Праці Інституту математики НАН України 2014, том 11, 326-341

УДК 517.54

Одна екстремальна задача на $(2n, 2m)$-променевій системі точок

А. Л. Таргонський

(*Житомирський державний університет ім. І. Франка, Житомир*)

targonsk@zu.edu.ua

Знайдено максимум функціоналу, що складається із добутків внутрішніх радіусів для довільних степенів внутрішніх радіусів областей.

which the consist with product inner radius for arbitrary degrees of inner radius domains.

Вступ.

У геометричний теорії функцій комплексного змінного екстремальні задачі для функціоналів складених із добутків внутрішніх радіусів областей представляють добре відомий класичний напрям. Виникнення цього напряму пов'язано з роботою академика М.А. Лаврентьєва [1], де вперше поставлена та розв'язана задача про добуток конформних радіусів двох неперетинних однозв'язних областей. У подальшому цю задачу узагальнювали та посилювали у багатьох роботах (див., напр. [2 – 13]).

Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ – множини натуральних та дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ – площина комплексних чисел, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ – її одноточкова компактифікація або сфера Рімана, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$.

Нехай $n, m \in \mathbb{N}$. Систему точок

$$A_{2n,2m} = \{a_{k,p} \in \mathbb{C} : k = \overline{1, 2n},\ p = \overline{1, 2m}\},$$

назвемо $(2n,2m)$-променевою системою точок, якщо при всіх $k=\overline{1,2n}$ виконуються співвідношення:

$$\begin{array}{l} 0<|a_{k,1}|<\ldots<|a_{k,2m}|<\infty; \\ \arg a_{k,1}=\arg a_{k,2}=\ldots=\arg a_{k,2m}=:\theta_k; \\ 0=\theta_1<\theta_2<\ldots<\theta_n<\theta_{n+1}:=2\pi. \end{array} \tag{1}$$

Для таких систем точок введемо у розгляд наступні величини:

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\left[\theta_{k+1}-\theta_k\right],\ k=\overline{1,2n},\ \alpha_{n+1}:=\alpha_1,\ \alpha_0:=\alpha_n,\sum_{k=1}^{2n}\alpha_k=2.$$

При виконанні умов $\alpha_k=\frac{1}{n}$, $k=\overline{1,2n}$ систему точок $A_{2n,2m}$ будемо називати рівнокутовою.

Розглянемо систему кутових областей:

$$P_k=\{w\in\mathbb{C}:\theta_k<\arg w<\theta_{k+1}\},\quad k=\overline{1,2n}.$$

Для довільної $(2n,2m)$-променевої системи точок розглянемо наступні "керуючи" функціонали

$$M\left(A^{(1)}_{2n,2m}\right)=$$
$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(\left|a_{2k-1,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\chi\left(\left|a_{2k-1,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-2}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}|a_{2k-1,2p-1}|,$$
$$M\left(A^{(2)}_{2n,2m}\right)=$$
$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(\left|a_{2k-1,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\chi\left(\left|a_{2k-1,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-2}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}|a_{2k-1,2p}|,$$
$$M\left(A^{(3)}_{2n,2m}\right)=\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(\left|a_{2k,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k}}}\right)\chi\left(\left|a_{2k,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}|a_{2k,2p}|,$$
$$M\left(A^{(4)}_{2n,2m}\right)=$$
$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(\left|a_{2k,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k}}}\right)\chi\left(\left|a_{2k,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}|a_{2k,2p-1}|,$$

де $\chi(t)=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})$, $t\in\mathbb{R}_+$.

Нехай D, $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ – довільна відкрита множина та $w = a \in D$, тоді через $D(a)$ позначимо зв'язну компоненту D, яка містить точку a. Для довільної $(2n, 2m)$-променевої системи $A_{2n,2m} = \{a_{k,p} \in \mathbb{C} : k = \overline{1, 2n},\ p = \overline{1, 2m}\}$ та відкритої множини D, $A_{2n,2m} \subset D$ позначимо через $D_k\left(a_{s,p}\right)$ зв'язну компоненту множини $D\left(a_{s,p}\right) \bigcap \overline{P_k}$, яка містить точку $a_{s,p}$, $k = \overline{1, 2n}$, $s = k, k+1$, $p = \overline{1, 2m}$, $a_{n+1,p} := a_{1,p}$.

Будемо вважати, що відкрита множина D, $A_{2n,2m} \subset D$ задовольняє умові неналягання відносно $(2n, 2m)$-променевої системи точок $A_{2n,2m}$, якщо виконується умова

$$D_k(a_{k,s}) \bigcap D_k(a_{k+1,p}) = \varnothing, \tag{2}$$

$k = \overline{1, 2n}$, $p, s = \overline{1, 2m}$ по всім кутам $\overline{P_k}$.

Позначимо через $r(B; a)$ – внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ (див. [4 – 6, 14]).

Предметом вивчення нашої роботи є наступні задачі.

Задача 1. Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $m \geq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Визначити максимум величини

$$J = \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r^{\alpha}\left(B_{2k-1,2p-1}, a_{2k-1,2p-1}\right) r\left(B_{2k-1,2p}, a_{2k-1,2p}\right) \times$$

$$\times r^{\alpha}\left(B_{2k,2p}, a_{2k,2p}\right) r\left(B_{2k,2p-1}, a_{2k,2p-1}\right),$$

де $A_{2n,2m}$ – довільна $(2n, 2m)$-променева система точок вида (1), а $\{B_{k,p}\}$ – довільний набір попарно неперетинних областей, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, та описати екстремалі ($k = \overline{1, 2n}$, $p = \overline{1, 2m}$).

Задача 2. Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $m \geq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Визначити максимум величини

$$I = \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r^{\alpha}\left(D, a_{2k-1,2p-1}\right) r\left(B_{D,2p}, a_{2k-1,2p}\right) \times$$

$$\times r^{\alpha}\left(D, a_{2k,2p}\right) r\left(D, a_{2k,2p-1}\right),$$

де $A_{2n,2m}$ – довільна $(2n, 2m)$-променева система точок вида (1), а D – довільна відкрита множина, яка задовольняє умові неналягання (2), $a_{k,p} \in D \subset \overline{\mathbb{C}}$, та описати екстремалі ($k = \overline{1, 2n}$, $p = \overline{1, 2m}$).

Теорема 1. *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Тоді для довільної $(2n, 2m)$-променевої системи точок $A_{2n,2m}$, та довільного набору* *попарно неперетинних областей* $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,2n}$, $p = \overline{1,2m}$ *справедлива нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r^{\alpha}\left(B_{2k-1,2p-1}, a_{2k-1,2p-1}\right) r\left(B_{2k-1,2p}, a_{2k-1,2p}\right) r^{\alpha}\left(B_{2k,2p}, a_{2k,2p}\right)$$

$$\times r\left(B_{2k,2p-1}, a_{2k,2p-1}\right) \leq \left(\frac{2}{mn}\right)^{2nm(\alpha+1)} \left(M\left(A^{(1)}_{2n,2m}\right)\cdot M\left(A^{(3)}_{2n,2m}\right)\right)^{\alpha}$$

$$\times M\left(A^{(2)}_{2n,2m}\right) M\left(A^{(4)}_{2n,2m}\right)\left(\frac{\alpha^{\alpha}}{|\sqrt{\alpha}-1|^{|\sqrt{\alpha}-1|^2}|\sqrt{\alpha}+1|^{|\sqrt{\alpha}+1|^2}}\right)^{nm}.$$

Знак рівності досягається, коли точки $a_{k,p}$ *та області* $B_{k,p}$ *є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = w^{2n-2}\left(1+w^{2n}\right)^{2m-2}\times$$

$$\times\frac{i(\alpha-1)\left((w^n+i)^{4m}-(w^n-i)^{4m}\right)-2(1+\alpha)\left(w^{2n}+1\right)^{2m}}{\left((w^n+i)^{4m}+(w^n-i)^{4m}\right)^2}dw^2. \quad (3)$$

.

Теорема 2. *Нехай* $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. *Тоді для довільної* $(2n, 2m)$*-променевої системи точок* $A_{2n,2m}$, *та довільної відкритої множини* D, *яка задовольняє умові неналягання (2),* $a_{k,p} \in D \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,2n}$, $p = \overline{1,2m}$ *справедлива нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r^{\alpha}\left(D, a_{2k-1,2p-1}\right) r\left(D, a_{2k-1,2p}\right) r^{\alpha}\left(D, a_{2k,2p}\right) r\left(D, a_{2k,2p-1}\right) \leq$$

$$\leq \left(\frac{2}{mn}\right)^{2nm(\alpha+1)} \left(M\left(A^{(1)}_{2n,2m}\right) M\left(A^{(3)}_{2n,2m}\right)\right)^{\alpha} M\left(A^{(2)}_{2n,2m}\right)$$

$$\times M\left(A^{(4)}_{2n,2m}\right)\left(\frac{\alpha^{\alpha}}{|\sqrt{\alpha}-1|^{|\sqrt{\alpha}-1|^2}|\sqrt{\alpha}+1|^{|\sqrt{\alpha}+1|^2}}\right)^{nm}.$$

Знак рівності досягається, коли

$$D = \bigcup_{k,p} B_{k,p},$$

а точки $a_{k,p}$ та області $B_{k,p}$ є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціалу (3).

Доведення теореми 1. Доведення теореми спирається на метод кусково-поділяючого перетворення (див. [4 – 6]).

Розглянемо однозначну гілку багатозначної аналітичної функції

$$z_k(w) = -i\left(e^{-i\theta_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}} \tag{4}$$

яка, при кожному $k=\overline{1,2n}$, реалізує однолисте та конформне відображення області P_k на праву півплощину $\mathrm{Re}z>0$, при цьому промінь $\arg w = \frac{1}{2}\left(\theta_k+\theta_{k+1}\right)$ перетворюється у додатну дійсну вісь.

Тоді функція

$$\zeta_k(w) := \frac{1-z_k(w)}{1+z_k(w)} \tag{5}$$

однолисто та конформно відображає область P_k на одиничний круг $U=\{z:\,|z|\leq 1\}$, $k=\overline{1,2n}$.

Позначимо $\omega_{k,p}^{(1)} := \zeta_k\left(a_{k,p}\right)$, $\omega_{k-1,p}^{(2)} := \zeta_{k-1}\left(a_{k,p}\right)$, $a_{n+1,p} := a_{1,p}$, $\omega_{0,p}^{(2)} := \omega_{n,p}^{(2)}$, $\zeta_0 := \zeta_n$ ($k=\overline{1,2n}$, $p=\overline{1,2m}$).

Сімейство функцій $\{\zeta_k(w)\}_{k=1}^{2n}$, заданих рівністю (5), є допустимим для кусково-поділяючого перетворення (див. напр., [6, 8, 9]) областей $\left\{B_{k,p}:\,k=\overline{1,2n},\quad p=\overline{1,2m}\right\}$ відносно системи кутів $\{P_k\}_{k=1}^{2n}$. Для довільної множини $\Delta\in\mathbb{C}$ позначимо $(\Delta)^* := \left\{w\in\overline{\mathbb{C}}:\,\frac{1}{\overline{w}}\in\Delta\right\}$. Нехай $\Omega_{k,p}^{(1)}$ позначає зв'язну компоненту множини $\zeta_k\left(B_{k,p}\bigcap\overline{P}_k\right)\bigcup\left(\zeta_k\left(B_{k,p}\bigcap\overline{P}_k\right)\right)^*$, яка містить точку $\omega_{k,p}^{(1)}$, а $\Omega_{k-1,p}^{(2)}$ – зв'язну компоненту множини $\zeta_{k-1}\left(B_{k,p}\bigcap\overline{P}_{k-1}\right)\bigcup\left(\zeta_{k-1}\left(B_{k,p}\bigcap\overline{P}_{k-1}\right)\right)^*$, яка містить точку $\omega_{k-1,p}^{(2)}$, $k=\overline{1,2n}$, $p=\overline{1,2m}$, $\overline{P}_0 := \overline{P}_n$, $\Omega_{0,p}^{(2)} := \Omega_{n,p}^{(2)}$. Зрозуміло, що $\Omega_{k,p}^{(s)}$ є, взагалі кажучи, багатозв'язними областями, $k=\overline{1,2n}$, $p=\overline{1,2m}$, $s=1,2$. Пара областей $\Omega_{k-1,p}^{(2)}$ та $\Omega_{k,p}^{(1)}$ є результатом поділяючого перетворення області $B_{k,p}$ відносно сімейств $\{P_{k-1},P_k\}$, $\{\zeta_{k-1},\zeta_k\}$ в точці $a_{k,p}$, $k=\overline{1,2n}$, $p=\overline{1,2m}$.

З формули (5) отримаємо наступні вирази

$$\left|\zeta_k(w)-\zeta_k(a_{k,p})\right| \sim \left[\alpha_k\chi\left(\left|a_{k,p}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)\left|a_{k,p}\right|\right]^{-1}|w-a_{k,p}|,$$

$$w\to a_{k,p},\quad w\in\overline{P}_k.$$

$$\left|\zeta_{k-1}(w)-\zeta_{k-1}(a_{k,p})\right| \sim \left[\alpha_{k-1}\chi\left(\left|a_{k,p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)|a_{k,p}|\right]^{-1}|w-a_{k,p}|,$$

$$w \to a_{k,p}, \quad w \in \overline{P}_{k-1}, \quad k=\overline{1,2n}, p=\overline{1,2m}. \tag{6}$$

З теореми 1.9 [6] (див. також [4, 5]) та формул (6) отримаємо нерівності

$$r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right) \leqslant$$

$$\left\{r\left(\Omega^{(1)}_{k,p},\omega^{(1)}_{k,p}\right)\cdot r\left(\Omega^{(2)}_{k-1,p},\omega^{(2)}_{k-1,p}\right)\cdot\left[\alpha_k\cdot\chi\left(\left|a_{k,p}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)|a_{k,p}|\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\alpha_{k-1}\cdot\chi\left(\left|a_{k,p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)|a_{k,p}|\right]\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad k=\overline{1,2n}, p=\overline{1,2m}. \tag{7}$$

На основі співвідношень (7), отримаємо:

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r^{\alpha}\left(B_{2k-1,2p-1},a_{2k-1,2p-1}\right) r\left(B_{2k-1,2p},a_{2k-1,2p}\right) r^{\alpha}\left(B_{2k,2p},a_{2k,2p}\right)$$

$$\times r\left(B_{2k,2p-1},a_{2k,2p-1}\right) \leq \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\alpha_{2k-1}^{\alpha+1}\alpha_{2k-2}^{\alpha+1}\left(\chi\left(\left|a_{2k-1,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right)^{\alpha}\right.$$

$$\times\left(\chi\left(\left|a_{2k-1,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-2}}}\right)\right)^{\alpha}|a_{2k-1,2p-1}|^{2\alpha}\left(\chi\left(\left|a_{2k-1,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right)$$

$$\times\left(\chi\left(\left|a_{2k-1,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-2}}}\right)\right)|a_{2k-1,2p}|^{2}\alpha_{2k}^{\alpha+1}\alpha_{2k-1}^{\alpha+1}\left(\chi\left(\left|a_{2k,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k}}}\right)\right)^{\alpha}$$

$$\times\left(\chi\left(\left|a_{2k,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right)^{\alpha}\chi\left(\left|a_{2k,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k}}}\right)\chi\left(\left|a_{2k,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)|a_{2k,2p}|^{2\alpha}$$

$$\left.\times|a_{2k,2p-1}|^{2}\right]^{\frac{1}{2}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[r^{\alpha}\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(1)}_{2k-1,2p-1}\right)r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k-2,2p-1},\omega^{(2)}_{2k-2,2p-1}\right)\right.$$

$$\times r\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p},\omega^{(1)}_{2k-1,2p}\right)r\left(\Omega^{(2)}_{2k-2,2p},\omega^{(2)}_{2k-2,2p}\right)r^{\alpha}\left(\Omega^{(1)}_{2k,2p},\omega^{(1)}_{2k,2p}\right)$$

$$\left.\times\, r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p},\omega^{(2)}_{2k-1,2p}\right)r\left(\Omega^{(1)}_{2k,2p-1},\omega^{(1)}_{2k,2p-1}\right)r\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(2)}_{2k-1,2p-1}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Відмітимо, що

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\Big[r^{\alpha}\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(1)}_{2k-1,2p-1}\right)\cdot r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k-2,2p-1},\omega^{(2)}_{2k-2,2p-1}\right)\times$$

$$\times r\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p},\omega^{(1)}_{2k-1,2p}\right)\cdot r\left(\Omega^{(2)}_{2k-2,2p},\omega^{(2)}_{2k-2,2p}\right)\cdot r^{\alpha}\left(\Omega^{(1)}_{2k,2p},\omega^{(1)}_{2k,2p}\right)\times$$

$$\times r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p},\omega^{(2)}_{2k-1,2p}\right)\cdot r\left(\Omega^{(1)}_{2k,2p-1},\omega^{(1)}_{2k,2p-1}\right)\cdot r\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(2)}_{2k-1,2p-1}\right)\Big]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left[\prod_{p=1}^{m}r^{\alpha}\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(1)}_{2k-1,2p-1}\right)\cdot r\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p},\omega^{(1)}_{2k-1,2p}\right)\times\right.$$

$$\times r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p},\omega^{(2)}_{2k-1,2p}\right)\cdot r\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(2)}_{2k-1,2p-1}\right)\cdot\prod_{p=1}^{m}r^{\alpha}\left(\Omega^{(1)}_{2k,2p},\omega^{(1)}_{2k,2p}\right)\times$$

$$\left.\times r\left(\Omega^{(1)}_{2k,2p-1},\omega^{(1)}_{2k,2p-1}\right)\cdot r\left(\Omega^{(2)}_{2k,2p},\omega^{(2)}_{2k,2p}\right)\cdot r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k,2p-1},\omega^{(2)}_{2k,2p-1}\right)\right]^{\frac{1}{2}},\qquad(9)$$

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left(\alpha^{\alpha+1}_{2k-1}\cdot\alpha^{\alpha+1}_{2k-2}\cdot\alpha^{\alpha+1}_{2k}\cdot\alpha^{\alpha+1}_{2k-1}\right)^{\frac{1}{2}}=\prod_{k=1}^{2n}\alpha_k^{m(\alpha+1)},\qquad(10)$$

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\left(\chi\left(\left|a_{2k-1,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right)^{\alpha}\cdot\left(\chi\left(\left|a_{2k-1,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-2}}}\right)\right)^{\alpha}\times\right.$$

$$\times\left(\chi\left(\left|a_{2k-1,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right)\cdot\left(\chi\left(\left|a_{2k-1,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-2}}}\right)\right)\cdot\left|a_{2k-1,2p-1}\right|^{2\alpha}\times$$

$$\times\left(\chi\left(\left|a_{2k,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k}}}\right)\right)^{\alpha}\cdot\left|a_{2k-1,2p}\right|^{2}\cdot\left(\chi\left(\left|a_{2k,2p}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right)^{\alpha}\times$$

$$\left.\times\chi\left(\left|a_{2k,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k}}}\right)\cdot\left|a_{2k,2p}\right|^{2\alpha}\cdot\left|a_{2k,2p-1}\right|^{2}\cdot\chi\left(\left|a_{2k,2p-1}\right|^{\frac{1}{\alpha_{2k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(M\left(A^{(1)}_{2n,2m}\right)\cdot M\left(A^{(3)}_{2n,2m}\right)\right)^{\alpha}\cdot M\left(A^{(2)}_{2n,2m}\right)\cdot M\left(A^{(4)}_{2n,2m}\right).\qquad(11)$$

Із (8) враховуючи (9), (10), (11), отримаємо наступні співвідношення

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r^{\alpha}\left(B_{2k-1,2p-1},a_{2k-1,2p-1}\right)r\left(B_{2k-1,2p},a_{2k-1,2p}\right)\times$$

$$\times r^{\alpha}\left(B_{2k,2p},a_{2k,2p}\right)r\left(B_{2k,2p-1},a_{2k,2p-1}\right)\leq$$

$$\leq\prod_{k=1}^{2n}\alpha_k^{m(\alpha+1)}\cdot\left(M\left(A^{(1)}_{2n,2m}\right)\cdot M\left(A^{(3)}_{2n,2m}\right)\right)^{\alpha}\cdot M\left(A^{(2)}_{2n,2m}\right)\cdot M\left(A^{(4)}_{2n,2m}\right)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left[\prod_{p=1}^{m}r^{\alpha}\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(1)}_{2k-1,2p-1}\right)\cdot r\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p},\omega^{(1)}_{2k-1,2p}\right)\times\right.$$

$$\times r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p},\omega^{(2)}_{2k-1,2p}\right)\cdot r\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(2)}_{2k-1,2p-1}\right)\cdot\prod_{p=1}^{m}r^{\alpha}\left(\Omega^{(1)}_{2k,2p},\omega^{(1)}_{2k,2p}\right)\times$$

$$\left.\times r\left(\Omega^{(1)}_{2k,2p-1},\omega^{(1)}_{2k,2p-1}\right)\cdot r\left(\Omega^{(2)}_{2k,2p},\omega^{(2)}_{2k,2p}\right)\cdot r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k,2p-1},\omega^{(2)}_{2k,2p-1}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

Враховуючи, що

$$\prod_{k=1}^{2n}\alpha_k\leq\left(\frac{1}{n}\right)^{2n},$$

з попереднього співвідношення, маємо

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r^{\alpha}\left(B_{2k-1,2p-1},a_{2k-1,2p-1}\right)r\left(B_{2k-1,2p},a_{2k-1,2p}\right)\times$$

$$\times r^{\alpha}\left(B_{2k,2p},a_{2k,2p}\right)r\left(B_{2k,2p-1},a_{2k,2p-1}\right)\leq$$

$$\leq\left(\frac{1}{n}\right)^{2nm(\alpha+1)}\cdot\left(M\left(A^{(1)}_{2n,2m}\right)\cdot M\left(A^{(3)}_{2n,2m}\right)\right)^{\alpha}\cdot M\left(A^{(2)}_{2n,2m}\right)\cdot M\left(A^{(4)}_{2n,2m}\right)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left[\prod_{p=1}^{m}r^{\alpha}\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(1)}_{2k-1,2p-1}\right)\cdot r\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p},\omega^{(1)}_{2k-1,2p}\right)\times\right.$$

$$\times r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p},\omega^{(2)}_{2k-1,2p}\right)\cdot r\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(2)}_{2k-1,2p-1}\right)\cdot\prod_{p=1}^{m}r^{\alpha}\left(\Omega^{(1)}_{2k,2p},\omega^{(1)}_{2k,2p}\right)\times$$

$$\left.\times r\left(\Omega^{(1)}_{2k,2p-1},\omega^{(1)}_{2k,2p-1}\right)\cdot r\left(\Omega^{(2)}_{2k,2p},\omega^{(2)}_{2k,2p}\right)\cdot r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k,2p-1},\omega^{(2)}_{2k,2p-1}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

З теоремы 4.2.2 [7] отримаємо нерівності

$$\prod_{p=1}^{m}r^{\alpha}\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(1)}_{2k-1,2p-1}\right)\cdot r\left(\Omega^{(1)}_{2k-1,2p},\omega^{(1)}_{2k-1,2p}\right)\cdot r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p},\omega^{(2)}_{2k-1,2p}\right)\times$$

$$\times r\left(\Omega^{(2)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(2)}_{2k-1,2p-1}\right)\leq\prod_{p=1}^{2m}r^{\alpha}\left(G^{(1)}_{2p-1},g^{(1)}_{2p-1}\right)\cdot r\left(G^{(1)}_{2p},g^{(1)}_{2p}\right),$$

$$\prod_{p=1}^{m}r^{\alpha}\left(\Omega^{(1)}_{2k,2p},\omega^{(1)}_{2k,2p}\right)\cdot r\left(\Omega^{(1)}_{2k,2p-1},\omega^{(1)}_{2k,2p-1}\right)\cdot r\left(\Omega^{(2)}_{2k,2p},\omega^{(2)}_{2k,2p}\right)\times$$

$$\times r^{\alpha}\left(\Omega^{(2)}_{2k,2p-1},\omega^{(2)}_{2k,2p-1}\right)\leq\prod_{p=1}^{2m}r\left(G^{(2)}_{2p-1},g^{(2)}_{2p-1}\right)\cdot r^{\alpha}\left(G^{(2)}_{2p},g^{(2)}_{2p}\right),\quad(14)$$

де $G^{(1)}_{2p-1}$, $G^{(1)}_{2p}$, $G^{(2)}_{2p-1}$, $G^{(2)}_{2p}$ – кругові області, а $g^{(1)}_{2p-1}$, $g^{(1)}_{2p}$, $g^{(2)}_{2p-1}$, $g^{(2)}_{2p}$ – полюси квадратичного диференціалу

$$Q\left(\zeta_k\right)d\zeta_k^2=\zeta_k^{2m-2}\cdot\frac{i(1-\alpha)\zeta_k^{4m}+2(1+\alpha)\zeta_k^{2m}+i(\alpha-1)}{\left(\zeta_k^{4m}+1\right)^2}\cdot d\zeta_k^2,\quad k=\overline{1,2n}\quad(15)$$

Користуючись нерівностями (14) з (13) отримаємо

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r^{\alpha}\left(B_{2k-1,2p-1},a_{2k-1,2p-1}\right)r\left(B_{2k-1,2p},a_{2k-1,2p}\right)\times$$

$$\times r^{\alpha}\left(B_{2k,2p},a_{2k,2p}\right)r\left(B_{2k,2p-1},a_{2k,2p-1}\right)\leq\left(\frac{1}{n}\right)^{2nm(\alpha+1)}\times$$

$$\times\left(M\left(A^{(1)}_{2n,2m}\right)\cdot M\left(A^{(3)}_{2n,2m}\right)\right)^{\alpha}\cdot M\left(A^{(2)}_{2n,2m}\right)\cdot M\left(A^{(4)}_{2n,2m}\right)\times$$

$$\times\left(\prod_{p=1}^{2m}r\left(G_{2p-1},g_{2p-1}\right)\cdot r^{\alpha}\left(G_{2p},g_{2p}\right)\right)^{n},\quad(16)$$

де G_{2p-1}, G_{2p} – кругові області, а g_{2p-1}, g_{2p} – полюси квадратичного диференціалу (15).

Із останнього співвідношення, використовуючи теорему 4.1.2 [7], отримаємо твердження теореми. **Теорема 1 доведена**.

Доведення теореми 2. Зразу відмітимо, що з умови неналягання випливає, що $\operatorname{cap}\overline{\mathbb{C}}\backslash D>0$ та множина D має узагальнену функцію Гріна $g_D(z,a)$, де $g_D(z,a)=\begin{cases}g_{D(a)}(z,a),\ z\in D(a),\\ 0,\ z\in\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{D(a)},\\ \lim\limits_{\zeta\to z}g_{D(a)}(\zeta,a),\ \zeta\in D(a),z\in\partial D(a)\end{cases}$ –

узагальнена функція Гріна відкритої множини D відносно точки $a \in D$, а $g_{D(a)}(z,a)$ – функція Гріна області $D(a)$ відносно точки $a \in D(a)$.

У подальшому будемо користуватися методами робіт [6, 7]. Розглянемо множини $E_0 = \overline{\mathbb{C}} \backslash D$; $E(a_{k,p},t) = \{w \in \mathbb{C} : |w - a_{k,p}| \leqslant t\}$, $k = \overline{1,2n}$, $p = \overline{1,2m}$, $n \geqslant 2$, $n,m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$. Для достатньо малих $t > 0$ введемо у розгляд конденсатор

$$C\,(t,\, D,\, A_{2n,2m}) = \{E_0,\, E_1,\, E_2\}\,,$$

де $E_1 = \bigcup\limits_{k=1}^{n}\bigcup\limits_{p=1}^{m}\left(E(a_{2k-1,2p-1},t) \cup E(a_{2k,2p},t)\right)$, $E_2 = \bigcup\limits_{k=1}^{n}\bigcup\limits_{p=1}^{m}\left(E(a_{2k,2p-1},t) \cup E(a_{2k-1,2p},t)\right)$. Ємністю конденсатора $C\,(t,\, D,\, A_{2n,2m})$ називається величина (див. [5])

$$\mathrm{cap}C\,(t,\, D,\, A_{2n,2m}) = \inf \int\!\!\int \left[(G'_x)^2 + (G'_y)^2\right]\, dxdy,$$

де нижня грань береться по всім дійсним, неперервним та ліпшицевим в $\overline{\mathbb{C}}$ функціям $G = G(z)$, таким, що $G\Big|_{E_0} = 0$, $G\Big|_{E_1} = \sqrt{\alpha}$, $G\Big|_{E_2} = 1$

Величина, обернена ємності конденсатора C, називається модулем цього конденсатора

$$|C| = [\mathrm{cap}C]^{-1}$$

З теореми 1 [6] отримаємо

$$|C\,(t,D,A_{2n,2m})\,| = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2nm\,(\alpha+1)}\cdot\log\frac{1}{t} + M(D,A_{2n,2m}) + o(1), \qquad t \to 0, \tag{17}$$

де

$$M(D,A_{2n,2m}) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{4n^2m^2\cdot(\alpha+1)^2}\times$$
$$\times\Big[\alpha\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}(\log r(D,a_{2k,2p}) + \log r(D,a_{2k-1,2p-1})) +$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}(\log r(D,a_{2k,2p-1}) + \log r(D,a_{2k-1,2p})) +$$
$$+\alpha\sum_{(k,p)\neq(q,s)}(g_D(a_{2k,2p},a_{2q,2s}) + g_D(a_{2k-1,2p-1},a_{2q-1,2s-1})) +$$

$$+2\sqrt{\alpha}\sum_{(k,p)\neq(q,s)}\left(g_D(a_{2k,2p},a_{2q-1,2s})+g_D(a_{2k,2p},a_{2q,2s-1})+\right.$$
$$+g_D(a_{2k-1,2p-1},a_{2q-1,2s})+g_D(a_{2k-1,2p-1},a_{2q,2s-1})\big)+$$
$$+2\alpha\sum_{(k,p)\neq(q,s)}g_D(a_{2k,2p},a_{2q-1,2s-1})+\sum_{(k,p)\neq(q,s)}\left(g_D(a_{2k-1,2p},a_{2q-1,2s})+\right.$$
$$\left.+g_D(a_{2k,2p-1},a_{2q,2s-1})\right)+2\sum_{(k,p)\neq(q,s)}g_D(a_{2k-1,2p},a_{2q,2s-1})\Big]. \qquad (18)$$

Надалі, будемо використовувати функцію (5) та позначення $\omega^{(1)}_{k,p}$, $\omega^{(2)}_{k-1,p}$, $a_{n+1,p}$, $\omega^{(2)}_{0,p}$, ζ_0, Δ, $(\Delta)^*$, введені нами при доведенні теореми 1. Нехай, також, $\mathbf{\Omega}^{(1)}_{k,p}$ позначає зв'язну компоненту множини $\zeta_k\left(D\bigcap\overline{P}_k\right)\bigcup\left(\zeta_k\left(D\bigcap\overline{P}_k\right)\right)^*$, яка містить точку $\omega^{(1)}_{k,p}$, а $\mathbf{\Omega}^{(2)}_{k-1,p}$ – зв'язну компоненту множини $\zeta_{k-1}\left(D\bigcap\overline{P}_{k-1}\right)\bigcup\left(\zeta_{k-1}\left(D\bigcap\overline{P}_{k-1}\right)\right)^*$, яка містить точку $\omega^{(2)}_{k-1,p}$, $k=\overline{1,2n}$, $p=\overline{1,2m}$, $\overline{P}_0:=\overline{P}_{2n}$, $\mathbf{\Omega}^{(2)}_{0,p}:=\mathbf{\Omega}^{(2)}_{n,p}$. Ясно, що $\mathbf{\Omega}^{(s)}_{k,p}$ є, взагалі кажучи, багатозв'язними областями, $k=\overline{1,2n}$, $p=\overline{1,2m}$, $s=1,2$. Пара областей $\mathbf{\Omega}^{(2)}_{k-1,p}$ и $\mathbf{\Omega}^{(1)}_{k,p}$ є результатом поділяючого перетворення відкритої множини D відносно сімейств $\{P_{k-1},P_k\}$, $\{\zeta_{k-1},\zeta_k\}$ в точці $a_{k,p}$, $k=\overline{1,2n}$, $p=\overline{1,2m}$.

Розглянемо конденсатори

$$C_k\left(t,\,D,\,A_{2n,2m}\right)=\left(E^{(k)}_0,\,E^{(k)}_1,\,E^{(k)}_2\right),$$

де

$$E^{(k)}_s=\zeta_k\left(E_s\bigcap\overline{P}_k\right)\bigcup\left[\zeta_k\left(E_s\bigcap\overline{P}_k\right)\right]^*,$$

$k=\overline{1,2n}$, $s=0,1,2$, $\{P_k\}_{k=1}^{2n}$ – система кутів, яка відповідає системі точок $A_{2n,2m}$, операція $[A]^*$ ставить у відповідність будь-якій множині $A\subset\overline{\mathbb{C}}$ множину, симетричну множині A відносно кола $|w|=1$. Звідси випливає, що конденсатору $C\left(t,\,D,\,A_{2n,2m}\right)$, при поділяючому перетворенні відносно $\{P_k\}_{k=1}^{2n}$ та $\{\zeta_k\}_{k=1}^{2n}$, відповідає набір конденсаторів $\{C_k\left(t,\,D,\,A_{2n,2m}\right)\}_{k=1}^{2n}$, симетричних відносно $\{z:\,|z|=1\}$. У відповідносні з роботами [6, 7] отримаємо

$$\mathrm{cap}C\left(t,D,A_{2n,2m}\right)\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}\mathrm{cap}C_k\left(t,D,A_{2n,2m}\right). \qquad (19)$$

Звідси випливає

$$|C(t, D, A_{2n,2m})| \leqslant 2\left(\sum_{k=1}^{2n} |C_k(t, D, A_{2n,2m})|^{-1}\right)^{-1}. \qquad (20)$$

Формула (17) дає асимптотику модуля $C(t,\ D,\ A_{2n,2m})$ при $t \to 0$, а величина $M(D, A_{2n,2m})$ є зведений модуль множини D відносно $A_{2n,2m}$. Використовуючи формули (6) та той факт, що D задовольняє умові неналягання відносно системи $A_{2n,2m}$, отримаємо аналогічні представлення для конденсаторів $C_k(t, D, A_{2n,2m})$, $k = \overline{1, 2n}$

$$|C_k(t, D, A_{2n,2m})| = \frac{1}{4\pi m(\alpha+1)} \log\frac{1}{t} + M_k(D, A_{2n,2m}) + o(1), \quad t \to 0, \qquad (21)$$

де

$$M_{2k-1}(D, A_{2n,2m}) = \frac{1}{8\pi m^2 (\alpha+1)^2} \times$$

$$\times\left[\alpha\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(1)}_{2k-1,2p-1}, \omega^{(1)}_{2k-1,2p-1}\right)}{\left[\alpha_{2k-1}\cdot\chi\left(|a_{2k-1,2p-1}|^{\alpha_{2k-1}}\right)|a_{2k-1,2p-1}|\right]^{-1}} + \right.$$

$$+\alpha\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(2)}_{2k-1,2p}, \omega^{(2)}_{2k-1,2p}\right)}{\left[\alpha_{2k-1}\cdot\chi\left(|a_{2k,2p}|^{\alpha_{2k-1}}\right)|a_{2k,2p}|\right]^{-1}} +$$

$$+\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(2)}_{2k-1,2t-1}, \omega^{(2)}_{2k-1,2t-1}\right)}{\left[\alpha_{2k-1}\cdot\chi\left(|a_{2k,2t-1}|^{\alpha_{2k-1}}\right)|a_{2k,2t-1}|\right]^{-1}} +$$

$$\left.+\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(1)}_{2k-1,2t}, \omega^{(1)}_{2k-1,2t}\right)}{\left[\alpha_{2k-1}\cdot\chi\left(|a_{2k-1,2t}|^{\alpha_{2k-1}}\right)|a_{2k-1,2t}|\right]^{-1}}\right],$$

$$M_{2k}(D, A_{2n,2m}) = \frac{1}{8\pi m^2(\alpha+1)^2}\cdot\left[\alpha\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(1)}_{2k,2p}, \omega^{(1)}_{2k,2p}\right)}{\left[\alpha_{2k}\cdot\chi\left(|a_{2k,2p}|^{\alpha_{2k}}\right)|a_{2k,2p}|\right]^{-1}} + \right.$$

$$+\alpha\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(2)}_{2k,2p-1}, \omega^{(2)}_{2k,2p-1}\right)}{\left[\alpha_{2k}\cdot\chi\left(|a_{2k+1,2p-1}|^{\alpha_{2k}}\right)|a_{2k+1,2p-1}|\right]^{-1}} +$$

$$+\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_{2k,2t}^{(2)},\omega_{2k,2t}^{(2)}\right)}{\left[\alpha_{2k}\cdot\chi\left(|a_{2k+1,2t}|^{\alpha_{2k}}\right)|a_{2k+1,2t}|\right]^{-1}}+$$

$$\left.+\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_{2k,2t-1}^{(1)},\omega_{2k,2t-1}^{(1)}\right)}{\left[\alpha_{2k}\cdot\chi\left(|a_{2k,2t-1}|^{\alpha_{2k}}\right)|a_{2k,2t-1}|\right]^{-1}}\right], \qquad k=\overline{1,n}.$$

З допомогою (21) отримаємо

$$|C_k\left(t,D,A_{2n,2m}\right)|^{-1}=\frac{4\pi m\left(\alpha+1\right)}{\log\frac{1}{t}}\cdot\left(1+\frac{4\pi m\left(\alpha+1\right)}{\log\frac{1}{t}}M_k\left(D,A_{2n,2m}\right)+\right.$$

$$\left.+o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\right)^{-1}=\frac{4\pi m\left(\alpha+1\right)}{\log\frac{1}{t}}-$$

$$-\left(\frac{4\pi m\left(\alpha+1\right)}{\log\frac{1}{t}}\right)^{2}M_k\left(D,A_{2n,2m}\right)+o\left(\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)^{2}\right), \qquad t\to 0. \qquad (22)$$

Далі, з (22) випливає, що

$$\sum_{k=1}^{2n}|C_k\left(t,D,A_{2n,2m}\right)|^{-1}=\frac{8\pi mn\left(\alpha+1\right)}{\log\frac{1}{t}}-$$

$$-\left(\frac{4\pi m\left(\alpha+1\right)}{\log\frac{1}{t}}\right)^{2}\cdot\sum_{k=1}^{2n}M_k\left(D,A_{2n,2m}\right)+o\left(\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)^{2}\right), \qquad t\to 0. \qquad (23)$$

У свою чергу, (23) дозволяє отримати таке співвідношення

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}|C_k\left(t,D,A_{2n,2m}\right)|^{-1}\right)^{-1}=\frac{\log\frac{1}{t}}{8\pi mn\left(\alpha+1\right)}\times$$

$$\times\left(1-\frac{2\pi m\left(\alpha+1\right)}{n\log\frac{1}{t}}\cdot\sum_{k=1}^{2n}M_k\left(D,A_{2n,2m}\right)+o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\right)^{-1}=$$

$$=\frac{\log\frac{1}{t}}{8\pi mn\left(\alpha+1\right)}+\frac{1}{4n^2}\cdot\sum_{k=1}^{2n}M_k\left(D,A_{2n,2m}\right)+o(1), \qquad t\to 0. \qquad (24)$$

Нерівності (19) та (20), враховуючи (17) та (24), дозволяють помітити, що

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2nm\,(\alpha+1)}\cdot\log\frac{1}{t}+M(D,A_{2n,2m})+o(1)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\log\frac{1}{t}}{4\pi mn\,(\alpha+1)}+\frac{1}{2n^2}\cdot\sum_{k=1}^{2n}M_k\left(D,A_{2n,2m}\right)+o(1). \tag{25}$$

З (25) при $t\to 0$ отримаємо, що

$$M(D,A_{2n,2m})\leqslant\frac{1}{2n^2}\cdot\sum_{k=1}^{2n}M_k\left(D,A_{2n,2m}\right). \tag{26}$$

Формули (18), (21) та (26) приводять до наступного виразу

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{4n^2m^2\cdot(\alpha+1)^2}\cdot\Big[\alpha\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}(\log r(D,a_{2k,2p})+\log r(D,a_{2k-1,2p-1}))+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}(\log r(D,a_{2k,2p-1})+\log r(D,a_{2k-1,2p}))+$$

$$+\alpha\sum_{(k,p)\neq(q,s)}(g_D(a_{2k,2p},a_{2q,2s})+g_D(a_{2k-1,2p-1},a_{2q-1,2s-1}))+$$

$$+2\sqrt{\alpha}\sum_{(k,p)\neq(q,s)}(g_D(a_{2k,2p},a_{2q-1,2s})+g_D(a_{2k,2p},a_{2q,2s-1})+$$

$$+g_D(a_{2k-1,2p-1},a_{2q-1,2s})+g_D(a_{2k-1,2p-1},a_{2q,2s-1}))+$$

$$+2\alpha\sum_{(k,p)\neq(q,s)}g_D(a_{2k,2p},a_{2q-1,2s-1})+\sum_{(k,p)\neq(q,s)}(g_D(a_{2k-1,2p},a_{2q-1,2s})+$$

$$+g_D(a_{2k,2p-1},a_{2q,2s-1}))+2\sum_{(k,p)\neq(q,s)}g_D(a_{2k-1,2p},a_{2q,2s-1})\Big]\leq$$

$$\leq\frac{1}{16\pi n^2m^2\,(\alpha+1)^2}\times$$

$$\times\left[\alpha\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(1)}_{2k-1,2p-1},\omega^{(1)}_{2k-1,2p-1}\right)}{\left[\alpha_{2k-1}\cdot\chi\left(|a_{2k-1,2p-1}|^{\alpha_{2k-1}}\right)|a_{2k-1,2p-1}|\right]^{-1}}+\right.$$

$$+\alpha\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(2)}_{2k-1,2p},\omega^{(2)}_{2k-1,2p}\right)}{\left[\alpha_{2k-1}\cdot\chi\left(|a_{2k,2p}|^{\alpha_{2k-1}}\right)|a_{2k,2p}|\right]^{-1}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(2)}_{2k-1,2t-1},\omega^{(2)}_{2k-1,2t-1}\right)}{\left[\alpha_{2k-1}\cdot\chi\left(|a_{2k,2t-1}|^{\alpha_{2k-1}}\right)|a_{2k,2t-1}|\right]^{-1}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(1)}_{2k-1,2t},\omega^{(1)}_{2k-1,2t}\right)}{\left[\alpha_{2k-1}\cdot\chi\left(|a_{2k-1,2t}|^{\alpha_{2k-1}}\right)|a_{2k-1,2t}|\right]^{-1}}+$$

$$+\alpha\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(1)}_{2k,2p},\omega^{(1)}_{2k,2p}\right)}{\left[\alpha_{2k}\cdot\chi\left(|a_{2k,2p}|^{\alpha_{2k}}\right)|a_{2k,2p}|\right]^{-1}}+$$

$$+\alpha\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(2)}_{2k,2p-1},\omega^{(2)}_{2k,2p-1}\right)}{\left[\alpha_{2k}\cdot\chi\left(|a_{2k+1,2p-1}|^{\alpha_{2k}}\right)|a_{2k+1,2p-1}|\right]^{-1}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(2)}_{2k,2t},\omega^{(2)}_{2k,2t}\right)}{\left[\alpha_{2k}\cdot\chi\left(|a_{2k+1,2t}|^{\alpha_{2k}}\right)|a_{2k+1,2t}|\right]^{-1}}+$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}^{(1)}_{2k,2t-1},\omega^{(1)}_{2k,2t-1}\right)}{\left[\alpha_{2k}\cdot\chi\left(|a_{2k,2t-1}|^{\alpha_{2k}}\right)|a_{2k,2t-1}|\right]^{-1}}\right].$$

З останнього, отримаємо співвідношення (12). Закінчення доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 1. **Теорема 2 доведена**.

Під кінець, хочу виразити подяку Бахтіну Олександру Костянтиновичу за постановку задачі та ряд цінних вказівок.

Література

[1] М.А. Лаврентьев. *К теории конформных отображений*// Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР, 1934, **5**, 159 – 245.

[2] Г.М. Голузин. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* М: Наука, 1966.

[3] Г.П. Бахтина. *Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях*: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук, Киев, 1975, 11 с.

[4] В.Н. Дубинин *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении*. Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР, 1988, **168**, 48 – 66.

[5] В.Н. Дубинин. *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменною*. Успехи мат. наук, 1994, **49**, № 1(295), 3 – 76.

[6] В.Н. Дубинин. *Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения*. Зап. науч. сем. ПОМИ, 1997, **237**, 56 – 73.

[7] А.К. Бахтин, Г.П. Бахтина, Ю.Б. Зелинский. *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе.*. Праці ін-ту мат-ки НАН України, 2008, **73**.

[8] О.К. Бахтін. *Нерівності для внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин*. Укр. мат. журн. 2009, **61**, № 5, 596 – 610.

[9] В.Н. Дубинин *О квадратичных формах, порожденных функциями Грина и Робена*. Мат. сборник, 2009, **200**, № 10, 25 – 38.

[10] А.К. Бахтин, А.Л. Таргонский. *Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы*. Нелінійні коливання, 2005, **8**, № 3, 298 – 303.

[11] А.Л. Таргонский. *Экстремальные задачи о частично неналегающих областях на римановой сфере*. Доп. НАН Украини, 2008, № 9, 31 – 36.

[12] Г.В. Кузьмина. *Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы*. Зап. науч. сем. ПОМИ, 2001, **276**, 253 – 275.

[13] Е.Г. Емельянов *К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей*. Зап. науч. сем. ПОМИ, 2002, **286**, 103 – 114.

[14] В.К. Хейман. *Многолистные функции.* - М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

[15] Дж.А. Дженкинс. *Однолистные функции и конформные отображения.* М.: Изд-во иностр. лит., 1962.