$, $\rho > 1$, *функцією* $w = F(\xi)$ *залишаєтьея непокритою частина площини* $w = u + iv$, *площа якої більше нуля* (принцип площ).

Доведення. Коло $|\xi| = \rho$, $\rho > 1$, переходить при відображенні

$$w = F(\xi) = u + iv$$

в замкнену аналітичну криву

$$w = F\left(\rho e^{it}\right) = w(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

яка обмежує деяку область, площа S якої виражається за формулою:

$$S = \int_0^{2\pi} uv' dt = \int_0^{2\pi} \frac{w(t) + \overline{w(t)}}{2} \cdot \frac{w'(t) - \overline{w'(t)}}{2i} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho e^{it} + \rho e^{-it}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n e^{-int} + \overline{\alpha_n} e^{int}}{2\rho^n} \right] \times$$

$$\times \left[\frac{\rho e^{it} + \rho e^{-it}}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\alpha_n e^{-int} + n\overline{\alpha_n} e^{int}}{2\rho^n} \right] dt = \pi\rho^2 - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\left|\alpha_n\right|^2}{\rho^{2n}}$$

і ця площа більше нуля при довільному $\rho > 1$. Переходячи до границі при $\rho \to 1$ і отримаємо (1).

З нерівності (1) випливає важливий наслідок:

Наслідок. *Якщо функція*

$$F(\xi) = \xi + \frac{\alpha_1}{\xi} + ... = \xi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\xi^k}$$

регулярна, виключаючи полюси в $\xi = \infty$, *та однолиста в області* $|\xi| > 1$, *то*

$$|\alpha_1| \leq 1;$$

причому знак рівності, тобто випадок $\alpha_1 = e^{i\alpha}$, *досягається тільки тоді, коли*

$$\alpha_2 = \alpha_3 = ... = 0,$$

тобто, коли

$$F(\xi) = \xi + \frac{e^{i\alpha}}{\xi}.$$

Відмітимо, що остання функція однолисто відображає область $|\xi| > 1$ на площину з прямолінійним розрізом від точки $w = 2e^{\frac{\alpha i}{2}}$ до точки $w = -2e^{\frac{\alpha i}{2}}$.

Теорема 5. *Якщо функція*

$$f(z) = z + c_2 z^2 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \tag{2}$$

належить класу S, то $|c_2| \leq 2$.

Доведення. З умови теореми випливає, що функція

$$f_p(z) = \sqrt[p]{f\left(z^p\right)} = z + \frac{c_2}{p} z^{p+1} + ... \tag{3}$$

$(p = 2, 3, ...)$ також буде регулярна та однолиста в $|z| < 1$. Однолистість слідує з того, що якщо б було

$$f_p\left(z_1\right) = f_p\left(z_2\right)$$

при z_1 та z_2 з $|z| < 1$, причому $z_1 \neq z_2$, то

$$f\left(z_1^p\right) = f\left(z_2^p\right),$$

звідки

$$z_1^p = z_2^p,$$

тобто

$$z_1 = \eta z_2, \quad \eta^p = 1;$$

але тоді, використовуючи, що ряд (2) містить лише члени зі степенями z^{np+1}, $n = 0, 1, 2, ...$, отримали б

$$f_p\left(z_1\right) = \eta f_p\left(z_2\right),$$

тобто $\eta = 1$, та, отже, $z_1 = z_2$, що протирічить припущенню. Отже, функція (3) належить класу S.

Звідси випливає, що функція

$$F(\xi) = \frac{1}{f_2\left(\frac{1}{\xi}\right)} = \xi - \frac{c_2}{2} \cdot \frac{1}{\xi} + ...$$

однолиста в $|\xi| > 1$ та по наслідку з теореми площ (теорема 4), отримаємо:

$$\left|\frac{c_2}{2}\right| \leq 1,$$

тобто

$$|c_2| \leq 2,$$

причому

$$c_2 = 2e^{i\alpha}$$

тільки у випадку, якщо

$$F(\xi) = \xi + \frac{e^{i\alpha}}{\xi},$$

тобто якщо

$$w = f(z) = \frac{z}{\left(1 + e^{i\alpha} z\right)^2} = z - 2e^{i\alpha} z^2 + ... \qquad (4)$$

Функція (4) відображає круг $|z| < 1$ на площину з розрізом по променя, який виходить з точки $\frac{1}{4}e^{-i\alpha}$ та містить на своєму продовженні точку $w = 0$. Теорема доведена.

Теореми о середніх модулях.

Зараз ми дослідимо вплив однолистості відображення на величини коефіцієнтів відображаючих функцій. Для цього будуть потрібні деякі оцінки середніх модулів.

Теорема 6. *Для функцій $f(z) \in S$ при $\lambda > 0$ та $0 < r < 1$ має місце оцінка*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\lambda} d\theta \le \lambda \int\limits_0^{r} \frac{(M(\rho))^{\lambda}}{\rho} d\rho, \tag{5}$$

де $M(\rho) = \max\limits_{|z|=\rho} |f(z)|$.

Доведення. Маємо,

$$\frac{d}{dr}\int\limits_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\lambda} d\theta = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial\left(\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\lambda}\right)}{\partial r} d\theta = \lambda \int\limits_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\lambda} \frac{\partial\left(\ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\right)}{\partial r} d\theta,$$

Користуючись умовами Коші-Рімана маємо

$$\frac{\partial\left(\ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\right)}{\partial\left(\ln r\right)} = \frac{\partial\left(\arg f\left(re^{i\theta}\right)\right)}{\partial\theta}.$$

Тому, поклавши $f(z) = Re^{i\Phi}$, отримаємо:

$$\frac{d}{dr}\int\limits_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\lambda} d\theta = \frac{\lambda}{r}\int\limits_{C_r} R^{\lambda} d\Phi, \tag{6}$$

де C_r – образ кола $|z| = r$ при відображенні його функцією $w = f(z)$. Нехай тепер C та C' – дві замкнені аналітичні криві Жордана площини $w = u + iv$ такі, що C містить всередині себе точку $w = 0$ та сама повністю міститься всередині C'. Нехай R та Φ полярні координати точок площини w. Примінюючи формулу Гріна до двузв'язної області B, яка обмежена цими кривими, а також, використовуючи умови Коші-Рімана, послідовно маємо:

$$\int\limits_{C'} R^{\lambda} d\Phi - \int\limits_{C} R^{\lambda} d\Phi = \int\limits_{C'-C} R^{\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial u} du + R^{\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial v} dv =$$

$$= \iint\limits_B \lambda R^\lambda \left(\frac{\partial (\ln R)}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial (\ln R)}{\partial v} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) dudv =$$

$$= \iint\limits_B \lambda R^\lambda \left(\left(\frac{\partial (\ln R)}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial (\ln R)}{\partial v} \right)^2 \right) dudv = \lambda \iint\limits_B R^{\lambda - 2} dudv$$

тобто отримаємо формулу

$$\int\limits_{C'} R^\lambda d\Phi - \int\limits_C R^\lambda d\Phi = \lambda \iint\limits_B R^{\lambda-2} dudv. \tag{7}$$

З цієї формули при $\lambda > 0$ (вона справедлива й для $\lambda < 0$) випливає нерівність

$$\int\limits_C R^\lambda d\Phi \leq \int\limits_{C'} R^\lambda d\Phi. \tag{8}$$

Зокрема, якщо C' є коло $|w| = R_0$, то (8) дає

$$\int\limits_C R^\lambda d\Phi \leq 2\pi R_0^\lambda. \tag{9}$$

Застосувавши нерівність (9) до випадку, коли C є C_r, а $R_0 = M(r) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, та потім $\varepsilon \to 0$, з (6) отримаємо нерівність:

$$\frac{d}{dr} \int\limits_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^\lambda d\theta \leq 2\pi\lambda \cdot \frac{(M(r))^\lambda}{r},$$

проінтегрувавши яку по r від 0 до r, отримаємо (5). Теорема доведена.

Теорема 7. *Для функцій $f(z) \in S$ при $0 < r < 1$ має місце оцінка*

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^\lambda \cdot \left| f'\left(re^{i\theta}\right) \right| d\theta \leq$$

$$\leq \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\frac{2p(1+\lambda) - 2}{e}} \cdot \sqrt{\frac{\left(M\left(\sqrt{r}\right)\right)^{\frac{2}{p}}}{1-r} \int\limits_0^r \frac{(M(\rho))^{2\lambda + 2 - \frac{2}{p}}}{\rho} d\rho}, \tag{10}$$

де $M(\rho) = \max\limits_{|z|=\rho} |f(z)|$, p – ціле додатне число та $\lambda + 1 - \frac{1}{p} > 0$.

Доведення. Розглянемо функцію

$$f_p(z) = \sqrt[p]{f\left(z^p\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(p)} z^{np+1}. \tag{11}$$

Ця функція, як показано в теоремі 5 належить класу S.

З (11) маємо:

$$f_p'(z) = z^{p-1} \cdot \left(f\left(z^p\right)\right)^{\frac{1}{p}-1} \cdot f'\left(z^p\right),$$

звідси

$$f'(z) = z^{\frac{1}{p}-1} \cdot \left(f\left(z\right)\right)^{1-\frac{1}{p}} \cdot f_p'\left(z^{\frac{1}{p}}\right).$$

Позначимо ліву частину в (10) через I, замінимо в ній $f'(z)$ за останньою формулою; отримаємо:

$$I = \frac{r^{\frac{1}{p}-1}}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\lambda+1-\frac{1}{p}} \cdot \left|f_p'\left(z^{\frac{1}{p}}\right)\right| d\theta,$$

звідси

$$I \leq \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^{2\lambda+2-\frac{2}{p}} d\theta \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} r^{\frac{2}{p}} \cdot \left|f'\left(z^{\frac{1}{p}}\right)\right|^2 d\theta}. \tag{12}$$

Оцінимо тепер кожен з інтегралів, які знаходяться під знаком корня. Перший інтеграл оцінимо за теоремою 6, маємо:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^{2\lambda+2-\frac{2}{p}} d\theta \leq \left(2\lambda + 2 - \frac{2}{p}\right) \cdot \int\limits_0^{r} \frac{\left(M(\rho)\right)^{2\lambda+2-\frac{2}{p}}}{\rho} d\rho. \tag{13}$$

Оцінимо другий інтеграл за формулою (11), маємо:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left|f_p'\left(z^{\frac{1}{p}}\right)\right|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} (np+1)^2 \cdot \left|c_n^{(p)}\right|^2 \cdot r^{2n}. \tag{14}$$

Але при $0 < x < 1$ та $m > 0$:

$$x^m(1-x) \leq \max_{0 \leq x \leq 1}\left(x^m(1-x)\right) = \frac{m^m}{(m+1)^{m+1}} =$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}} \leq \frac{1}{em},$$

звідси

$$m \leq \frac{1}{ex^m(1-x)}, \quad 0 < x < 1, \quad m > 0. \tag{15}$$

Поклавши $m = \frac{np+1}{p}$, $x = r$, отримаємо:

$$np + 1 \leq \frac{p}{er^{\frac{np+1}{p}}(1-r)}$$

і (14) дає

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| f_p'\left(z^{\frac{1}{p}}\right) \right|^2 r^{\frac{2}{p}} d\theta \leq \frac{p}{e(1-r)} \sum_{n=0}^{\infty} (np+1) \cdot \left| c_n^{(p)} \right|^2 \cdot r^{\frac{np+1}{p}}. \tag{16}$$

Але остання сума дорівнює поділеній на π площі образа круга $|z| < r^{\frac{1}{2p}}$ при відображенні функцією $w = f_p(z)$ та, отже, не перевищує величини

$$\left(\max_{|z|=r^{\frac{1}{2p}}} |f_p(z)| \right)^2,$$

тобто величини

$$\max_{|z|=\sqrt{r}} |f(z)|^{\frac{2}{p}} = M\left(\sqrt{r}\right)^{\frac{2}{p}}.$$

Отже, з (16) випливає:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| f_p'\left(z^{\frac{1}{p}}\right) \right|^2 r^{\frac{2}{p}} d\theta \leq \frac{p}{e(1-r)} M\left(\sqrt{r}\right)^{\frac{2}{p}}. \tag{17}$$

Використовуючи оцінки (13) та (17), з (12) отримуємо оцінку (10). Теорема доведена.

Теорема 8. *Якщо функцій $f(z) \in S$ задовольняє в $|z| < 1$ умові*

$$|f(z)| \leq \frac{M|z|}{(1-|z|)^{\alpha}}, \tag{18}$$

де M та α не залежать від r та $\alpha > \frac{1}{2}$, то при $0 < r < 1$ маємо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta \le \frac{M_1}{(1-r)^{\alpha}}, \tag{19}$$

де M_1 залежить тільки від M та α.

Доведення. Так як за (18) маємо

$$M(\rho) = \max_{|z|=\rho}|f(z)| \le \frac{M\rho}{(1-\rho)^{\alpha}}, \quad 0 < \rho < 1,$$

та застосувавши теорему 7 з $\lambda = 0$, отримаємо при $0 < r < 1$:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta \le$$

$$\le \frac{\sqrt{p}}{r}\sqrt{\frac{1}{1-r}\cdot\frac{M^2\cdot r^{\frac{1}{p}}\cdot 2^{\frac{2\alpha}{p}+1}}{(1-r)^{\frac{2\alpha}{p}}}\cdot\int\limits_0^r\frac{\rho^{1-\frac{2}{p}}}{(1-\rho)^{\alpha\left(2-\frac{2}{p}\right)}}d\rho}. \tag{20}$$

Виберемо $p > 1$ таким, щоб $\alpha\left(2-\frac{2}{p}\right) > 1$, що можливо внаслідок того, що $\alpha > \frac{1}{2}$. Тоді маємо:

$$\int\limits_0^r\frac{\rho^{1-\frac{2}{p}}}{(1-\rho)^{\alpha\left(2-\frac{2}{p}\right)}}d\rho \le r^{1-\frac{2}{p}}\cdot\int\limits_0^r\frac{d\rho}{(1-\rho)^{\alpha\left(2-\frac{2}{p}\right)}} \le \frac{M'\cdot r^{2-\frac{2}{p}}}{(1-r)^{\alpha\left(2-\frac{2}{p}\right)-1}},$$

де M' залежить тільки від α та p.

Застосувавши останню оцінку, з (20) отримаємо:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta \le \sqrt{\frac{p}{1-r}\cdot\frac{M^2\cdot M'\cdot r^{-\frac{1}{p}}\cdot 2^{\frac{2\alpha}{p}+1}}{(1-r)^{2\alpha-1}}} = \frac{M''\cdot r^{-\frac{1}{p}}}{(1-r)^{\alpha}},$$

причому M'' залежить тільки від α та p. Звідси при $\frac{1}{2} < r < 1$ випливає оцінка (19). Але (19), при деякому M_1 має місце й при $0 < r \le \frac{1}{2}$. Теорема доведена.

Деякі оцінки коефіцієнтів функцій класу S.

Тепер доведемо теореми про оцінки коефіцієнтів функцій класу S.

Теорема 9. *Для функцій*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in S$$

маємо оцінку:

$$|c_n| < en, \quad n = 2, 3, ... \tag{21}$$

Доведення. Скористаємося інтегральним представленням коефіцієнтів

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \quad n = 2, 3, ..., \quad 0 < r < 1. \tag{22}$$

Тоді, маємо

$$|c_n| \le \frac{1}{2\pi r^n} \int\limits_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right| d\theta.$$

Примінимо теорему 6 з $\lambda = 1$, тоді

$$|c_n| \le \frac{1}{r^n} \int\limits_0^r \frac{M(\rho)}{\rho} d\rho.$$

При $0 < \rho < 1$ маємо

$$M(\rho) \le \frac{\rho}{(1-\rho)^2}.$$

Отже,

$$|c_n| \le \frac{1}{r^n} \int\limits_0^r \frac{d\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{1}{r^{n-1} \cdot (1-r)}.$$

Тут r довільне з $0 < r < 1$. Покладемо $r = 1 - \frac{1}{n}$; тоді

$$|c_n| \le \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} = n \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < en,$$

тобто отримали оцінку (21). Теорема доведена.

Теорема 10. *Для непарної функції*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1} z^{2n-1} \in S$$

маємо оцінку:

$$|c_n| < 2^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}} = 3,39... \tag{23}$$

Доведення. Маємо,

$$nc_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{f'(z)}{z^n} dz, \quad n = 2, 3, ..., \quad 0 < r < 1.$$

Звідси

$$n\left|c_n\right| \leq \frac{1}{2\pi r^{n-1}} \int\limits_0^{2\pi} \left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta$$

та, отже, за теоремою 7 з $\lambda = 0$ та $p = 4$ отримаємо

$$n\left|c_n\right| \leq \frac{1}{r^n} \cdot \sqrt{\frac{6}{e}} \cdot \sqrt{\frac{\left(M\left(\sqrt{r}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{1-r} \int\limits_0^r \frac{\left(M(\rho)\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho} d\rho}. \tag{24}$$

Але, якщо непарна функція $f(z) \in S$, то й функція

$$g(z) = \left(f\left(z^{\frac{1}{2}}\right)\right)^2 \in S;$$

тому що припустивши, що $g\left(z_1\right) = g\left(z_2\right)$ з z_1 та z_2 з круга $|z| < 1$ доведемо, що $z_1 = z_2$. В крузі $|z| < 1$ маємо:

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{1-|z|^2};$$

отже, при $0 < \rho < 1$ отримаємо:

$$M(\rho) \leq \frac{\rho}{1-\rho^2}.$$

Підставляючи це в (24) отримаємо;

$$n\,|c_n| \le \frac{1}{r^n}\cdot\sqrt{\frac{6}{e}}\cdot\sqrt{\frac{r^{\frac14}}{(1-r)^{\frac32}}\int\limits_0^r \frac{\rho^{\frac12}d\rho}{(1-\rho^2)^{\frac32}}} \le$$

$$\le \frac{1}{r^n}\cdot\sqrt{\frac{6}{e}}\cdot\sqrt{\frac{r^{\frac14}}{(1-r)^{\frac32}}\cdot r^{\frac12}\cdot\int\limits_0^r \frac{d\rho}{(1-\rho^2)^{\frac32}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6}{e}}\cdot\frac{r^{\frac14}}{r^{n-\frac12}(1-r)}\cdot\left(\frac{r}{(1+r)^2}\right)^{\frac18} \le$$

$$\le \sqrt{\frac{6}{e}}\cdot\frac{1}{r^{n-\frac12}(1-r)}\cdot\left(\frac14\right)^{\frac18} = \frac{2^{\frac14}\cdot 3^{\frac12}\cdot e^{-\frac12}}{r^{n-\frac12}(1-r)}.$$

Тепер візьмемо

$$r = \frac{2n-1}{2n+1}.$$

Тоді, внаслідок того, що

$$\frac{1}{r^{n-\frac12}(1-r)} = \frac12\cdot\sqrt{\frac{(2n+1)^{2n+1}}{(2n-1)^{2n-1}}} = n\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n+\frac12}}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{n-\frac12}} =$$

$$= ne^{n\left(1+\frac{1}{2n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)-n\left(1-\frac{1}{2n}\right)\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)} =$$

$$= ne^{n\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{2n}-\frac12\cdot\frac{1}{(2n)^2}+\frac13\cdot\frac{1}{(2n)^3}+\ldots\right)+\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{2n}+\frac12\cdot\frac{1}{(2n)^2}+\frac13\cdot\frac{1}{(2n)^3}+\ldots\right)\right)} =$$

$$= ne^{1+\left(\frac13\cdot\frac{1}{(2n)^2}+\frac15\cdot\frac{1}{(2n)^4}+\ldots\right)-\left(\frac12\cdot\frac{1}{(2n)^2}+\frac14\cdot\frac{1}{(2n)^4}+\ldots\right)} < en,$$

отримаємо

$$n\,|c_n| < 2^{\frac14}\cdot 3^{\frac12}\cdot e^{\frac12}\cdot n,$$

тобто отримали оцінку (23). Теорема доведена.

Приклади функцій

$$\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n,$$

$$\frac{z}{1-z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n-1},$$

які належать класу S, показують, що оцінки коефіцієнтів, які задаються теоремами 9 та 10, у відношенні порядку є точними.

Точні оцінки коефіцієнтів.

Для деяких спеціальних підкласів функцій класу S вдається отримати точні оцінки для всіх коефіцієнтів c_n. Деякі з таких результатів ми зараз розглянемо. Для цього спочатку доведемо наступний допоміжний результат.

Теорема 11. *Якщо функція*

$$f(z) = 1 + \alpha_1 z + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 ...$$

регулярна в $|z| < 1$ *та задовольняє в* $|z| < 1$ *умові* $Re\,(f(z)) \geq 0$, *то*

$$|\alpha_n| \leq 2 \qquad \forall n = 1, 2, 3, ...$$

Доведення. Умова $\mathrm{Re}\,(f(z)) \geq 0$, рівносильна нерівності

$$|1 + f(z)| \geq |1 - f(z)|\,,$$

з якої випливає, що функція

$$g(z) = \frac{f(z) - 1}{f(z) + 1} = \frac{\alpha_1}{2} z + ...$$

регулярна в $|z| < 1$ та задовольняє в $|z| < 1$ умові

$$|g(z)| \leq 1.$$

За лемою Шварца звідси випливає

$$|\alpha_1| \leq 2.$$

Далі, якщо позначити через η_k, $k = 1, 2, ..., n$, всі корні n-ой степені з одиниці, то маємо:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\eta_k z^{\frac{1}{n}}\right)\right) \geq 0$$

та, отже, функція

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\eta_k z^{\frac{1}{n}}\right) = 1 + \alpha_n z + ...$$

також задовольняє умові теореми. Звідси

$$|\alpha_n| \leq 2$$

при всіх $n = 1, 2, ...$ Теорема доведена.

Теорема 12. *Для функцій*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in S$$

з дійсними коефіцієнтами мають місце точні оцінки:

$$|c_n| \leq n, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{25}$$

Доведення. Внаслідок однолистості $f(z)$ в $|z| < 1$ для довільних z_1 та z_2 з $|z| < 1$ маємо:

$$\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{z_1^n - z_2^n}{z_1 - z_2} \neq 0.$$

Зокрема, при $z_1 = re^{i\varphi}$, $z_2 = re^{-i\varphi}$, $0 < r < 1$, це показує, що вираз

$$\Phi(r, \varphi) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n r^{n-1} \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}$$

є дійсним та відмінним від нуля, тобто зберігає знак при $0 < r < 1$ та будь-яких значеннях φ.

Отже, й

$$2\sin^2\varphi \cdot \Phi(r, \varphi) = 1 + c_2 r \cos\varphi + \left(c_3 r^2 - 1\right) \cos 2\varphi +$$

$$+ \left(c_4 r^2 - c_2\right) r \cos 3\varphi + ... + \left(c_n r^2 - c_{n-2}\right) r^{n-3} \cos(n-1)\varphi + ...$$

зберігає знак, а так як при $r = 0$ цей вираз додатній, то знак буде плюс.

Внаслідок цього функція

$$F(z) = 1 + c_2 rz + \left(c_3 r^2 - 1\right) z^2 + \left(c_4 r^2 - c_2\right) rz^3 +$$

$$+ ... + \left(c_n r^2 - c_{n-2}\right) r^{n-3} z^{n-1} + ...,$$

регулярна в $|z| < 1$, задовольняє умові $\mathrm{Re}\left(f(z)\right) \geq 0$. Тому за теоремою 11 маємо

$$|c_2| \leq 2, \ \left|c_3 r^2 - 1\right| \leq 2, \ \left|c_4 r^2 - c_2\right| \leq 2, ..., \left|c_n r^2 - c_{n-2}\right| \leq 2, ...$$

або, переходячи до границі при $r \to 1$:

$$|c_2| \leq 2, \ |c_3 - 1| \leq 2, \ |c_4 - c_2| \leq 2, ..., |c_n - c_{n-2}| \leq 2, ... \qquad (26)$$

Звідси за індукцією випливає, що при довільному n будуть виконуватися нерівності (25). Теорема доведена.

Теорема 13. *Для непарних функцій*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1} z^{2n-1} \in S$$

з дійсними коефіцієнтами маємо оцінки:

$$|c_n| \leq 1 + cn^{-\frac{1}{4}} \cdot \ln n, \quad n = 2, 4, 6, ... \qquad (27)$$

де c – абсолютна константа.

Доведення. Так як до функції $f(z)$ та до функції

$$\frac{1}{i} \cdot f(iz) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_{2n-1} z^{2n-1} \in S$$

можно застосувати нерівності (26), то маємо

$$|c_n \pm c_{n-2}| \leq 2, \quad n = 3, 5, 7, ...$$

та, отже,

$$|c_n| + |c_{n-2}| \leq 2, \quad n = 3, 5, 7, ... \tag{28}$$

З іншої сторони, для $f(z)$ справедлива оцінка

$$||c_n| - |c_{n-2}|| \leq cn^{-\frac{1}{4}} \cdot \ln n, \quad n = 3, 5, 7, ... \tag{29}$$

Додаючи (28) та (29), отримаємо (27). Теорема доведена.

У зв'язку з теоремою 13, відмітимо без доведення, що існує функція $f(z)$, яка задовольняє умовам цієї теореми, у якої $|c_{2n+1}|$ з будь-яким заданим $n \geq 2$ більше одиниці.

Застосування оцінок коефіцієнтів до теорем покриття та нерівностей для функції та похідної.

З оцінки коефіцієнта c_2, яка отримана в теоремі 5, нескладно отримати теорему покриття, яка відноситься до функцій класу S.

Теорема 14. (Кьобе). *Якщо функція (2) належить класу S, то круг $|w| < \frac{1}{4}$ (але не завжди більший) повністю покривається образом круга $|z| < 1$ при відображенні цією функцією. На колі $|w| = \frac{1}{4}$ тільки у тому випадку є точки, які не належать образу, якщо $f(z)$ є функція (4).*

Доведення. Нехай функція (2) регулярна та однолиста в $|z| < 1$. Застосуємо до цієї функції теорему 5.

Нехай c не належить образу круга $|z| < 1$ при відображенні цією функцією. Тоді $c \neq 0$ та функція

$$f_1(z) = \frac{cf(z)}{c - f(z)} = z + \left(c_2 + \frac{1}{c}\right) z^2 + ...$$

також буде регулярна та однолиста в $|z| < 1$ та, отже, маємо:

$$\left|c_2 + \frac{1}{c}\right| \leq 2.$$

Звідси

$$|c| \geq \frac{1}{4};$$

знак рівності тут має місце тільки у випадку, коли

$$\left|c_2 + \frac{1}{c}\right| = \left|\frac{1}{c}\right| - |c_2| = 2, \quad |c_2| = 2,$$

тобто, коли

$$c_2 = -2e^{i\alpha}.$$

Це ж буде тільки для функції (4). Теорема доведена.

Теорему Кьобе можно записати також і у іншій формі:

Наслідок. *Якщо функція* $f(z)$, $f(0) = 0$ *належить класу* S *та не приймає в* $|z| < 1$ *значення* c, *та маємо*

$$|f'(0)| \leq 4c.$$

Доведення наслідку випливає з примінення попередньої теореми до функції

$$\frac{f(z)}{f'(0)},$$

яка не приймає в $|z| < 1$ значення

$$\frac{c}{f'(0)}.$$

Теорема 15. *Якщо функція*

$$w = F(\xi) = \xi + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\xi} + ... \tag{30}$$

однолисто відображає $|\xi| > 1$, *то*

$$|w - \alpha_0| \leq 2.$$

Доведення. Якщо функція (30) однолисто відображає область $|\xi| > 1$ та якщо c не належить образу, то функція

$$F_1(z) = \frac{1}{F\left(\frac{1}{z}\right) - c} = z + (c - \alpha_0)\, z^2 + ...$$

буде регулярна та однолиста в $|z| < 1$ та, отже,

$$|w - \alpha_0| \leq 2.$$

Теорема доведена.

Іншим важливим додатком оцінки коефіцієнту c_2 є вивід оцінок для модуля та аргументу похідної однолистої функції

Теорема 16. *Якщо функція (2) належить класу S, то справедливі нерівності*

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, \tag{31}$$

$$|\arg f'(z)| \le 2\ln\frac{1+|z|}{1-|z|}. \tag{32}$$

Доведення. Так як функція (2) регулярна та однолиста в $|z|<1$, то функція

$$g(\xi) = \frac{f\left(\frac{\xi+z}{1+\overline{z}\xi}\right) - f(z)}{f'(z)\left(1-|z|^2\right)} = \xi + \beta_2\xi^2 + ...$$

при довільному z з $|z|<1$ буде також регулярна та однолиста в $|\xi|<1$. Обчислюючи, маємо

$$\beta_2 = \frac{1}{2}\left((1-z\overline{z})\frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\overline{z}\right),$$

та, отже, так як $|\beta_2| \le 2$, маємо

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right| \le \frac{4|z|}{1-|z|^2}. \tag{33}$$

Замінюючи у цій нерівності зліва та справа модуль на дійсну та уявну частини та враховуючи, що

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) = |z|\frac{\partial\left(\ln|f'(z)|\right)}{\partial|z|}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) = |z|\frac{\partial\left(\arg f'(z)\right)}{\partial|z|},$$

отримаємо дві нерівності

$$\frac{-4+2|z|}{1-|z|^2} \le \frac{\partial\left(\ln|f'(z)|\right)}{\partial|z|} \le \frac{4+2|z|}{1-|z|^2},$$

$$-\frac{4}{1-|z|^2} \le \frac{\partial\left(\arg f'(z)\right)}{\partial|z|} \le \frac{4}{1-|z|^2}. \tag{34}$$

Інтегруючи ці нерівності по $|z|$ від 0 до $|z|$, отримаємо (31) та (32). Ці нерівності мають місце при довільному z з $|z| < 1$.

Розберемо тепер питання про знак рівності у нерівностях (31) та (32). Так як ці нерівності отримані інтегруванням по $|z|$ від 0 до $|z|$ нерівностей (34), то для того, щоб в (31) та (32) мав місце знак рівності для деякої функції $f(z)$ та для деякого z з $|z| < 1$, необхідно, щоб відповідна рівність мала місце в (34) вздовж всього прямолінійного відрізка від 0 до z, а це означає, що на тому ж відрізку має місце знак рівності і в (33). Зокрема, звідси випливає, що

$$|c_2| = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(0)}{f'(0)}\right| = 2.$$

Але це може мати місце тільки для функції (4). Перевірка показує, що при певному виборі α дійсно у (31) має місце знак рівності. Отже, нерівність (31) дає точні оцінки для $|f'(z)|$, коли $f(z)$ пробігає весь клас функцій (2), регулярних та однолистих в $|z| < 1$. Відмітимо без доведення, що нерівність у (32) не є точною і існують точні оцінки $|\arg f'(z)|$ (див. напр. [1]). Теорема доведена.

Теорема 17. *Якщо функція (2) належить класу S, то справедливі нерівності*

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \le |f(z)| \le \frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

Доведення. Для отримання верхньої оцінки інтегруємо праву частину нерівності (31) по прямолінійному відрізку, який з'єднує точку O з точкою z. Тоді отримаємо:

$$|f(z)| = \int_0^z |f'(z)|\,|dz| =$$

$$= \int_0^z |f'(z)|\, d|z| \le \int_0^{|z|} \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3} d|z| = \frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

Для отримання нижньої оцінки візьмемо на образі кола $|z| = r$ точку, яка є найближчою до точки $w = 0$, та з'єднаємо її з $w = 0$ прямолінійним відрізком. Інтегруючи тоді ліву частину нерівності (31) по кривій L, яка переходить в цей відрізок, отримаємо:

$$|f(z)| = \int\limits_L |f'(z)|\,|dz| \geq \int\limits_0^{|z|} \frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} d|z| = \frac{|z|}{(1+|z|)^2}.$$

Отже, в $|z| < 1$ маємо:

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

Знак рівності тут може досягатися при $z \neq 0$ тільки у випадку, якщо $f(z)$ є функція (4) при деякому α. Теорема доведена.

Опуклі та зіркоподібні області.

Застосуємо тепер отримані нами результати на опуклі та зіркоподібні області.

Лема 1. *Нехай функції*

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in S$$

відображають круг $|z|<1$ на області, зіркоподібні відносно точки $w=0$. Тоді і образ круга $|z|<r$, $0<r<1$, при цьому відображенні, також буде зіркоподібним відносно точки $w=0$.

Доведення. Позначимо через B – образ круга $|z|<1$, а через B_r – образ круга $|z|<r$, $0<r<1$, при відображенні $f(z)$.

Далі, якщо w належить B, то й tw, при $0<t<1$ також належить B та, отже, функція

$$f^{-1}(tf(z))=\psi(z), \quad \psi(0)=0,$$

визначена та регулярна в крузі $|z|<1$ та в ньому

$$|\psi(z)| \leq 1.$$

Звідси,

$$|\psi(z)| \leq z \text{ в } |z|<1.$$

Нехай тепер $w_1 \in B_r$; тоді

$$w_1=f\left(z_1\right), \quad \left|z_1\right|<r.$$

Отже,

$$\left|\psi\left(z_1\right)\right| \leq \left|z_1\right|,$$

тобто

$$\left|f^{-1}\left(t w_1\right)\right|<r.$$

Але $tw_1 \in B$, тому

$$tw_1 = f\left(z_0\right), \quad |z_0| < 1.$$

Підставляючи це в попередню нерівність, отримаємо $|z_0| < r$, тобто $tw_1 \in B_r$. Це й доводить, що область B_r зіркоподібна відносно точки $w = 0$. Лема доведена.

Теорема 18. *Для функцій*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in S,$$

які відображають круг $|z| < 1$ *на зіркоподібні області, маємо точні оцінки:*

$$|c_n| \leq n, \quad n = 2, 3, 4, ... \tag{35}$$

а при додатковій умові непарності $f(z)$ *– точні оцінки*

$$|c_n| \leq 1, \quad n = 3, 5, 7... \tag{36}$$

Доведення. Покладемо

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + \alpha_1 z + ... \tag{37}$$

Тоді, за теоремою 11 маємо

$$|\alpha_n| \leq 2, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

З іншої сторони, із порівняння коефіцієнтів в (37) маємо:

$$(n-1)c_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} \cdot c_2 + ... + \alpha_1 \cdot c_{n-1},$$

звідси

$$|c_n| \leq \frac{|\alpha_{n-1}| + |\alpha_{n-2}| \cdot |c_2| + ... + |\alpha_1| \cdot |c_{n-1}|}{n-1} = 2 \cdot \frac{1 + |c_2| + ... + |c_{n-1}|}{n-1}.$$

При $n=2$ звідси випливає, що

$$|c_2| \leq 2.$$

Вважаючи оцінку

$$|c_k| \leq k$$

доведеною для $k < n$, робимо висновок, що

$$|c_n| \leq 2 \cdot \frac{1+2+...+(n-1)}{n-1} = n.$$

Отже, за методом математичної індукції, оцінка (35) має місце при всіх n. Аналогічно доводиться й оцінка (36). Теорема доведена.

Лема 2. *Нехай функції*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in S$$

відображають круг $|z| < 1$ на опуклу область. Тоді і образ круга $|z| < r$, $0 < r < 1$, при цьому відображенні, також буде опуклою областю.

Доведення. Позначимо через B – образ круга $|z| < 1$, а через B_r – образ круга $|z| < r$, $0 < r < 1$, при відображенні $f(z)$. За визначенням опуклої області, якщо точки w_1 та w_2 належать B, то їй належать й всі точки

$$tw_1 + (1-t)w_2, \quad 0 < t < 1,$$

тобто точки прямолінійного відрізка, який з'єднує w_1 з w_2.

Далі, якщо

$$w_1 = f\left(z_1\right), \quad |z_1| < r,$$

та

$$w_2 = f\left(z_2\right), \quad |z_2| < r,$$

то, вважаючи,

$$|z_1| \leq |z_2|,$$

отримаємо, що точки

$$\varphi(z) = tf\left(\frac{z_1}{z_2}\cdot z\right) + (1-t)f(z), \quad |z|<1,\ 0<t<1,$$

містяться у B. Тому функція

$$\psi(z) = f^{-1}\left(\varphi(z)\right), \quad \psi(0)=0,$$

регулярна в $|z|<1$ та

$$|\psi(z)| \le 1 \text{ в } |z|<1.$$

За лемою Шварца маємо

$$|\psi(z)| \le |z|.$$

При $z=z_2$ це дає

$$\left|f^{-1}\left(tw_1+(1-t)w_2\right)\right| \le r.$$

Але

$$tw_1+(1-t)w_2 = f\left(z_0\right), \quad |z_0|<1.$$

Звідси

$$|z_0| \le r,$$

тому

$$(tw_1+(1-t)w_2) \in B_r.$$

Це й доводить, що область B_r буде опуклою. Лема доведена.

Відмітимо ряд важливих наслідків попередніх результатів.

Наслідок 1. *Якщо функція*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in S$$

відображає круг $|z| < 1$ *на область, зіркоподібну відносно точки* $w = 0$, *то при русі* z *по* $|z| = r$, $0 < r < 1$, *у визначеному напрямі,* $\arg f(z)$ *також рухається у тому ж напрямі, і при цьому в* $|z| < 1$ *справедлива нерівність:*

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0. \tag{38}$$

Наслідок 2. *Якщо функція*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in S,$$

регулярна в $|z| < 1$ *та задовольняє в* $|z| < 1$ *умові (38), то вона однолисто відображає круг* $|z| < 1$ *на зіркоподібну область відносно точки* $w = 0$.

Наслідок 3. *Якщо функція*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in S$$

відображає круг $|z| < 1$ *на опуклу область, то при русі* z *по* $|z| = r$, $0 < r < 1$, *у додатньому напрямі, відповідна точка* w *описує криву, дотична до якої завжди рухається проти годинникової стрілки і при цьому в* $|z| < 1$ *справедлива нерівність:*

$$Re\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) + 1 > 0. \tag{39}$$

Наслідок 4. *Якщо функція*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in S,$$

регулярна в $|z| < 1$ *та задовольняє в* $|z| < 1$ *умові (39), то вона однолисто відображає круг* $|z| < 1$ *на опуклу область.*

Наслідок 5. *Якщо функції*

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in S,$$

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n \in S,$$

регулярні в $|z| < 1$ *та зв'язані співвідношенням*

$$f_2(z) = z f_1'(z),$$

то з

$$Re\left(\frac{z f_2'(z)}{f_2(z)}\right) = Re\left(\frac{z f_1''(z)}{f_1'(z)}\right) + 1$$

випливає, що функція $w = f_1(z)$ *тоді і тільки тоді однолисто відображає круг* $|z| < 1$ *на опуклу область, коли функція* $w = f_2(z)$ *однолисто відображає круг* $|z| < 1$ *на область, зіркоподібну відносно точки* $w = 0$.

Наслідок 6. *Якщо функції*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in S,$$

однолисто відображає круг $|z| < 1$ *на опуклу область, то при всіх* $n = 2, 3, 4, ...$ *маємо*

$$|c_n| \leq 1 \tag{40}$$

і ця оцінка точна.

Точність оцінки (40) випливає з того, що вона досягається для функції

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n,$$

яка відображає круг $|z| < 1$ на півплощину $\mathrm{Re}\,(w) > -\frac{1}{2}$.

Висновок.

Дана дипломна робота присвячена проблемі оцінок коефіцієнтів однолистих функцій. Ця проблема є одною з центральних у теорії функцій комплексного змінного. Тут працювали багато відомих вчених, таких як Шеффер та Спенсер, Гарабедян та Шиффер, Бібербах, Базилевич, Голузін, Дженкинс, Хейман, Тамразов та багато інших.

У представлений роботі розглянуті деякі оцінки коефіцієнтів однолистих функцій класу S. Причому, наведено як ряд точних оцінок, так і ряд оцінок, які можно покращити. Крім того, розглянуті застосування відповідних оцінок до отримання нерівностей для модуля функції та модуля і аргументу її похідної, та доведення деяких теорем покриття, зокрема теореми Кьобе. Також, наведено застосування оцінок коефіцієнтів до деяких питань опуклих та зіркоподібних областей.

Список використаних джерел.

1. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

2. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Том 1. Начала теории. Издание второе. – М.: Наука, 1967. – 485с.

3. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1, 2. – М.: Наука, 1969. – 576 с.

4. Осадчий М.М., Подвисоцький Р.В., Таргонський А.Л., Таргонський Л.П. Комплексний аналіз. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. I Франка, 2011. – 157 с.

5. Хейман В.К. Многолистные функции. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.

6. Стоилов С. Теория функций комплексного переменного. Том 1. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 364 с.

7. Дженкинс Дж.А. Однолистные функции и конформные отображения. – М: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.

Анотація.

У представленій роботі розглядаються оцінки коефіцієнтів функцій класів S та Σ. Крім того, наведено застосування оцінок коефіцієнтів до доведення деяких теорем покриття, зокрема теореми Кьобе, до знаходження нерівностей для модуля функції, модуля та аргументу її похідної. Також, показано застосування оцінок коефіцієнтів до деяких питань опуклих та зіркоподібних областей.

Аннотация.

В представленной работе рассматриваются оценки коэффициентов функций классов Σ и S. Кроме того, приводится применение оценок коэффициентов к доказательству некоторых теорем покрытия, в частности теоремы Кебе, к нахождению неравенств для модуля функции, модуля и аргумента ее производной. Также, дается применение оценок коэффициентов к некоторым вопросам выпуклых и звездообразных областей.

Annotation.

In this work consider estimates coefficients functions class Σ and S. Estimates coefficients use for proof some theorems covering, in particulars theorem Kebe, to estimation inequality for modulus function, modulus and arguments derivative. Estimates coefficients use for some questions convex and radial domains.