Житомирський державний університет ім. І. Франка

ДИПЛОМНА РОБОТА

на тему:

ДЕЯКІ ПРИНЦИПИ МАЖОРАЦІЇ У ГЕОМЕТРИЧНІЙ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОГО ЗМІННОГО

Виконала:
студентка 5 курсу
фізико-математичного
факультету Гергало О.М.

Керівник:
кандидат фізико-математичних
наук, доцент Таргонський А.Л.

Житомир 2014

ЗМІСТ

Вступ.

Принципи мажорації відіграють важливу роль у геометричний теорії функцій комплексного змінного. Основні з них наступні: принцип гіперболічної метрики, принцип Ліндельофа та принцип розширення. Для того, щоб розглянути ці принципи необхідно ще ввести та розібрати властивості багатьох математичних об'єктів. Зокрема, гіперболічної відстані, гармонійної міри, розглянути різні види леми Шварца. Все це пророблено у роботі. Своє застосування принципи мажорації знаходять, зокрема, у теорії мероморфних функцій, отриманню оцінок модуля регулярної в області функції та її похідної, доведенню деяких теорем існування та єдиності, доведенню теорем Шотткі та Ландау, асимптотичних значень цілих функцій скінченого порядку, гіперзбіжності степеневих рядів, доведенню теореми покриття кругів та багато інших. Деякі з цих застосувань наведені у роботі. Відмітимо, що такого роду результати отримували такі видатні математики, як Шотткі, Р. Неванлинна, І. І. Привалов, Г. М. Голузин, Ландау, Альфорс та інші.

Метою роботи є дослідження принципів мажорації у геометричний теорії функцій комплексного змінного та розгляд їх практичних застосувань.

Об'єктами дослідження є обмежені замкнені області на площині та функції комплексного змінного на них.

Предметом дослідження є оцінки змін, які відбуваються з певною областю комплексної площини під час дії на неї деяким відображенням або функцією.

Для розв'зування такого роду задач використовуються багато методів теорії функцій, зокрема метод варіації, параметричний метод, метод екстремальних метрик та інші.

Результати роботи мають теоретичний характер. Своє практичне застосування подібні результати знаходять у багатьох розділах науки та техніки, зокрема безпосередньо у теорії функцій комплексного змінного, теоретичний фізиці та інших.

Робота складається з вступу, первинних понять та теорем комплексного аналізу, які використовуються у роботі, основної частини, висновку, списку використаних джерел, та анотації на українській, російській та англійській мовах. Основна частина складається з восьми розділів у ній розглядаються основні принципи мажорації у геометричний теорії функцій комплексного змінного, зокрема, принцип гіперболічної метрики, принцип Ліндельофа та принцип розширення. Також, вводяться та розглядаються властивості певних математичних об'єктів, необхідних для роботи, таких як, гіперболічна відстань, гармонійна міра, різні види леми Шварца. Крім того, наводяться деякі практичні застосування розглянутих принципів у теорії функцій, тобто до отримання оцінок модуля регулярної в області функції та її похідної, до доведення теорем Шотткі та Ландау, і до отримання деяких оцінок на модуль функції безпосереднім застосуванням принципу Ліндельофа.

Деякі факти та поняття комплексного аналізу.

У першій частині ми наведемо деякі означення та факти теорії функцій комплексного змінного, які будуть використовуватися у нашій роботі.

Означення. *Областю на комплексній площині називають множину D точок, яка задовольняє наступним властивостям:*

1) разом з кожною точкою з D цій множині належить і достатньо малий круг з центром в цій точці (властивість відкритості),

2) будь-які дві точки D можно з'єднати ламаною, всі точки якої належать D (властивість зв'язності).

Простими прикладами областей можуть служити околи точок на комплексній площині.

Означення. *Під ε-околом точки a розуміють відкритий круг радіусу ε з центром в цій точці, тобто сукупність точок z, які задовольняють нерівності*

$$|z - a| < \varepsilon.$$

Означення. *Межовою точкою області D називають таку точку, яка сама не належить D, але в будь-якому околі якої містяться точки цієї області.*

Означення. *Сукупність межових точок області D називають межею цієї області.*

Означення. *Область D разом зі своєю межею позначається символом $\overline{D}$ та називається замкненою областю.*

Означення. *Неперервною кривою називається множина точок площини, координати* x *та* y *яких можуть бути задані як неперервні функції*

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

дійсного змінного t *в деякому скінченому проміжку* $t \in [a; b]$.

Означення. *Неперервна крива*

$$z = z(t), \qquad z(t) = \varphi(t) + i\psi(t),\ a \le t \le b,$$

називається кривою Жордана, якщо для двох різних значень t', t'', $t' < t''$, *з* $[a; b)$ *маємо*

$$z(t') \ne z(t''), \qquad z(t'') \ne z(b).$$

Точки $z(a)$ *та* $z(b)$ *можуть як співпадати, так й бути різними. У першому випадку крива називається замкнутою, а у другому незамкнутою.*

Означення. *Крива називається гладкою, якщо дотична проведена до неї під час руху вздовж кривої змінюється неперервно.*

Означення. *Крива називається кусково-гладкою, якщо її можно розбити на скінчене число гладких кривих.*

Означення. *Крива називається аналітичною, якщо вона визначається рівнянням*

$$z = z(t), \qquad a \le t \le b,$$

де $z(t)$ *біля кожного значення* $t = t_0$, $a \le t_0 \le b$, *розкладається в збіж-*

ний степеневий ряд

$$z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^n$$

з $c_1 \neq 0$.

Означення. *Крива називається кусково-аналітичною, якщо її можно розбити на скінчене число аналітичних кривих.*

Означення. *Нехай на комплексній площині задана кусково-гладка крива* L *з параметричним представленням* $x = x(t), y = y(t)$. *Диференційованим елементом кривої назвемо величину*

$$d\sigma = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Означення. *Область* D *називається однозв'зною, якщо її межа зв'язна (складається з одної зв'язної частини).*

Означення. *У випадку обмеженої області* D *число зв'язних частин, на які розбивається її межа, називається порядком зв'язності цієї області, а область називається багатозв'язною.*

Нехай є однозв'зна область D та її межа – Γ. Виберемо на Γ будь-яку точку та будемо, відправляючись від цієї точки, обходити Γ.

Означення. *Додатнім напрямом обхода межі області вважаємо такий, при якому область залишається весь час зліва. При цьому деякі точки* Γ *будемо проходити лише один раз, а інші – декілька раз. Точки першого типу будемо називати простими, а другого типа – кратними точками контура* Γ, *причому число раз, які проходимо точку, назвемо її кратністю.*

Означення. *Замкнена множина, яка складається більше ніж з однієї точки, називається континуумом, якщо її не можна розбити на дві непорожні замкнені множини без спільних точок.*

Означення. *Кажуть, що на множині M точок площини z задана функція*

$$w = f(z),$$

якщо вказан закон, за яким кожній точці z з M ставиться у відповідність одна точка або сукупність точок w. У першому випадку функція $w = f(z)$ називається однозначна, а у другому – многозначна.

Означення. *Якщо при відображенні $w = f(z)$ двом різним точкам M завжди відповідають різні точки N, то таке відображення називається однолистим в M.*

Означення. *Якщо функція $w = f(z)$ однозначна та однолиста на множині M, то таке відображення називається взаємно однозначним в M.*

Нехай функція $w = f(z)$ визначена та однозначна в деякому околі точки $z_0 = x_0 + iy_0$, точки крім, можливо, самої точки z_0.

Означення. *Функція $f(z)$, диференціовна в кожній точці деякої області D, називається аналітичною (інакше, регулярною або моногеною) в цій області.*

Означення. *Аналітичним продовженням функції називається таке розширення області визначення функції на ширшу область, при якому вона була б аналітичною і в новій області.*

Означення. *Функція $f(z)$ називається мероморфною в області B, якщо вона в цій області має в якості особливих точок (точки у яких функція не є аналітичною) тільки полюси (точки, при розкладі функції в околі яких у ряд Лорана, головна його частина має скінчену кількість членів).*

Означення. *Точка z_0 називається нулем аналітичної функції $f(z)$, якщо $f(z_0) = 0$.*

Натуральне число n називається кратністю нуля аналітичної функції $f(z)$, якщо $f(z_0) = 0$ та $f(z) = (z - z_0)g(z)$, де $g(z)$ – аналітична функція в деякому околі точки z_0 та $g(z_0) \neq 0, \infty$.

Означення. *Якщо при однолистому відображенні $f(z)$ області B на B' похідна $f'(z)$ відмінна від нуля в усіх скінчених точках області B, таке відображення $f(z)$ називається однолистим конформним відображенням області B на B'.*

Означення. *Розглянемо в багатоз'язній області B функції, які продовжуються в B по довільному шляху. Тоді, серед таких функцій існує функція така, що всі її значення, які вона приймає в B містяться в крузі $|\zeta| < 1$ та, що кожне значення з круга $|\zeta| < 1$ приймається функцією точно в одній точці області B. Відповідність, яку встановлює ця функція між точками області B та точками круга $|\zeta| < 1$, будемо називати конформним відображенням області B на круг $|\zeta| < 1$.*

Обернене до цього відображення називається конформним відображенням круга $|\zeta| < 1$ на область B.

Означення. *Дробово-лінійною функцією називається відношення двох* *многочленів першого степеня, тобто*

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

де a, b, c, d *– сталі комплексні числа, що задовольняють умові*

$$ad - bc \neq 0.$$

Означення. *Розширенням області* B *за рахунок зміни частини межі* α, *будемо розуміти заміну області* B *на область* B', $B' \subset B$, *яка містить на межі всю множину* α.

Принцип максимуму модуля аналітичної функції. *Якщо функція* $f(z)$ *є аналітичною та неперервною в обмеженій замкненій області* D *комплексної площини, то функція* $|f(z)|$ *досягає свого максимального значення на межі області* D.

Зокрема, якщо аналітична в області функція досягає свого найбільшого значення всередині області, то така функція є сталою у цій області.

Означення. *Дійсна функція двох змінних* $u(x, y)$ *називається гармонійною в області* B, *якщо вона однозначна та неперервна в* B *разом із своїми похідними до другого порядку включно, та задовольняє в цій області рівнянню Лапласа*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Якщо ж область B *містить* ∞, *то* $u(x, y)$ *повинна бути обмежена в околі* ∞.

Теорема. (Гарнак). *Будь-яка послідовність функцій*

$$u_n(z),\ n = 1, 2, 3, ...$$

гармонічних в області B, *монотонно не спадна в* B, *тобто*

$$u_{n+1}(z) \geq u_n(z),\ n = 1, 2, 3, ...,$$

рівномірно збіжна всередині B *або до гармонічної функції, або до* $+\infty$.

Принцип максимуму гармонічної функції. *Якщо функція* $u(z)$ *є гармонічною та обмеженою зверху (знизу) в області* B *та якщо при наближенні точки* z *області* B *до будь-якої межової точки цієї області, за виключенням скінченого їх числа, всі її граничні значення не перевищують* M, *то всюди в* B *маємо*

$$u(z) \leq M\ (u(z) \geq M).$$

Означення. *Розглянемо обмежену замкнену множину* E *точок площини* z. *Доповнення до неї на площині* z *складається з скінченої або зчисленої множини областей без спільних точок. Ту з цих областей, яка містить* ∞, *позначимо через* B. *Під вичерпанням області* B *областями* $B^{(n)}$, $n = 1, 2, 3, ...$, *будемо розуміти те, що*

$$\overline{B^{(n)}} \subset B^{(n+1)},\ B^{(n)} \subset B$$

та кожна точка $z \in B$, *починаючи з деякого* n *міститься в* $B^{(n)}$.

Означення. *Функція* $g_n(z, \infty)$, *яка в області* $B^{(n)}$ *гармонічна, крім точки* $z = \infty$, *неперервна, включаючи межу* $K^{(n)}$, *та на* $K^{(n)}$ *рівна* *нулю, а в околі точки $z = \infty$ веде себе так, що границя*

$$\lim_{z \to \infty} (g_n(z, \infty) - \ln |z|) = \gamma_n$$

існує і скінчена, називається функцією Гріна для області $B^{(n)}$.

Величина γ_n називається сталою Робена для області $B^{(n)}$.

Отже, в околі $z = \infty$ маємо:

$$g_n(z, \infty) = \ln |z| + \gamma_n + u_n(z),$$

де $u_n(z)$ є гармонійною функцією в $B^{(n)}$, включаючи точку $z = \infty$, та при $z \to \infty$ прямує до нуля.

При $n \to \infty$ функція

$$\gamma_n + u_n(z)$$

або всюди в B прямує до $+\infty$, або ж прямує до гармонійної функції

$$\gamma + u(z),\ u(\infty) = 0.$$

Означення. *При цьому величина γ називається сталою Робена для області B, величина $C = e^{-\gamma}$ – ємністю множини E, а функція*

$$g(z, \infty) = \ln |z| + \gamma + u(z)$$

– функцією Гріна області B.

Гіперболічна відстань. Різні види леми Шварца.

У цьому розділі ми дамо поняття та розглянемо найпростіші властивості гіперболічної відстані, а також наведемо декілька форм, зокрема інваріантну, леми Шварца.

Спочатку розглянемо класичний вигляд леми Шварца.

Теорема 1. *Якщо функція $f(z)$ регулярна в $|z| < 1$, $f(0) = 0$ та $|f(z)| \leq 1$ в $|z| < 1$, то в $|z| < 1$ мають місце нерівності*

$$|f(z)| \leq |z|, \qquad |f'(0)| \leq 1.$$

Знаки рівності (в першій нерівності при $z \neq 0$) будуть тут мати місце тільки у випадку, коли

$$f(z) = \varepsilon z, \qquad |\varepsilon| = 1.$$

Доведення. Відмітимо, що функція $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z}$ аналітична в $|z| < 1$, якщо покласти $\varphi(0) = f'(0)$.

Так як, згідно принципу максимума модуля аналітичної функції, максимум модуля $|\varphi(z)|$ в крузі $|z| \leq r$, $r < 1$, досягається на межі, то в $|z| \leq r$, маємо

$$|\varphi(z)| \leq \frac{1}{r}.$$

Але при фіксованому z можно спрямувати r до 1. Звідси отримаємо

$$|\varphi(z)| \leq 1.$$

З останньої нерівності й випливають обидві оцінки вказані у формулюванні теореми.

Нехай тепер в деякій точці z_0 з круга $|z| < 1$ маємо

$$|\varphi(z_0)| = 1,$$

то $\varphi(z)$ досягає в точці z_0 максимуму, що можливо, згідно принципу максимума модуля аналітичної функції, тільки у випадку, якщо

$$\varphi(z) \equiv const = e^{i\alpha},$$

тобто

$$f(z) = e^{i\alpha} z.$$

Лема Шварца доведена.

Розглянемо тепер одне узагальнення класичного формулювання леми Шварца, тобто функції для яких умова $f(0) = 0$ не виконується.

Теорема 2. *Якщо функція $f(z)$ регулярна в $|z| < 1$ та $|f(z)| \leq 1$ в $|z| < 1$, то при будь-яких ζ та z з круга $|z| < 1$ мають місце нерівності*

$$\left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{1 - \overline{f(z)} f(\zeta)} \right| \leq \left| \frac{\zeta - z}{1 - \overline{z}\zeta} \right|, \tag{1}$$

$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}. \tag{2}$$

Знаки рівності будуть тут мати місце тільки у випадку, коли

$$f(z) = \varepsilon \frac{z + a}{1 + \overline{a} z}, \qquad |\varepsilon| = 1, \qquad |a| < 1.$$

Доведення. До функції

$$g(\zeta) = \frac{f\left(\frac{\zeta+z}{1+\overline{z}\zeta}\right) - f(z)}{1 - \overline{f(z)}f\left(\frac{\zeta+z}{1+\overline{z}\zeta}\right)},$$

де

$$g'(0) = \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}f'(z)$$

застосуємо класичний вигляд леми Шварца та отримаємо обидві оцінки вказані у формулюванні теореми та твердження відносно досягання знаку рівності. Узагальнена лема Шварца доведена.

Користуючись оцінкою (1) можно отримати наступне співвідношення

$$|f(\zeta)| \leq \frac{|\zeta| + |f(0)|}{1+|f(0)||\zeta|}. \tag{3}$$

Причому при $\zeta \neq 0$ знак рівності тут буде досягатися тільки у тому випадку, коли

$$f(\zeta) = \varepsilon\frac{\zeta+a}{1+\overline{a}\zeta},\ |\varepsilon| = 1,\ |a| < 1, \qquad \text{та } \arg\zeta = \arg a, \text{якщо } a \neq 0.$$

З'ясуємо тепер геометричний зміст теореми 2.

Нехай z_1 та z_2 – дві точки круга $|z| < 1$, а z_3 та z_4 – точки перетину кола $|z| = 1$ з ортогональним до нього колом, яке проходить через z_1 та z_2, причому використовуємо таке позначення, що точка z_3 ближче до z_1, ніж до z_2. Утворимо ангармонічне відношення цих чотирьох точок

$$(z_3, z_1, z_2, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}.$$

Відомі наступні властивості ангармонічного відношення чотирьох точок:

1. Ангармонічне відношення чотирьох точок додатне та менше одиниці для всіх точок з відкритого одиничного круга.

2. Ангармонічне відношення чотирьох точок інваріантно відносно довільного дробово-лінійного перетворення комплексної площини.

3. Для ангармонічне відношення чотирьох точок справедлива формула

$$(z_3, z_1, z_2, z_4) = \frac{1 - \left|\frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1} z_2}\right|}{1 + \left|\frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1} z_2}\right|}.$$

Введемо поняття гіперболічної відстані.

Означення. *Гіперболічною відстанню між точками* z_1 *та* z_2 *круга* $|z| < 1$ *назвемо величину*

$$D(z_1, z_2) = -\frac{1}{2}\ln(z_3, z_1, z_2, z_4) = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + \left|\frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1} z_2}\right|}{1 - \left|\frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1} z_2}\right|}.$$

Відмітимо наступні властивості гіперболічної відстані:

1. $D(z_1, z_2) = D(z_2, z_1)$.

2. $D(z_1, z_2) \geq 0$.

3. Гіперболічна відстань інваріантна відносно дробово-лінійних перетворень комплексної площини.

4. (нерівність трикутника). $D(z_1, z_2) + D(z_2, z_3) \geq D(z_1, z_3)$, причому знак рівності тут досягається тільки у випадку, коли точки z_1, z_2, z_3 містяться на одному колі, ортогональному до кола $|z| = 1$.

Доведення властивостей 1, 2 та 3 безпосередньо випливає з означення гіперболічної відстані.

Проведемо **доведення** властивості 4. Без звуження загальності, внаслідок інваріантості гіперболічної відстані відносно дробово-лінійних перетворень комплексної площини, будемо вважати $z_2 = 0$.

Застосуємо нерівність (3) до функції

$$f(\zeta) = \frac{\zeta - z_1}{1 - \overline{z_1}\zeta}$$

в точці $\zeta = z_3$. Будемо мати:

$$\left| \frac{z_3 - z_1}{1 - \overline{z_1} z_3} \right| \leq \frac{|z_3| + |z_1|}{1 + |z_1||z_3|}.$$

Причому знак рівності має місце тільки у випадку, коли

$$\arg z_1 = \arg z_2.$$

З останнього співвідношення, а також з означення гіперболічної відстані і випливає справедливість нерівності трикутника для гіперболічної відстані. Властивість доведена.

З означення гіперболічної відстані випливає, також наступне співвідношення для приросту аргументу:

$$D(z, z + \triangle z) = \frac{|\triangle z|}{1 - |z|^2}(1 + \varepsilon),$$

де $\varepsilon \to 0$ при $\triangle z \to 0$.

Звідси можно отримати, що лінійний диференціований елемент $d\sigma_z$ в гіперболічній метриці визначається по формулі

$$d\sigma_z = \frac{|dz|}{1 - |z|^2},$$

де $|dz|$ – евклідовий диференціовний елемент.

Відмітимо формулу для знаходження гіперболічної довжини кусково-гладкої кривої $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, яка міститься в крузі $|z| < 1$:

$$L = \int\limits_a^b \frac{|z'(t)|}{1 - |z(t)|^2} dt.$$

Тепер, використовуючи прийняті нами позначення, можно переписати формулювання теореми 2 у інваріантній формі.

Теорема 3. (Інваріантна форма леми Шварца). *Якщо функція $f(z)$ регулярна в $|z| < 1$ та $|f(z)| \leq 1$ в $|z| < 1$, то при будь-яких z_1 та z_2 з круга $|z| < 1$ мають місце нерівності*

$$D\left(f(z_1), f(z_2)\right) \leq D\left(z_1, z_2\right), \tag{4}$$

$$d\sigma_f \leq d\sigma_z. \tag{5}$$

Знаки рівності будуть тут мати місце тільки у випадку, коли $f(z)$ є дробово-лінійна, яка відображає круг $|z| < 1$ в себе.

Відмітимо, що нерівність (4) показує, що при відображенні круга $|z| < 1$ функцією $w = f(z)$, регулярною в $|z| < 1$ і такою, що $|f(z)| \leq 1$ в $|z| < 1$, гіперболічна відстань між образами точок z_1 та z_2 круга $|z| < 1$ не перевищує гіперболічної відстані між самими точками z_1 та z_2, та дорівнює цій відстані тільки у випадку відображення круга $|z| < 1$ в себе. З нерівності (5) випливає, що при цьому ж відображенні будь-яка кусково-гладка крива переходить у криву не більшої гіперболічної довжини.

Відмітимо тепер деякі посилення леми Шварца.

Теорема 4. *Якщо функція*

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k, \qquad n \geq 1,$$

регулярна в $|z| < 1$ *та* $|f(z)| < 1$ *в* $|z| < 1$, *то в* $|z| < 1$ *має місце нерівність*

$$|f(z)| \leq |z|^n.$$

Знак рівності буде тут мати місце тільки у випадку, коли

$$f(z) = \varepsilon z^n, \qquad |\varepsilon| = 1.$$

Доведення цієї теореми проводиться аналогічно доведенню леми Шварца для функції

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z^n}, \qquad \varphi(0) = c_n.$$

Теорема 5. *Якщо функція*

$$f(z) = c_0 + \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k, \qquad n \geq 1,$$

регулярна в $|z| < 1$ *та* $|f(z)| < 1$ *в* $|z| < 1$, *то в* $|z| < 1$ *мають місце нерівності*

$$|f'(z)| \leq \frac{n|z|^{n-1}}{1 - |z|^{2n}} \left(1 - |f(z)|^2\right) \tag{6}$$

або

$$d\sigma_f \leq d\sigma_{z^n}.$$

Знаки рівності будуть тут мати місце тільки у випадку, коли

$$f(z) = \varepsilon \frac{z^n + a}{1 + \bar{a} z^n}, \qquad |\varepsilon| = 1, \qquad |a| < 1.$$

Доведення. Внаслідок інваріантості $d\sigma_z$ відносно дробово-лінійного перетворення круга $|z| < 1$ в себе, маємо:

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} = \frac{|f_1'(z)|}{1 - |f_1(z)|^2},$$

де

$$f_1(z) = \frac{f(z) - c_0}{1 - \overline{c_0} f(z)} = \sum_{k=n}^{\infty} \gamma_k z^k.$$

Так як функція

$$\varphi(z) = \frac{f_1(z)}{z^n} \text{ в } |z| < 1$$

по модулю не перевищує 1, то до неї може бути застосована нерівність (2), яка дає

$$\left| \frac{f_1'(z)}{z^n} - n \frac{f_1(z)}{z^{n+1}} \right| \leq \frac{r^{2n} - |f_1(z)|^2}{r^{2n} \left(1 - r^2\right)}.$$

Звідси маємо:

$$|f_1'(z)| \leq n \frac{\rho}{r} + \frac{r^{2n} - \rho^2}{r^n \left(1 - r^2\right)}, \qquad \rho = |f_1(z)|,$$

та, отже,

$$\frac{|f_1'(z)|}{1 - |f_1(z)|^2} \leq \frac{n \frac{\rho}{r} + \frac{r^{2n} - \rho^2}{r^n (1 - r^2)}}{1 - \rho^2}. \tag{7}$$

Тут

$$\rho = |f_1(z)| \leq r^n.$$

Покажемо, що дріб у правій частині (7), як функція від ρ, зростає при $0 \leq \rho \leq r^n$. Дійсно, її похідна по ρ має однаковий знак з виразом

$$\frac{n}{r} \rho^2 - 2 \frac{1 - r^{2n}}{r^n \left(1 - r^2\right)} \rho + \frac{n}{r}. \tag{8}$$

Так як добуток коренів полінома (8) (відносно ρ) дорівнює 1, то цей поліном має в

$$0 < \rho < r^n$$

не більше одного кореня. Але (8) додатне при $\rho = 0$. Доведемо, що воно додатне і при $\rho = r^n$. Маємо,

$$\frac{n}{r}r^{2n} - 2\frac{1-r^{2n}}{1-r^2} + \frac{n}{r} =$$

$$= r^{n-1}\left(n\left(r^n + \frac{1}{r^n}\right) - 2\left(r^{n-1} + \frac{1}{r^{n-1}}\right) - 2\left(r^{n-3} + \frac{1}{r^{n-3}}\right) - ...\right);$$

і так як $x + \frac{1}{x}$ спадає при $0 < x < 1$, то в $0 < r < 1$ маємо:

$$r^n + \frac{1}{r^n} \geq r^k + \frac{1}{r^k}, \qquad k = 0, 1, 2, ..., n-1;$$

отже, вираз (8) додатній. Це й доводить, що права частина (7) відносно ρ зростає при $0 \leq \rho \leq r^n$. Підставляючи в (7) замість ρ не меншу величину ніж r^n, отримаємо (6). Крім того, на основі попереднього, випливає, що знак рівності в (6) може досягатися тільки у випадку, коли

$$f(z) = \varepsilon z^n, \qquad |\varepsilon| = 1,$$

або, коли,

$$f(z) = \varepsilon\frac{z^n + a}{1 + \bar{a}z^n}, \qquad |\varepsilon| = 1, \qquad |a| < 1.$$

Безпосередньою перевіркою отримаємо, що дійсно в (6) має місце знак рівності. Теорема доведена.

Розглянемо тепер одне посилення попередньої теореми.

Теорема 6. *Якщо функція*

$$f(z) = c_0 + \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k, \qquad n \geq 1,$$

регулярна в $|z| < 1$ *та* $|f(z)| < 1$ *в* $|z| < 1$, *то в* $|z| < 1$ *має місце нерівність*

$$d\sigma_f \leq \frac{\varphi'(r)}{1 - |\varphi(r)|^2}|dz| = d\sigma_{\varphi(r)},$$

де

$$r = |z|, \quad \varphi(r) = r^n \frac{r + |\gamma_n|}{1 + r|\gamma_n|}, \quad \gamma_n = \frac{c_n}{1 - |c_0|^2}.$$

Знак рівності буде тут мати місце тільки у випадку, коли

$$f(z) = \frac{c_0 + z^n \frac{z+\gamma_n}{1+\overline{\gamma_n}z}}{1 + \overline{c_0} z^n \frac{z+\gamma_n}{1+\overline{\gamma_n}z}} = c_0 + c_n z^n + \ldots .$$

Доведення випливає з доведення теореми 5, якщо прийняти, що

$$\rho = |f_1(z)| \leq r^n \frac{r + |\gamma_n|}{1 + r|\gamma_n|} \leq r^n, \quad |\gamma_n| = \frac{|c_n|}{1 - |c_0|^2},$$

і, отже, в (7) ρ можно замінити на не меншу величину за

$$r^n \frac{r + |\gamma_n|}{1 + r|\gamma_n|}.$$

Теорема доведена.

Принцип гіперболічної метрики.

У цьому розділі ми узагальнимо інваріантну форму леми Шварца на випадок багатозв'язної області. Це узагальнення і має назву принципу гіперболічної метрики.

Відмітимо, що гіперболічну метрику в області B будемо визначати, як перенесену у B при вказаному відображенні гіперболічної метрики круга $|\zeta| < 1$; інакше кажучи, її диференційований елемент визначається по формулі

$$d\sigma_z = d\sigma_\zeta = \frac{|d\zeta|}{1 - |\zeta|^2} = \frac{|\zeta'(z)|\,|dz|}{1 - |\zeta(z)|^2}. \tag{9}$$

Так як останній дріб інваріантний відносно дробово-лінійних перетворень функції $\zeta(z)$, то гіперболічна метрика незалежить ні від вибору відображаючої функції, ні від вибору її вітки та повністю визначається областю B та розміщенням точок в області B.

Виходячи з (9), визначаємо довжину L будь-якої кусково-гладкої кривої

$$l: \ z = z(t), \ a \leq t \leq b,$$

яка міститься в B по формулі

$$L = \int\limits_l d\sigma_z = \int\limits_l \frac{|\zeta'(z)|\,|dz|}{1 - |\zeta(z)|^2} = \int\limits_a^b \frac{|\zeta'(z(t))|\,|z'(t)|\,dt}{1 - |\zeta(z(t))|^2}.$$

Тепер можна сформулювати і сам принцип гіперболічної метрики.

Теорема 7. (Принцип гіперболічної метрики.) *Якщо області B та G містяться відповідно у площинах z та w і мають кожна не менше ніж по три межові точки, і якщо аналітична функція $w = f(z)$,* *визначена будь-яким своїм елементом, може бути продовжена в B по довільному шляху та задовольняє умові, що всі значення, які вона при цьому приймає в B, містяться в області G, то будь-яка кусково-гладка крива l в області B переходить при відображенні $w = f(z)$ в криву λ, гіперболічна довжина якої відносно області G не перевищує гіперболічної довжини кривої l відносно області B. Рівність цих довжин буде досягатися тільки у випадку, коли*

$$f(z) = w(\zeta(z)).$$

Тут функція $\zeta = \zeta(z)$ конформно відображає область B на круг $|\zeta| < 1$, а функція $w = w(\zeta)$ конформно відображає круг $|\zeta| < 1$ на область G.

Якщо ж $d\sigma_z$ є диференційований елемент в точці $z \in B$, а $d\sigma_w$ – відповідний диференційований елемент в образі $w \in G$, то маємо

$$d\sigma_w \leq d\sigma_z$$

з аналогічним випадком досяжності знаку рівності.

Доведення. Нехай функції $\zeta = \zeta(z)$ та $t = t(w)$ відображають області B та G відповідно на круги $|\zeta| < 1$ та $|t| < 1$. Позначимо через $z = z(\zeta)$ функцію, обернену до $\zeta = \zeta(z)$. Утворимо складену функцію

$$t = t\left(f(z(\zeta))\right) = \chi(\zeta).$$

Вона буде регулярною в $|\zeta| < 1$ та $|\chi(\zeta)| < 1$ в $|\zeta| < 1$. За теоремою 3 маємо:

$$\frac{|\chi'(\zeta)|\,|d\zeta|}{1 - |\chi(\zeta)|^2} \leq \frac{|d\zeta|}{1 - |\zeta|^2}$$

або

$$\frac{|t'\left(f(z(\zeta))\right)|\,|f'(z(\zeta))|\,|z'(\zeta)|}{1-|t\left(f(z(\zeta))\right)|^2}|d\zeta| \le \frac{|d\zeta|}{1-|\zeta|^2}.$$

Далі, переходячи від круга $|\zeta| < 1$ до області B, отримаємо в B нерівність:

$$\frac{|t'\left(f(z)\right)|\,|f'(z)|\,|dz|}{1-|t\left(f(z)\right)|^2} \le \frac{|\zeta'(z)|\,|dz|}{1-|\zeta(z)|^2}, \tag{10}$$

тобто

$$d\sigma_w \le d\sigma_z, \qquad w = f(z).$$

Тепер інтегруючи (10) по l, отримаємо, що довжина кривої λ не перевищує довжини кривої l. Знаки рівностей будуть досягатися тільки у випадку, коли $\chi(\zeta)$ однолисто відображає круг $|\zeta| < 1$ в себе, а отже, функція

$$f(z) = t^{-1}\left(\chi(\zeta(z))\right)$$

має вигляд, вказаний у формулюванні принципу. Принцип гіперболічної метрики доведено.

Наслідок. *Якщо в площині z дани області B та G, причому $B \subset G$ та $B \ne G$, то в усій області B маємо:*

$$d_G\sigma_z \le d_B\sigma_z,$$

тобто з розширенням області гіперболічна відстань між одними і тими ж двома її точками зменшуєтъся.

Доведення цього наслідку отримаємо з принципу гіперболічної метрики застосованого до функції

$$f(z) \equiv z.$$

Принцип Ліндельофа.

Використовуючи поняття вище введеної функції Гріна можно дати ще одне узагальнення леми Шварца, яке і має назву принципу Ліндельофа.

Теорема 8. (Принцип Ліндельофа.) *Якщо B та G дві скінченно-зв'язні області, які обмежені кривими Жордана, що міститься, відповідно, у площинах z та w, а функція $w = f(z)$ – регулярна в області B та приймає в ній значення, які містяться в області G, то для будь-яких двох точок $z, z_0 \in B$, маємо:*

$$g_G\left(f(z), f(z_0)\right) \geq g_B\left(z, z_0\right), \tag{11}$$

де $g_B\left(z, z_0\right)$ та $g_G\left(w, w_0\right)$ – функції Гріна для областей B та G.

Якщо знак рівності в (11) має місце для однієї пари точок $z, z_0 \in B$, то він має місце і для всіх точок $z, z_0 \in B$.

Доведення. Зразу відмітимо, що можно вважати $z_0 \neq \infty$, бо інакше прийдемо до цієї умови певним дробово-лінійним перетворенням комплексної площини z.

Розглянемо дві функції:

$$g_G\left(f(z), f(z_0)\right) + \ln\left|f(z) - f(z_0)\right|, \qquad g_B\left(z, z_0\right) + \ln\left|z - z_0\right|.$$

Обидві вони є гармонійними в області B, включаючи і точку $z = z_0$. Тому гармонійною в B буде і їх різниця, тобто функція

$$g_G\left(f(z), f(z_0)\right) - g_B\left(z, z_0\right) + \ln\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right|.$$

Це означає, що різниця

$$g_G(f(z), f(z_0)) - g_B(z, z_0)$$

є гармонійною функцією в області B, за виключенням нулів функції $f(z) - f(z_0)$, при наближенні до яких вона може прямувати до $+\infty$. При наближенні до межі області B всі граничні значення цієї різниці невід'ємні. Отже, за властивістю гармонійних функцій всюди в B маємо:

$$g_G(f(z), f(z_0)) - g_B(z, z_0) \geq 0,$$

причому знак рівності буде досягатися тільки у випадку, коли

$$g_G(f(z), f(z_0)) - g_B(z, z_0) \equiv 0.$$

Принцип Ліндельофа доведено.

У випадку однозв'язних областей B та G справедливий наступний наслідок принципу Ліндельофа.

Наслідок. *Якщо B_r та G_r – образи круга $|\zeta| \leq r$ при відображенні круга $|\zeta| < 1$, відповідно, на області B та G таке, що $\zeta = 0$ переходить, відповідно, в z_0 та $w_0 = f(z_0)$, то значення, які приймає в області B_r функція $w = f(z)$, всі містяться в області G_r, причому, якщо одне з цих значень міститься на межі області G_r, то функція $w = f(z)$ однолисто відображає B на G.*

Доведення випливає з принципу Ліндельофа і того факту, що для однозв'язної області функція Гріна $g_B(z, z_0)$ дорівнює взятому зі знаком мінус логарифму модуля функції, яка однолисто відображає цю область на круг $|\zeta| < 1$ так, що точка $z = z_0$ переходить в $\zeta = 0$. Наслідок доведено.

Поняття гармонічної міри та її найпростіші властивості.

Нехай α є обмежена замкнена множина точок площини z та B – будь-яка з областей, яка міститься у множині $\mathbb{C} \setminus \alpha$. Віднімемо від області B замкнену криву Жордана β (вона не має спільних точок з α), а також її внутрішню частину, позначимо частину області B, яка залишилася через B_β. Тепер нехай

$$B^{(n)},\ n = 1, 2, 3, ...,$$

є послідовність областей, які містяться в B, містять β, з межами α_n, які складаються із скінченого числа замкнених кривих Жордана, та які вичерпують область B. Далі, нехай

$$B_\beta^{(n)},\ n = 1, 2, 3, ...,$$

є області, отримані з області $B^{(n)}$ відніманням з них кривої β та області, яку ця крива обмежує.

Позначимо через $\omega\left(z, \alpha_n, B_\beta^{(n)}\right)$ – функцію, гармонічну в області $B_\beta^{(n)}$ та рівну одиниці на α_n та нулю на β. Ця функція буде невід'ємна та менше одиниці в $B_\beta^{(n)}$. Різниця

$$\omega\left(z, \alpha_n, B_\beta^{(n)}\right) - \omega\left(z, \alpha_{n+1}, B_\beta^{(n+1)}\right),$$

як невід'ємна на межі області $B_\beta^{(n)}$, буде додатна всередині області $B_\beta^{(n)}$. Це свідчить, що при фіксованому $z \in B_\beta$, величина $\omega\left(z, \alpha_n, B_\beta^{(n)}\right)$ буде визначена, починаючи з деякого n, та буде спадати із зростанням n. За теоремою Гарнака отримаємо, що

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(z, \alpha_n, B_\beta^{(n)}\right) = \omega\left(z, \alpha, B_\beta\right)$$

існує всюди в B_β та визначає гармонічну функцію в B_β. Зрозуміло, що

$$0 \leq \omega\left(z, \alpha, B_\beta\right) < 1 \text{ в } B_\beta.$$

Відмітимо, що $\omega\left(z, \alpha, B_\beta\right)$ *незалежить від вибору послідовності* $B^{(n)}$.

Дійсно, припустимо протилежне. Тоді, маємо дві послідовності $B^{(n')}$ та $B^{(n'')}$ такого роду. Тому для довільного n' можно знайти таке n'', що

$$B_\beta^{(n')} \subset B_\beta^{(n'')}$$

та навпаки. Отже, в першому випадку отримаємо нерівність

$$\omega\left(z, \alpha_{n'}, B_\beta^{n'}\right) < \omega\left(z, \alpha_{n''}, B_\beta^{n''}\right),$$

а в другому обернену нерівність. Отримали протиріччя.

Означення. *Величина $\omega\left(z, \alpha, B_\beta\right)$ називається гармонічною мірою множини α відносно області B, кривої β та точки $z \in B_\beta$.*

Лема 1. *При наближенні точки z з області B_β к точкам множини α, гармонічна міра $\omega\left(z, \alpha, B_\beta\right)$ не завжди прямує до одиниці.*

Доведення. Це твердження є невірним при наближенні точки z до ізольованих точок множини α, бо в кожній з цих точок $\omega\left(z, \alpha, B_\beta\right)$ є гармонічна функція.

Лема 2. *Якщо $\omega\left(z, \alpha, B_\beta\right) \neq 0$, то при наближенні точки z з області B_β к точкам множини α, граничні значення гармонічної міри $\omega\left(z, \alpha, B_\beta\right)$ обмежені знизу додатнім числом.*

Доведення. Нехай β_0 є замкнена крива Жордана, яка міститься в B та містить всередині себе криву β, і не містить жодної точки множини

α. На β_0 функція $\omega\left(z,\alpha,B_\beta\right)$ має додатній мінімум θ, $0<\theta<1$. Нехай z_0 – довільна точка області B_β, яка міститься у зовнішності β_0, та нехай n настільки велике, що β_0 та z_0 містяться в $B_\beta^{(n)}$. Так як в $B_\beta^{(n)}$ маємо

$$\omega\left(z,\alpha,B_\beta^{(n)}\right)>\omega\left(z,\alpha,B_\beta\right),$$

то на β_0 буде

$$\omega\left(z,\alpha_n,B_\beta^{(n)}\right)>\theta.$$

Крім того, на α_n маємо

$$\omega\left(z,\alpha_n,B_\beta^{(n)}\right)=1.$$

Отже, за принципом максимуму для гармонічних функцій, маємо

$$\omega\left(z_0,\alpha_n,B_\beta^{(n)}\right)\geq\theta$$

при всіх достатньо великих n. При $n\to\infty$ це дає

$$\omega\left(z_0,\alpha,B_\beta\right)\geq\theta>0.$$

Звідси слідує, що всі граничні значення $\omega\left(z,\alpha,B_\beta\right)$ при наближенні z до α більше за θ. Лема доведена.

Логічно виникає питання о критеріях, коли гармонічна міра даної множини α рівна нулю та коли вона додатна. Справедливі наступні результати.

Теорема 9. *Рівність нулю гармонічної міри $\omega\left(z,\alpha,B_\beta\right)$ незалежить від вибору кривої β, якщо вона міститься в одній і тій самій області B, яка є доповненням α.*

Доведення. Рівність або нерівність нулю гармонічної міри $\omega\left(z, \alpha, B_{\beta}\right)$ має місце одночасно для всіх точок області B_{β}, бо інакше, якщо вона рівна нулю в одній точці з B_{β}, то за принципом максимуму для гармонічної функції вона рівна нулю всюди в B_{β}.

Відмітимо, що таке ж твердження має місце і для кривих β, які вибираються в області B. Дійсно, нехай для деякої кривої β маємо

$$\omega\left(z, \alpha, B_{\beta}\right)=0$$

та нехай β^{*} – інша крива такого ж роду. Нехай γ та γ' – замкнені криві Жордана, які містяться в B, містять всередині себе криві β та β^{*}, та такі, що γ' міститься всередині γ та між γ та β^{*} немає точок множини α. Криві γ та β^{*} разом обмежують область B_{0}, яка міститься в B. Нехай

$$\theta=\max_{z \in \gamma'} \omega\left(z, \gamma, B_{0}\right),\ 0<\theta<1.$$

Задамо тепер $\varepsilon>0$. При n достатньо великому та при $z \in \gamma$ маємо

$$\omega\left(z, \alpha_{n}, B_{\beta}^{(n)}\right)<\varepsilon,$$

бо із збіжності $\omega\left(z, \alpha_{n}, B_{\beta}^{(n)}\right)$ до нуля в B_{β} випливає рівномірна збіжність до нуля всередині B_{β}.

Позначимо через λ та λ' максимуми функції $\omega\left(z, \alpha_{n}, B_{\beta^{*}}^{(n)}\right)$ на γ та γ'. Так як різниця

$$\omega\left(z, \alpha_{n}, B_{\beta^{*}}^{(n)}\right)-\omega\left(z, \alpha_{n}, B_{\beta}^{(n)}\right)$$

є гармонічна функція у частині $B_{1}^{(n)}$ області $B^{(n)}$, яка обмежена кривими α_{n} та γ', та на α_{n} дорівнює нулю, а на γ' не перевищує λ', то звідси маємо

$$\lambda<\lambda'+\varepsilon.$$

Так як різниця

$$\omega\left(z, \alpha_n, B_{\beta^*}^{(n)}\right) - \lambda\omega\left(z, \gamma, B_0\right)$$

є гармонічна функція в B_0, яка дорівнює нулю на β^* та менша нуля на γ, то вона менша нуля в B_0, зокрема, й на γ', де максимум функції $\omega\left(z, \alpha_n, B_{\beta^*}^{(n)}\right)$ дорівнює λ'. Отже, на γ' маємо

$$\lambda' \leq \lambda\omega\left(z, \gamma, B_0\right) \leq \lambda\theta.$$

Звідси й з $\lambda < \lambda' + \varepsilon$ отримаємо

$$\lambda' < \frac{\theta}{1-\theta}\varepsilon.$$

Тому на γ' маємо

$$\omega\left(z, \alpha_n, B_{\beta^*}^{(n)}\right) \leq \frac{\theta}{1-\theta}\varepsilon.$$

Так як ε довільне додатне, то

$$\omega\left(z, \alpha, B_{\beta^*}\right) = 0$$

на γ', а отже, і всюди в B_{β^*}. Теорема доведена.

Теорема 10. *Якщо α містить континуум, то*

$$\omega\left(z, \alpha, B_\beta\right) > 0,$$

яка б не була область B, що є доповненням α, та яка б не була крива $\beta \subset B$.

Доведення. Можно підібрати дробово-лінійне перетворення таке, шо область B має зовнішні точки. Якщо B_0 – область, яка обмежена кривою

β та деякою іншою замкненою кривою Жордана, яка міститься зовні B, то $B_\beta^{(n)} \subset B_0$ та, отже, як вище, доведемо, що при $z \in B_\beta^{(n)}$ маємо

$$\omega\left(z, \alpha, B_\beta^{(n)}\right) \geq \omega\left(z, \alpha_0, B_0\right) > 0.$$

При $n \to \infty$ звідси отримаємо:

$$\omega\left(z, \alpha, B_\beta\right) \geq \omega\left(z, \alpha_0, B_0\right) > 0.$$

З останньої нерівності випливає, що якщо гармонічна міра множини α відносно деякої області, яка є доповненням α, рівна нулю, то α не містить жодного континуума та доповнення до α є єдиною областю, яка містить ∞. Теорема доведена.

Зараз відмітимо деякі властивості множин нульової гармонічної міри.

Теорема 11. *Кожна замкнена частина обмеженої замкненої множини нульової гармонічної міри є також множиною нульової гармонічної міри.*

Доведення випливає з розгляду різниць відповідних функцій типу $\omega\left(z, \alpha_n, B_\beta^{(n)}\right)$.

Теорема 12. *Сума двох обмежених замкнених множин нульової гармонічної міри є множиною нульової гармонічної міри.*

Доведення. Нехай ці множини є α_1 та α_2 та нехай крива β лежить у доповненні до $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$. Для областей $B_1^{(n)}$ та $B_2^{(n)}$, що вичерпують відповідно області, які є доповненнями α_1 та α_2 та містять β, при достатньо великому n маємо:

$$\omega\left(z, \alpha_{1,n}, B_1^{(n)}\right) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \omega\left(z, \alpha_{2,n}, B_2^{(n)}\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тут $\alpha_{1,n}$ та $\alpha_{2,n}$ – межі областей $B_1^{(n)}$ та $B_2^{(n)}$. Нехай тепер $B^{(n)}$ є та з областей спільної частини областей $B_1^{(n)}$ та $B_2^{(n)}$, яка містить β. При певному виборі областей $B_1^{(n)}$ та $B_2^{(n)}$, межа області $B^{(n)}$ при кожному $n = 1, 2, 3, ...$ буде складатися із скінченого числа замкнених кривих Жордана. Тому області $B^{(n)}$, $n = 1, 2, 3, ...$, вичерпують область B. Функція

$$\omega\left(z, \alpha_n, B_\beta^{(n)}\right) - \omega\left(z, \alpha_{1,n}, B_1^{(n)}\right) - \omega\left(z, \alpha_{2,n}, B_2^{(n)}\right)$$

гармонічна в $B_\beta^{(n)}$, рівна нулю на β та не перевищує нуля на α_n. Отже, в B_β маємо:

$$\omega\left(z, \alpha, B_\beta\right) \leq \omega\left(z, \alpha_1, B_1\right) + \omega\left(z, \alpha_2, B_2\right),$$

тобто

$$\omega\left(z, \alpha, B_\beta\right) = 0.$$

Теорема доведена.

Принцип розширення.

Нехай в площині z, є скінченнозв'язна область B, обмежена кривими Жордана. Візьмемо на межі K області B скінченну кількість дуг (замкнених чи відкритих), позначимо множину всіх точок, що належать цим дугам, через α та розглянемо функцію, гармонійну та обмежену в B, рівну 1 на α та рівну 0 у інших точках межі K; тут виключаємо, кінці дуг, які складають α, оскільки в них функція не є неперервною. Така функція існує і єдина її позначимо через $\omega(z, \alpha, B)$ і вона є гармонійною мірою частини α межі K області B відносно точки z. Всюди в B, маємо

$$0 \leq \omega(z, \alpha, B) \leq 1.$$

Якщо межу K розбити на частини $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ вказаного типу, то маємо в B :

$$\sum_{k=1}^{n} \omega\left(z, \alpha_k, B\right) = 1. \tag{12}$$

Важлива властивість гармонійної міри полягає в наступному принципу розширення.

Теорема 13. (Принцип розширення.) *Якщо межа K області B розбита на дві частини α та β (вказаного вище типу), то при розширенні області B за рахунок зміни тільки частини β, гармонійна міра $\omega(z, \alpha, B)$ збільшується, а при розширенні області B за рахунок зміни тільки частини α, гармонійна міра $\omega(z, \alpha, B)$ зменшується.*

Доведення. Нехай B' отримаємо з B розширенням останньої за рахунок зміни тільки β. Тоді функція

$$u(z) = \omega(z, \alpha, B') - \omega(z, \alpha, B),$$

гармонійна та обмежена в B, дорівнює нулю на α та невід'ємна на β. Отже, ця функція невід'ємна та всюди в B, що доводить першу частину твердження. Друга частина твердження випливає з формули

$$\omega(z, \alpha, B) = 1 - \omega(z, \beta, B).$$

Принцип розширення доведено.

Значення принципу розширення полягає в тому, що при різних оцінках він дозволяє посилювати нерівності за рахунок заміни складних частин межі K більш простими, для яких гармонійна міра відносно просто обчислюється.

Деякі оцінки модуля регулярної функції та її похідної.

Зараз ми відмітимо один результат, який дає оцінку похідної регулярної в одиничному крузі функції. Доведення його безпосередньо випливає з теорем 2 та 5.

Теорема 14. *Якщо функція $f(z)$ регулярна в $|z| < 1$ та $|f(z)| < 1$ в $|z| < 1$, то в $|z| < 1$ має місце точна оцінка*

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{1 - |z|^2},$$

причому знак рівності в точці $z = z_0$, $|z_0| < 1$, буде досягатися тільки у випадку функцій

$$f(z) = \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad |\varepsilon| = 1.$$

Якщо, крім того,

$$f(z) = c_0 + \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k, \qquad n \geq 1,$$

то в $|z| < 1$ має місце точна оцінка

$$|f'(z)| \leq \frac{n|z|^{n-1}}{1 - |z|^{2n}},$$

причому тут знак рівності в точці $z = z_0$, $|z_0| < 1$, буде досягатися тільки у випадку функцій

$$f(z) = \varepsilon \frac{z^n - z_0^n}{1 - \overline{z_0^n} z^n}, \quad |\varepsilon| = 1.$$

Тепер наведемо два результати, які дають оцінки для значень регулярної в області функції.

Теорема 15. *Якщо функція $f(z)$ регулярна та обмежена в області B з межею K і нехай K розбита на дві частини α та β, причому всі граничні значення модуля $|f(z)|$ при наближенні з B до внутрішніх точок дуг, які складають α та β, не перевищують, відповідно, M_α та M_β, тоді в B маємо:*

$$\ln|f(z)| \leq \omega(z,\alpha,B)\ln M_\alpha + \omega(z,\beta,B)\ln M_\beta, \tag{13}$$

причому, якщо знак рівності в (13) буде мати місце в одній точці $z \in B$, то він буде мати місце і для всіх точок області B.

Доведення. Функція

$$u(z) = \ln|f(z)| - \omega(z,\alpha,B)\ln M_\alpha - \omega(z,\beta,B)\ln M_\beta,$$

є гармонійною в усіх точках області B, за виключенням нулів функції $f(z)$. При наближенні z з B до всіх точок межі K, включаючи кінці дуг, які складають α та β, всі граничні значення функції $u(z)$ будуть невід'ємні; при наближенні ж до нулів $f(z)$, $u(z)$ прямує до ∞. Отже, всюди в B маємо

$$u(z) \leq 0,$$

тобто справедлива нерівність (13), причому вказане в теоремі зауваження про знак рівності справедливе. Теорема доведена.

Теорема 16. *Якщо функція $f(z)$ регулярна та обмежена в області B з межею K і нехай K розбита на дві частини α та β, причому всі граничні значення модуля $|f(z)|$ при наближенні з B до внутрішніх точок дуг, які складають α та β, не перевищують, відповідно, M_α та*

M_β. Тоді для кожної замкненої множини E, $E \subset B$ існують додатні сталі λ_1 та λ_2

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

які не залежать від вигляду $f(z)$, такі, що на E маємо:

$$|f(z)| \leq M_\alpha^{\lambda_1} M_\beta^{\lambda_1}.$$

Доведення. Нехай M_α та M_β, такі, що

$$M_\alpha < M_\beta.$$

Для функції $f(z)$ в області B має місце нерівність (13), яке внаслідок (12) запишемо у вигляді:

$$|f(z)| \leq \left(\frac{M_\alpha}{M_\beta}\right)^{\omega(z,\alpha,B)} M_\beta. \tag{14}$$

Якщо покласти

$$\lambda_1 = \min_{z \in E} \omega(z, \alpha, B), \qquad \lambda_2 = 1 - \lambda_1,$$

то очевидно, λ_1 та λ_2 додатні і з (14) на E отримаємо:

$$|f(z)| \leq \left(\frac{M_\alpha}{M_\beta}\right)^{\lambda_1} M_\beta = M_\alpha^{\lambda_1} M_\beta^{\lambda_1}.$$

Теорема доведена.

Відмітимо тепер доволі цікавий наслідок попередніх результатів, який має назву теореми Адамара о трьох кругах.

Теорема 17. (Теорема Адамара о трьох кругах.) *Якщо функція $f(z)$ регулярна та обмежена в кільці $B = \{z : r_1 < |z| < r_2\}$, де $\alpha = \{z : |z| = r_1\}$, $\beta = \{z : |z| = r_2\}$, причому всі граничні значення модуля $|f(z)|$ при наближенні з B до внутрішніх точок кіл α та β, не перевищують, відповідно, M_α та M_β. Тоді для точок кола $\{z : |z| = r\}$, $r_1 < r < r_2$ справедлива нерівність:*

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leq M_\alpha^{\frac{\ln \frac{r}{r_2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}} M_\beta^{\frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}}.$$

Доведення цього наслідку випливає з нерівності (13), при

$$\omega(z, \alpha, B) = \frac{\ln \frac{r}{r_2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}, \qquad \omega(z, \beta, B) = \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Теорема доведена.

Теореми Шотткі та Ландау.

Зараз ми наведемо два важливих застосувань принципа гіперболічної метрики, які називаються теоремами Шотткі та Ландау.

Теорема 18. (Теорема Ландау.) *Якщо функція*

$$w = f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

регулярна в крузі $|z| < R$ *та не приймає в* $|z| < R$ q *даних скінчених значень*

$$a_1, a_2, ..., a_q, \qquad q \geq 2.$$

Тоді, якщо $c_1 \neq 0$, *то* R *обмежена скінченою величиною, яка залежить тільки від* $a_1, a_2, ..., a_q, c_0, c_1$.

Доведення. Гіперболічна метрика в крузі $|z| < R$ є диференційований елемент

$$d\sigma_z = \frac{R|dz|}{R^2 - |z|^2}$$

та, зокрема, в точці $z = 0$ буде

$$d\sigma_z = \frac{|dz|}{R}.$$

З іншої сторони, позначимо через $t = \varphi\left(w, a_1, a_2, ..., a_q\right)$ функцію, яка відображає область G, яка представляє всю площину w з виколотими точками $a_1, a_2, ..., a_q$, на круг $|t| < 1$ так, що точка $w = c_0$ переходить в точку $t = 0$. Тоді при $w = c_0$ маємо

$$d_G\sigma_w = \left|\varphi'\left(c_0, a_1, a_2, ..., a_q\right)\right| |dw|.$$

За принципом гіперболічної метрики (теорема 7)

$$d_G\sigma_w \leq d\sigma_z.$$

Це при $z = 0$ дає

$$|\varphi'(c_0, a_1, a_2, ..., a_q)|\,|f'(0)| \leq \frac{1}{R},$$

тобто

$$R \leq \frac{1}{|c_1|\,|\varphi'(c_0, a_1, a_2, ..., a_q)|}.$$

Знак рівності має місце тут тільки у випадку, коли

$$f(z) = \varphi^{-1}\left(\frac{z}{R}, a_1, a_2, ..., a_q\right).$$

Теорема доведена.

Теорема 19. (Теорема Шотткі.) *Якщо функція*

$$w = f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

регулярна в крузі $|z| < R$ та не приймає в $|z| < R$ q даних скінчених значень

$$a_1, a_2, ..., a_q, \qquad q \geq 2.$$

Тоді, в крузі

$$|z| \leq \theta R, \qquad 0 < \theta < 1,$$

модуль $f(z)$ обмежений скінченою величиною, яка залежить тільки від $a_1, a_2, ..., a_q, c_0, c_1$.

Доведення. Яка б не була точка z_0 в крузі

$$|z| \leq \theta R, \qquad 0 < \theta < 1,$$

гіперболічна відстань між точками $f(0)$ та $f(z_0)$ не перевищує гіперболічної відстані між точками 0 та z_0 в крузі $|z| < R$, тобто величини

$$L = \int\limits_0^{\theta R} \frac{Rdr}{R^2 - r^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\theta}{1-\theta}.$$

Якщо E є множина всіх точок області G (тут область G та сама, що і при доведенні теоремі Ландау), гіперболічна відстань яких до точки c_0 не перевищує L, то ця множина обмежена, замкнена та визначається заданням $c_0, a_1, a_2, ..., a_q$. Отже, якщо M є максимум звичайної відстані точок E до $w = 0$, то отримаємо

$$f(z_0) \leq M = M(c_0, a_1, a_2, ..., a_q).$$

Знак рівності буде тут мати місце для тої ж функції, що й в теоремі Ландау. Теорема доведена.

Деякі приклади застосування принципа Ліндельофа.

У цьому розділі ми приведемо декілька прикладів практичного застосування принципу Ліндельофа.

Приклад 1. *Нехай B та G відповідно, круги* $|z| < 1$ *та* $|w| < 1$.

У цьому випадку нерівність (11) співпадає з нерівністю (1) узагальненої леми Шварца.

Приклад 2. *Нехай тепер B є круг* $|z| < 1$, *а G – півплощина* $Re\, w > 0$. *Крім того, нехай* $z_0 = 0$, *а* $w_0 > 0$.

У цьому випадку функція, яка однолисто відображає круг $|\zeta| < 1$ на область B із збереженням початку, є $z = \zeta$, а функція, яка однолисто відображає круг $|\zeta| < 1$ на область G так, що $\zeta = 0$ переходить в $w_0 = f(0)$, має вигляд

$$w = w_0 \frac{1+\zeta}{1-\zeta}.$$

Отже, функція $f(z)$, регулярна в B і така, що

$$\operatorname{Re} f(z) > 0$$

в $|z| < 1$ і

$$f(0) = w_0 > 0,$$

приймає в крузі $|z| < r$, $r < 1$, значення, які містяться в крузі

$$\left| \frac{w - w_0}{w + w_0} \right| < r.$$

Цей круг симетричний відносно дійсної осі та його коло перетинає дійсну вісь у точках

$$w_0 \frac{1+r}{1-r} \text{ та } w_0 \frac{1-r}{1+r}.$$

Це означає, що радіус круга

$$\left|\frac{w-w_0}{w+w_0}\right| < r$$

дорівнює

$$\frac{2w_0 r}{1-r^2}.$$

Зокрема, в $|z|<r$, $r<1$, отримаємо нерівності:

$$f(0)\frac{1-r}{1+r} \le \operatorname{Re} f(z) \le f(0)\frac{1+r}{1-r},$$

$$\operatorname{Im} f(z) \le f(0)\frac{2r}{1-r^2},$$

$$f(0)\frac{1-r}{1+r} \le |f(z)| \le f(0)\frac{1+r}{1-r}.$$

Приклад 3. *Нехай тепер B є круг $|z|<1$, а G – смуга $-1 < Re\, w < 1$. Крім того, нехай $z_0 = 0$, а $w_0 > 0$.*

Функція, яка однолисто відображає одиничний круг $|\zeta|<1$ в G так, що $\zeta = 0$ переходить в $w = 0$, має вигляд:

$$w = \frac{2}{\pi i}\ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta}.$$

Звідси, для функцій $f(z)$, регулярних в крузі $|z|<1$ та таких, що

$$-1 < \operatorname{Re} w < 1 \text{ в } |z| < 1$$

та $f(0)=0$, в $|z|<r$ будуть мати місце нерівності:

$$\operatorname{Re} f(z) \le \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} r,$$

$$\operatorname{Im} f(z) \le \frac{2}{\pi}\ln\frac{1+r}{1-r},$$

$$|f(z)| \leq \frac{2}{\pi} \ln \frac{1+r}{1-r}.$$

Наведемо ще один приклад застосування принципу Ліндельофа, яким сам по собі є узагальненням цього принципу для певного часткового випадку.

Приклад 4. *Нехай функція $f(z)$ регулярна у скінченнозв'язній області B, яка обмежена кривими Жордана, за виключенням полюсів $p_1, p_2, ..., p_\nu$, кожен з яких записан стільки раз, яка його кратність. Нехай, також функція $f(z)$ має в B нулі $n_1, n_2, ..., n_\mu$ (це не обов'язково всі нулі $f(z)$ в B). Крім того, нехай при наближенні до межі області B всі граничні значення модуля $|f(z)|$ не перевищують M.*

Тоді зрозуміло, що функція

$$\ln \frac{|f(z)|}{M} + \sum_{k=1}^{\mu} g_B(z, n_k) - \sum_{k=1}^{\nu} g_B(z, p_k)$$

буде гармонійною в області B, крім, можливо, нулів функції $f(z)$, при наближенні до яких вона може прямувати до ∞. Також, при наближенні до межі області B ця функція має невід'ємні граничні значення. Отже, за принципом максимуму гармонійної функції всюди в B маємо оцінку

$$|f(z)| \leq M e^{-\sum\limits_{k=1}^{\mu} g_B(z,n_k) + \sum\limits_{k=1}^{\nu} g_B(z,p_k)}.$$

Зокрема, коли B є круг $|z| < 1$, ця оцінка приймає вигляд:

$$|f(z)| \leq \left| \prod_{k=1}^{\mu} \frac{z - n_k}{1 - \overline{n_k} z} \right| : \left| \prod_{k=1}^{\nu} \frac{z - p_k}{1 - \overline{p_k} z} \right|.$$

Висновок.

Дана дипломна робота присвячена розгляду принципів мажорації у геометричний теорії функцій комплексного змінного, зокрема принципу гіперболічної метрики, принципу Ліндельофа та принципу розширення. Також, наведені деякі практичні застосування відмічених вище методів. Слід відмітити, що принципи мажорації знайшли досить серйозне застосування у практичних питаннях, як теорії функцій комплексного змінного, так й у теоретичний фізиці та інших науках практичного характеру. Над результатами пов'язаними з ними працювали видатні математики, такі як, Г.М. Голузин, Альфорс, Р. Неванлинна та інші.

У представлений роботі розглянуто ряд допоміжних понять та тверджень, таких як гіперболічна відстань, гармонійна міра, різні види леми Шварца. Наведено самі принципи мажорації: принцип гіперболічної метрики, принцип Ліндельофа та принцип розширення. Показана практична значущість цих принципів, зокрема до отримання оцінок модуля регулярної в області функції та її похідної, до доведення теорем Шотткі та Ландау, і до отримання деяких оцінок на модуль функції безпосереднім застосуванням принципу Ліндельофа.

Список використаних джерел.

1. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

2. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Том 1. Начала теории. Издание второе. – М.: Наука, 1967. – 485 с.

3. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. – М.: Наука, 1969. – 576 с.

4. Осадчий М.М., Подвисоцький Р.В., Таргонський А.Л., Таргонський Л.П. Комплексний аналіз. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І Франка, 2011. – 157 с.

5. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного.– М.: Наука, 1967. – 365 с.

Анотація.

У даній роботі розглянуто деякі принципи мажорації у геометричний теорії функцій комплексного змінного. Наведено ряд практичних застосувань цих принципів.

Аннотация.

В представленной работе рассмотрено некоторые принципы мажорации в геометрической теории функций комплексного переменного. Приведено ряд практических приложений этих принципов.

Annotation.

In the presented work it is considered some principles of a mazhoration in geometrical theory of functions of the complex variable. It is provided number of practical appendices of these principles.