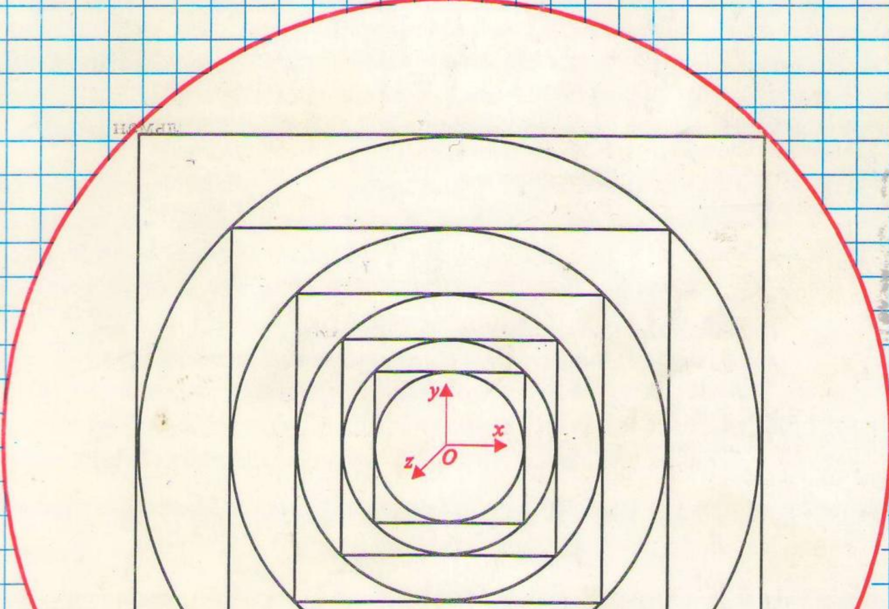
10.222

ISSN 1029-4171

1999

том 5
випуск 2

# У світі математики




Видавництво
"ТВІМС"

# Про розподіл деяких множин ірраціональних чисел на сегменті $[0;1]$

*О. С. Боднарашик та О. А. Сарана*

Дана стаття є доповненням до роботи [1], в якій розглянуто деякі задачі, пов'язані з природою ірраціональних чисел. Нагадаємо потрібні для наступних викладок означення та факти.

**Означення 1.** Множина $E \subset R$ називається всюди щільною в $R$, якщо кожний інтервал $(\alpha;\beta) \subset R$ містить принаймні один елемент множини $E$.

Цікаві приклади всюди щільних множин даються в наступних твердженнях.

**Теорема 1 ([2], с. 59).** *Якщо $\alpha$ ірраціональне число, то множина $A(\alpha) = \{m\alpha + n : m \in Z, n \in Z\}$ всюди щільна у множині $R$ всіх дійсних чисел.*

За допомогою цієї теореми легко доводиться таке відоме твердження.

**Теорема 2.** *Якщо $\alpha$ ірраціональне число, то множина $B(\alpha) = \{n\alpha - [n\alpha] = \{n\alpha\} : n \in N\}$ є всюди щільною в сегменті $[0;1]$. (Тут $[x]$ позначає цілу частину числа $x$, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує $x$).*

*Доведення.* Нехай $(a;b)$ — довільний інтервал сегменту $[0;1]$ $(0 \le a < b \le 1)$. Оскільки множина $A(\alpha)$ всюди щільна в $R$, то для довільного $\delta > 0$ такого, що $\delta < b - a$ знайдуться такі $m, n \in Z$, що $0 < m\alpha + n < \delta$. Якщо $m \geqslant 0$, то існує $k_1 \in N$ таке, що $a < k_1(m\alpha + n) < b$. Якщо ж $m < 0$, то існує таке $k_2 \in N$ що $a < 1 - k_2(m\alpha + n) = -k_2 m\alpha + 1 - k_2 n < b$, причому $(-k_2 m) > 0$, $(1 - k_2 n) \in Z$.

Отже, завжди знайдуться такі $m_1 \in N$, $n_1 \in Z$, що $a < m_1\alpha + n_1 < b$. Але $\{m_1\alpha + n_1\} = \{m_1\alpha\}$, тобто в усякому інтервалі $(a;b) \subset [0;1]$ знайдуться точки з множини $B(\alpha)$, тобто $B(\alpha)$ всюди щільна на $[0;1]$. □

В роботі [1] поставлена така проблема, повний розв'язок якої авторам не відомий.

**Задача 1.** Нехай $\alpha$ — ірраціональне число. Для яких підпослідовностей $\{P_n : n \in N\}$ послідовності натуральних чисел множина $P(\alpha) = \{P_n\alpha - [P_n\alpha], n \in N\}$ є всюди щільною на сегменті $[0;1]$?

Наступні приклади показують, що не для всіх.

©1999 ТВіМС, Наукове видавництво

**Задача 2 ([3], задача 170, с. 96).** Показати, що дріб

$$\alpha = 0,12345678910111213\dots$$

(всі натуральні числа виписані одне за одним) є числом ірраціональним. Числа $n\alpha-[n\alpha]$ розміщені всюди щільно на сегменті $[0;1]$. Показати, що цю властивість має вже множина чисел $\{10^n\alpha-[10^n\alpha]\ :\ n\in N\}$.

**Означення 2.** Точка $x_0\in R$ називається граничною точкою, або точкою скупчення, множини $E\subset R$, якщо при довільному $\delta>0$ інтервал $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ містить нескінченно багато точок з множини $E$.

Якщо множина $E$ всюди щільна в $R$, то всяка точка $x_0\in R$ є граничною точкою множини $E$.

**Задача 3 ([3], задача 171, с. 96).** Число $e$ — ірраціональне. Показати, що послідовність $n!e-[n!e]$ $(n=1,2,3,\dots)$ має єдину граничну точку 0.

Розв'язки задач 2 і 3 читач може знайти в роботі [1].

Наведемо ще деякі приклади розподілу множини $P(\alpha)$ на $[0;1]$.

**Задача 4.** Показати, що послідовність $\{P_n\cos 1-[P_n\cos 1]=\{P_n\cos 1\}\ :\ P_n=(2n)!,\ n\in N\}$ має точки скупчення 0 і 1.

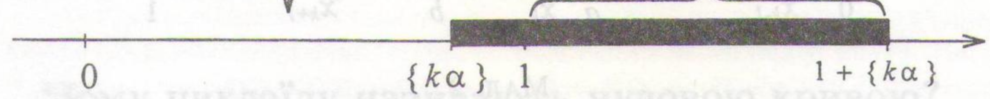
*Доведення.* Відомо, що

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

для всіх $x\in R$. Звідки

$$\cos 1 = 1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\dots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!},$$

$$\begin{aligned}
A=\{P_n\cos 1\} &= \\
&=\left\{(2n)!\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\right)\right\}=\left\{(2n)!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\right\}=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2n)!}{(2k)!}\right\}\\
&=\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2n+1)(2n+2)\cdots(2k)}\right\}\\
&=\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}+\frac{(-1)^{n+2}}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}+\cdots\right\}\\
&=\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\left(1-\frac{1}{(2n+3)(2n+4)}\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\frac{1}{(2n+3)(2n+4)(2n+5)(2n+6)}-\dots\right)\right\}.
\end{aligned}$$




Мал. 1

При $x < 0$ маємо $\{x\} = 1 - \{|x|\}$. Оскільки при $n \to \infty$ сума

$$\left(1 - \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} + \frac{1}{(2n+3)(2n+4)(2n+5)(2n+6)} - \ldots\right) \to 1,$$

маємо таке: для будь- якого $0 < \delta < 1$ при всіх достатньо великих $n = 2k+1$ отримуємо, що $0 < A < \delta$, а при всіх достатньо великих $n = 2k$ маємо $1 - \delta < A < 1$. $\square$

Пропонуємо для самостійного розв'язку таку задачу.

**Задача 5.** Показати, що послідовність $\{P_n \cos 1 - [P_n \cos 1] = \{P_n \cos 1\} : P_n = (2n+1)!\,n,\ n \in N\}$ має єдину точку скупчення $1/2$.

Цікавий випадок, коли послідовність $\{P_n : n \in N\} \subset N$ є арифметичною прогресією.

**Задача 6.** Якщо $P_n = k + nd$, ($k, d \in N$ — деякі фіксовані числа), то при довільному ірраціональному $\alpha$ послідовність $\{P_n\alpha - [P_n\alpha] = \{P_n\alpha\} : n \in N\}$ всюди щільна на $[0; 1]$.

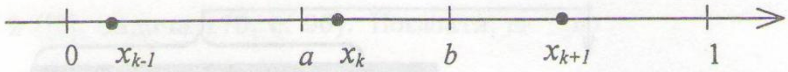
*Доведення.* Множина $\{nd\alpha - [nd\alpha] : n \in N\} = \{n\beta - [n\beta] : n \in N,\ \beta = d\alpha\}$ всюди щільна на $[0; 1]$. За властивостями дробової частини числа маємо таке: $\{(k+nd)\alpha\} = \{k\alpha + nd\alpha\} = \{\{k\alpha\} + \{nd\alpha\}\}$. Але $\{k\alpha\}$ — постійне число при всіх $n \in N$. Тоді всі числа вигляду $\{k\alpha\} + \{nd\alpha\}$ розміщені всюди щільно на сегменті $[\{k\alpha\}\ ; 1 + \{k\alpha\}]$.

З мал. 1 видно, що всі числа вигляду $\{\{k\alpha\} + \{nd\alpha\}\} = \{k\alpha + nd\alpha\} = \{(k+nd)\alpha\}$ розміщені всюди щільно на сегменті $[0; 1]$. $\square$

Введемо для зростаючої послідовності $\{P_n : n \in N\}$ поняття густини $\rho = \lim_{N\to\infty} \frac{K(N)}{N}$, де $K(N)$ — кількість тих членів послідовності, що не перевищують $N$ (якщо така границя існує). Легко замітити, що в задачах 2–5 $\rho = 0$, а в задачі 6 $\rho = \frac{1}{d} > 0$. Це приводить до гіпотези, що у випадку, коли густина послідовності $\rho > 0$, множина $\{P_n\alpha - [P_n\alpha] : n \in N\}$ всюди щільна на $[0; 1]$.

Але це не так, що видно з наступного прикладу.

**Приклад 1.** Нехай $\alpha$ — ірраціональне число, $d \geq 2$, $d \in N$ ($d$ — фіксоване). Нехай числа $a$, $b$ такі, що $0 < a < b < 1$, $b - a < 1 - \{\alpha\}$ та $b - a < \{\alpha\}$. Тоді при всякому $k \in N$ у множині $\{n\alpha - [n\alpha] : n \in N, kd \leq n \leq (k+1)d - 1\}$ знайдеться принаймні одне число, що не належить інтервалу $(a; b)$ (мал. 2).




Мал. 2

Тобто при всякому $k \in N$ знайдеться $P_k \in N$ таке, що $kd \leq P_k \leq (k+1)d-1$ та $\{P_k\alpha\} \notin (a;b)$. Отже у множині $\{\{P_k\alpha\} \ : k \in N\}$ немає жодного числа з інтервалу $(a;b)$, тобто ця множина не щільна на $[0;1]$, хоч густина $\rho = \frac{1}{d} > 0$.

Даний приклад показує, що умова $\rho > 0$ не забезпечує щільності на $[0;1]$ множини $\{P_k\alpha - [P_k\alpha] \ : k \in N\}$.

*Зауваження.* Таку послідовність $P_k$, $k = 1, 2, \ldots$ можна назвати "майже арифметичною", тому що при будь-якому $k$ виконується нерівність $kd \leq P_k < (k+1)d$.

Розглянемо ще одну задачу про розподіл множини $P(\alpha)$ на сегменті $[0;1]$ у випадку, коли густина послідовності $\{P_n \ : n \in N\}$ рівна нулю.

**Задача 7.** Довести, що послідовність $\{n^2\alpha - [n^2\alpha] = \{n^2\alpha\} \ : n \in N\}$ при довільному ірраціональному $\alpha$ має нескінченну кількість граничних точок.

*Доведення.* Позначимо $a_n = \{n^2\alpha\}$. Припустимо, що послідовність чисел $a_n$ на $[0;1]$ має скінченну кількість граничних точок: $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Розглянемо послідовність чисел $b_n = a_{n+1} - a_n$, яка розміщена на $[-1;1]$. Її граничні точки можуть мати лише такий вигляд: $x_k - x_p$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $p = 1, 2, \ldots, m$. Тобто послідовність чисел $b_n$ теж має скінченну кількість граничних точок, а тому послідовність чисел $\{b_n\}$ теж має скінченну кількість граничних точок. Але $(n+1)^2\alpha - n^2\alpha = (2n+1)\alpha$, звідки $\{b_n\} = \{(2n+1)\alpha\}$. Прийшли до протиріччя, оскільки згідно задачі 6 послідовність чисел $\{b_n\}$ є всюди щільною на $[0;1]$. Отже, припущення не вірне, тобто послідовність чисел $a_n$ має нескінченну кількість граничних точок. □

Пропонуємо для самостійного розв'язку аналогічну задачу.

**Задача 8.** Довести, що послідовність $\{n^3\alpha - [n^3\alpha] = \{n^3\alpha\} \ : \ n \in N\}$ при довільному ірраціональному $\alpha$ має нескінченну кількість граничних точок.

Зауваження: задачі 7 і 8 є частинними випадками більш загального твердження, яке наводимо без доведення.

**Задача 9 ([3], задача 172, с. 96).** Якщо многочлен $Q(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_rx^r$ має хоча б один ірраціональний коефіцієнт, то послідовність чисел $Q(n) - [Q(n)]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, має нескінченну кількість граничних точок.

## Література

1. О. А. Сарана, *Деякі нестандартні задачі, пов'язані з природою ірраціональних чисел*, У світі математики 4 (1998), № 3, 26–29.
2. М. Й. Ядренко, *Принцип Діріхле та його застосування*, "Вища школа", Київ, 1985.
3. Г. Поліа, Г. Сеге, *Задачи и теоремы из анализа. Часть I*, "Наука", Москва, 1978.