

Міністерство освіти і науки України  
Житомирський державний університет імені Івана Франка  
Фізико-математичний факультет  
Кафедра методики навчання математики, фізики та інформатики  
Освітньо-кваліфікаційний рівень «бакалавр»

## ДИПЛОМНА РОБОТА

Функціональні рівняння як засіб введення тригонометричних функцій

Виконала: студентка 42 групи,  
спеціальності 6.040201 Математика\*  
денного відділення  
Пустовойт Мирослава Володимирівна

Керівник: доктор педагогічних наук,  
професор кафедри методики навчання  
математики, фізики та інформатики  
Семенець Сергій Петрович

м. Житомир – 2014 рік

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ .....	6
1.1.    Загальні відомості про функціональні рівняння .....	6
1.2.    Методи розв'язування функціональних рівнянь.....	8
1.2.1.  Метод Коші.....	8
1.2.2.  Метод підстановки .....	12
1.2.3.  Метод диференціювання .....	16
1.2.4.  Ітераційний метод .....	17
1.2.5.  Графічний метод.....	18
РОЗДІЛ 2. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ ЯК РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМИ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.....	24
2.1.    Система функціональних рівнянь, що задає функції «синус» і «косинус» .....	24
2.2.    Періодичність функцій $S(x)$ і $C(x)$ .....	32
2.3.    Властивості функцій $S(x)$ і $C(x)$ .....	34
2.4.    Основні тригонометричні нерівності .....	38
2.5.    Теорема про еквівалентність задання тригонометричних функцій $y = \sin x$ , $y = \cos x$ .....	43
2.6.    Методика вивчення теми «Функціональні рівняння» в класах математичного та фізичного профілю .....	46
ВИСНОВКИ.....	51
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ .....	52

## ВСТУП

**Актуальність дипломної роботи.** Головним видом математичної діяльності є розв'язання проблем, тобто завдань пошукового і дослідницького характеру, а також математичний опис моделей реальних ситуацій. У процесі вивчення та дослідження різноманітних явищ природи, розв'язування технічних задач тощо, доводиться розглядати не стільки змінні величини, взяті окремо, скільки зв'язок між ними, залежність однієї величини від іншої. Ці актуальні питання допомагають вирішити створення функціональних рівнянь та їх розв'язки.

Перші функціональні рівняння виникли при розв'язуванні деяких задач з механіки, а математики досліджували їх ще у XVIII - XIX століттях. Такі визначні математики, як Леонард Ейлер, Карл Гаусс, Микола Лобачевський, та інші не раз зверталися до таких рівнянь у своїх наукових працях.

Часто математики використовують функціональні рівняння для аналітичного обґрунтування побудов різних функцій, наприклад, показникової, логарифмічної, тригонометричних. Оскільки цей підхід має переваги перед геометричним, що обумовлено вибором різних геометрій, адже він є законним як в евклідовій, так і неевклідовій аксіоматиці.

Вміння розв'язувати рівняння – одне з найважливіших математичних умінь, яким повинні оволодіти учні школи. Корінь рівняння знаходять в одну або більше дій, багато текстових задач вирішуються алгебраїчним способом, в рівнянні можуть брати участь цілі, раціональні та інші числа, тобто рівняння одночасно самі по собі є задачами та способами вирішення задач, вміння вирішувати які необхідні всім учням школи.

Рішення окремих функціональних рівнянь вимагає досить глибокого розуміння предмета і прищеплює любов до самостійної творчої роботи. Так як ця тема в шкільному курсі не вивчається через її складність, на олімпіадах, математичних конкурсах такі завдання зустрічаються.

Загальноновизнано, що вирішення задач є найважливішим засобом формування у школярів системи основних математичних знань, умінь і

**Мета дипломної роботи:** розкрити теоретичні засади функціональних рівнянь та методів їх розв'язування, скласти та розв'язати систему функціональних рівнянь для тригонометричного синуса та косинуса.

Поставлена мета передбачала розв'язання ряду завдань:

1. Вивчити та проаналізувати літературу.
2. Висвітлити основні методи і способи системи функціональних рівнянь, розв'язком якої є «синус» та «косинус».
3. Розв'язати складене функціональне рівняння.
4. Розробити методику вивчення теми «Функціональні рівняння» в класах математичного та фізичного профілю.

Дипломна робота складається з двох розділів. Перший розділ присвячений розкриттю поняття функціональних рівнянь та методам їх розв'язування. Другий розділ висвітлює поняття тригонометричних функцій, що є розв'язками функціональних рівнянь.

навичок, провідною формою навчальної діяльності учнів у процесі навчання математики, є одним з основних засобів їх математичного розвитку. Орієнтуючи школярів на пошуки красивих, витончених рішень математичних задач, вчитель тим самим сприяє естетичному вихованню учнів і підвищенню їх математичної культури. І все ж головна мета завдань – розвинути творче і математичне мислення учнів, зацікавити їх математикою, призвести до "відкриття" математичних фактів. Досягти цієї мети за допомогою одних стандартних завдань неможливо. Необхідні завдання, спрямовані на виховання в учнів стійкого інтересу до вивчення математики, творчого ставлення до навчальної діяльності математичного характеру. Необхідні спеціальні вправи для навчання школярів способам самостійної діяльності, для оволодіння ними методами наукового пізнання реальної дійсності і прийомами розумової діяльності, якими користуються вчені-математики, вирішуючи ту чи іншу задачу. Тому функціональні рівняння є одним із способів реалізації даної мети.

Варто підкреслити, що процес розв'язування функціональних рівнянь – це не проста, цікава пошукова робота. Її можна назвати процесом «відкриття» деякої функції за її характерними властивостями (розв'язуючи характеристичне рівняння). Це дає змогу проілюструвати прикладну значимість методів математики, оскільки, знаючи деякі характеристики природних явищ, можна знайти функцію (математичну модель), яка інтерпретує досліджуваний процес, а отже, і вивчити та пояснити ще невідоме та непізнане. Отож, доцільно, щоб тема «Функціональні рівняння» ввійшла до шкільного курсу математики хоча б у класах з поглибленим вивченням математики.

**Об'єкт дослідження** – функціональні рівняння.

**Предмет дослідження** – система функціональних рівнянь, розв'язком якої є тригонометричні функції.

## ВИСНОВКИ

Функціональні рівняння постійно входять до завдань різних математичних змагань. Розв'язування кожного функціонального рівняння, навіть у випадку вдало встановленого методу, перетворюється на невеличке самостійне дослідження, яке розвиває творчі здібності учня. Вивчення функціональних рівнянь сприяє глибшому засвоєнню таких понять, що входять до програми шкільного курсу математики.

Функціональні рівняння вимагають творчого використання знань шкільної математики, глибокого логічного мислення, знань основних способів і пошуку оригінальних способів їх розв'язування.

У даній дипломній роботі, присвяченій функціональним рівнянням, поставлена мета є досягнута. Для її виконання реалізовано завдання: вивчено й проаналізовано необхідну літературу, розглянуто загальні відомості про функціональні рівняння, розкрито суть поняття функціонального рівняння, з'ясовано, що означає розв'язати функціональне рівняння, які відомі визначні математики звертались до таких рівнянь у своїх наукових працях, наведено основні методи розв'язування функціональних рівнянь, розв'язано складене функціональне рівняння та наведено методику вивчення теми «Функціональні рівняння» (розв'язування функціональних рівнянь методом підстановки) у класах математичного та фізичного профілю.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Лопшиц А. М. Функциональные уравнения / А. М. Лопшиц // Квант. – 1975. – № 1. – С. 30–35.
2. Большая Советская Энциклопедия, т.45. М., 1956.
3. Бродский Я. С. Функциональные уравнения / Я. С. Бродский, А. К. Слипенко. – К. : Вища школа, 1983. – 96 с.
4. Рижков М. О. Матеріали для факультативних занять, спецкурсів, гуртків. Математика 8-11. — Х. : Вид. група «Основа», 2008. — 96 с. — (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вид. 9 (69)).
5. Смишляев В. К. Найпростіші функціональні рівняння / В. К. Смишляев, М. В. Смишляева // У світі математики. – 1978. – № 9. – С. 203–211.
6. У світі математики. Збірник науково – популярних статей. Випуск 10. К.: Радянська школа, 1979. – 207 с.
7. У світі математики. Збірник науково – популярних статей. Випуск 14. К.: Радянська школа, 1983. – 255 с.
8. У світі математики. Збірник науково – популярних статей. Випуск 9. К.: Радянська школа, 1978. – 236 с.
9. Фихтенгольц Г.М. «Курс дифференциального и интегрального исчисления», т.1. М.,1969.– 608с.
10. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Хмара Т.М. Алгебра: Проб. підруч. для 11 кл. шк. та кл. з поглиб. вивченням математики. – К.: Освіта, 1994. – 304 с.
11. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубінчук О.С. Алгебра і початки аналізу: Проб. підруч. для 10 – 11 кл. серед. шк. К.: Зодіак – ЕКО, 1995. – 608 с.

