Національна Академія Наук України

Інститут математики

На правах рукопису

Таргонський Андрій Леонідович

УДК 517.54

ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ОДНОЛИСТИХ ФУНКЦІЙ

01.01.01. – математичний аналіз

Дисертація

на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник

Бахтін Олександр Костянтинович

кандидат фізико-математичних наук

Київ 2006

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Дисертація присвячена одному з класичних напрямків геометричної теорії функцій, а саме, екстремальним задачам на класах взаємно неперетинних областей. В розробці даної тематики приймали участь багато відомих вчених: М. А. Лаврентьєв [52], Ю. Є. Аленіцин [2], Г. М. Голузин [24, 25], Н. А. Лебедев [53 – 55], Дж. Дженкінс [27, 75, 76], П. М. Тамразов [58 – 61], П. П. Куфарев, А. Е. Фалес [51], Г. П. Бахтіна [19 – 22], О. К. Бахтін [4 – 12, 70], В. Н. Дубинін [28 – 34], Н. І. Колбіна [40, 41], З. Нехарі [77], І. А. Александров [1], В. А. Андрєєв [3], І. П. Митюк [56, 57], Г. В. Кузьміна [42 – 50], С. І. Федоров [65], Є. Г. Емельянов [35 – 37], Л. В. Ковалев [38, 39], М. Шиффер [79 – 81], П. Л. Дюрен [72] і інші.

Початок розвитку цієї тематики пов'язують з роботою 1934 року М. А. Лаврентьєва [52]. Він знайшов максимум і визначив розміщення екстремальних областей функціоналу, що складається з добутку внутрішніх радіусів двох однозв'язних областей відносно фіксованих точок комплексної площини. В 1947 році Г. М. Голузин розв'язав аналогічну задачу для трьох фіксованих точок комплексної площини [24, 25]. Після цього ця тематика почала стрімко розвиватися. В зв'язку з цим можна пригадати роботи П. П. Куфарева, А. Е. Фалеса [51], Н. І. Колбіной [40, 41], Ю. Є. Аленіцина [2], З. Нехарі [77], І. А. Александрова [1], В. А. Андрєєва [3] і інших. В цей час Н. А. Лебедев [53 – 55] узагальнює метод площ та отримує з допомогою нього багато нових цікавих результатів.

В останні 25 років в цій області геометричної теорії функцій намітився серйозний прорив. Тут можна згадати результати Г. В. Кузьміної [42 – 50], С. І. Федорова [65], Є. Г. Емельянова [35 – 37], І. П. Митюка [56, 57], О. К. Бахтіна [4 – 12, 70], Л. В. Ковалева [38, 39] і інших.

У роботах В. Н. Дубиніна [28 – 32] був розроблений новий метод дослідження, а саме, метод кусочно-поділяючого перетворення. З допомогою цього методу В. Н. Дубинін почав розв'язувати екстремальні задачі для довільної кількості багатозв'язних областей, які взаємно не перетинаються.

В цій роботі розглянуто нові екстремальні задачі, як по своїй постановці, так і по методам дослідження.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. У даній роботі вибраний напрям досліджень зв'язаний з науковими програмами, планами і темами Інституту математики НАН України, зокрема з темою дослідження № 0102И000917. Також, напрям дослідження був підтриманий Міжнародним науковим фондом INTAS, грант 99-00089.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є розв'язування екстремальних задач на знаходження максимуму функціоналів, які залежать від внутрішніх радіусів довільних багатозв'язних областей відносно точок комплексної площини, які задовольняють умовам певної симетрії.

Об'єктами дослідження є функціонали, внутрішні радіуси областей відносно деяких точок комплексної площини, екстремальні області.

Предметом дослідження є знаходження максимумів відповідних функціоналів та повна характеристика екстремальних конфігурацій для цих функціоналів. Сформулюємо тепер основні задачі дослідження:

1. Для функціоналів, що складаються з добутку внутрішніх радіусів

взаємно неперетинних областей взятих відносно точок, які вільно рухаються по рівномірний променевій системі, дати характеристику розміщенню екстремальних областей та точок.

2. Розв'язати екстремальні задачі для функціоналів, що складаються з добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей взятих відносно точок, які вільно рухаються по рівномірний променевій системі, а також деякої системи фіксованих точок.

3. Визначити повну характеристику екстремальної конфігурації для функціоналів, які складаються з добутку внутрішніх радіусів трьох або чотирьох взаємно неперетинних областей взятих відносно точок, що вільно рухаються по одиничному колу.

4. Для функціоналів, що складаються з добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей взятих відносно точок, які вільно рухаються по довільній променевій системі, дати повну характеристику розміщенню екстремальних областей та точок.

Основними методами дослідження є: методи класичного аналізу, методи теорії функцій та конформних відображень, зокрема: методи симетризації, метод квадратичних диференціалів, варіаційні методи, метод кусочно-поділяючого перетворення.

Наукова новизна отриманих результатів. Всі результати дисертації є новими. У роботі отримано наступні результати.

1. Сформульована та повністю розв'язана досить загальна нова екстремальна задача для попарно взаємно неперетинних областей із вільними полюсами на так званих "рівномірних променевих системах точок". (Теорема 2.1).

2. Повністю розв'язана для рівномірних променевих систем точок екстремальна задача так званого "мішаного типу", тобто для якої деяка система полюсів є вільна, а деяка є фіксована. (Теореми 2.2 – 2.4).

3. Сформульована та повністю розв'язана нова екстремальна задача для попарно взаємно неперетинних областей із вільними полюсами, що рухаються по рівномірний променевій системі у деякому кільці. (Теорема 3.1).

4. Вирішена досить загальна аналогічна задача для добутку внутрішніх радіусів областей, що належать одиничному кругу. (Теореми 3.2, 3.3).

5. Розглянуті екстремальні задачі з вільними полюсами на одиничному колі у випадку трьох та чотирьох попарно взаємно неперетинних областей. (Теореми 3.4 – 3.6).

6. Розв'язана досить загальна екстремальна задача для попарно взаємно неперетинних областей із вільними полюсами на так званих "довільних променевих системах точок". (Теореми 4.1, 4.2).

Теоретичне та практичне значення одержаних результатів. Результати роботи мають теоретичний характер. Одержані результати можуть бути використані для подальшого розвитку теорії функцій.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку дослідження, постановка задач належать науковому керівнику — кандидату фізико-математичних наук О. К. Бахтіну. Результати сумісних робіт [13 – 18, 71], за виключенням результатів в яких конкретно вказаний їх автор, отримані дисертантом сумісно з О. К. Бахтіним, причому внесок обох співавторів однаковий (ці результати наведено у розділі 2, підрозділи 2.2 і 2.3, розділі 3, підрозділи 3.5 і 3.6, розділі 4, підрозділ 4.3). Усі інші результати роботи належать особисто дисертанту.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися:

1. На багатьох засіданнях семінару відділу комплексного аналізу та теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник семінару — доктор фізико-математичних наук Ю. Б. Зелінський);

2. На семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник семінару — член кореспондент НАН України О. І. Степанець);

3. На Львівському міжвузівському семінарі з теорії аналітичних функцій (Львівський національний університет, керівник семінару — доктор фізико-математичних наук, професор А. А. Кондратюк);

4. International Conference "Complex Analysis and Potential Theory" (7 – 12 серпня 2001 р., м. Київ);

5. Українському математичному конгресі-2001 (секція № 4, Комплексний аналіз і теорія потенціалу, 21 – 23 серпня 2001р., м. Київ);

6. International Workshop "Potential Flows and Complex Analysis" (23 – 29 вересня 2002 р., м. Київ);

7. Second International Conference "Mathematical Analysis and Economics" (1 – 4 квітня 2003 р., м. Суми);

8. International Workshop "Potential Theory and Free Boundary Flows" (19 – 27 серпня 2003 р., м. Київ);

9. International Workshop "Free Boundary Flows and Related Problems of Analysis"(25 – 30 вересня 2005 р., м. Київ).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані у фахових виданнях [16, 18, 63], у збірнику наукових праць Інституту математики НАН України [17], збірнику наукових праць міжнародного конгресу [14], препринтах Інституту математики НАН України [13, 15] та у тезах міжнародних конференцій [62, 64, 71, 82].

Структура та загальний обсяг дисертації. Дисертація складається із вступу, основної частини, що складається з чотирьох розділів, загальних висновків та списку цитованої літератури, що містить першоджерела. Загальний обсяг дисертації — 145 сторінок машинописного тексту, обсяг основної частини — 119 сторінок машинописного тексту.

Автор висловлює глибоку подяку своєму науковому керівнику кандидату фізико-математичних наук О. К. Бахтіну за постійну допомогу і сприяння у написанні роботи.

Наведемо тепер систему нумерації, яка прийнята у роботі.

Номер задачі, теореми, леми, наслідку та формули складається з двох чисел — перше показує номер розділу, а друге — порядковий номер у цьому розділі.

Проведемо тепер огляд розміщення основних результатів роботи по розділам та підрозділам.

Перший розділ дисертації присвячено огляду літератури за темою даної роботи.

Другий розділ дисертації присвячено розв'язуванню екстремальних задач для функціоналів, які складаються з добутку внутрішніх радіусів областей відносно точок, що вільно рухаються по рівномірній променевій системі у всій комплексній площині.

У підрозділі 2.1 наводяться основні поняття, які використовуються у розділі 2.

У підрозділі 2.2 наводиться розв'язок задачі по визначенню екстремальних областей та точок для функціоналу, що складається з добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей взятих відносно точок 0, ∞, а також точок, що вільно рухаються по рівномірний променевій системі.

У підрозділі 2.3 розв'язано задачу по описанню екстремальної конфігурації для функціоналу, що складається з добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей взятих відносно точок, що вільно рухаються по рівномірний променевій системі, точок 0, ∞, а також точок $e^{i\frac{\pi}{n}(2k-1)}$, $k = 1, 2, ..., n$.

У підрозділі 2.4 розглядається розв'язок задачі по визначенню повної характеристики екстремальної конфігурації для функціоналу, що складається з добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей взятих відносно точок, що вільно рухаються по рівномірний променевій системі, точки 0 або ∞, а також точок $e^{i\frac{\pi}{n}(2k-1)}$, $k = 1, 2, ..., n$.

У підрозділі 2.5 розв'язується задача по описанню екстремальної конфігурації для функціоналу, що складається з добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей взятих відносно точок, що вільно рухаються по рівномірний променевій системі, а також точок $e^{i\frac{\pi}{n}(2k-1)}$, $k = 1, 2, ..., n$.

Третій розділ дисертації присвячено розв'язуванню екстремальних задач для функціоналів, які складаються з добутку внутрішніх радіусів областей, відносно точок 0, ∞, а також точок, що вільно рухаються по рівномірний променевій системі або є фіксованими. Причому точки або області пов'язані умовами певної симетрії з деяким колом.

У підрозділі 3.1 наводяться основні поняття, які використовуються у розділі 3.

У підрозділі 3.2 розв'язано задачі по описанню повної характеристики екстремальної конфігурації для функціоналу, що складається з добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей взятих відносно точок 0, ∞, а також точок, які належать деякому кільцю та вільно рухаються по рівномірний променевій системі.

У підрозділі 3.3 приводиться розв'язок задачі по визначенню розміщення екстремальних областей та точок для функціоналу, що складається з добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей, що належать одиничному кругу, взятих відносно точок, які вільно рухаються по рівномірний променевій системі.

У підрозділі 3.4 дана повна характеристики екстремальної конфігурації для функціоналу, який складається з добутку внутрішніх радіусів чотирьох взаємно неперетинних областей взятих відносно точок, що вільно рухаються по одиничному колу.

У підрозділі 3.5 повністю описане розміщення екстремальних областей та точок для функціоналу, який складається з добутку внутрішніх радіусів трьох взаємно неперетинних областей взятих відносно точок, що вільно рухаються по одиничному колу.

У підрозділі 3.6 розв'язано задачі по визначенню повної характеристики екстремальної конфігурації для функціоналу, який складається з добутку внутрішніх радіусів трьох взаємно неперетинних областей взятих відносно точок, що вільно рухаються по одиничному колу, а також залежить від відстаней між цими точками.

Четвертий розділ дисертації присвячено розв'язуванню екстремальних задач для функціоналів, які складаються з добутку внутрішніх радіусів областей відносно точок, що вільно рухаються по довільній променевій системі у всій комплексній площині. Також у цьому розділі наводяться максимальні значення деяких функціоналів, які розглядаються у даній роботі.

У підрозділі 4.1 наводяться основні поняття, які використовуються у розділі 4.

У підрозділі 4.2 приведені леми, які використовуються для доведення результатів підрозділу 4.3.

У підрозділі 4.3 розв'язано задачі по визначенню повної характеристики екстремальної конфігурації для функціоналу, що складається з добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей взятих відносно точок 0, ∞, а також точок, що вільно рухаються по довільній променевій системі.

У підрозділі 4.4 знайдено максимальні значення деяких функціоналів, які розглядаються у дисертаційній роботі.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

В цьому розділі наводиться короткий історичний огляд напряму дослідження, а також сформульовані основні класичні результати, які мають застосування у дисертації.

1.1. Історичний огляд напряму дослідження

Робота присвячена класичному розділу геометричної теорії функцій комплексної змінної — екстремальним задачам на класах взаємно неперетинних областей. Цей напрям започатковано у роботі М. А. Лаврентьєва [52], який у 1934 році сформулював та розв'язав своїм варіантом варіаційно-параметричного методу задачу з двома однозв'язними взаємно неперетинними областями, які належать комплексній площині. Сформулюємо цей результат.

Теорема 1.1. ([52]). *Нехай* a_1 *і* a_2 *— деякі фіксовані точки комплексної площини* $\mathbb{C}$, D_k, $a_k \in D_k$, $k = 1, 2$ *— довільні взаємно неперетинні області на* $\overline{\mathbb{C}}$, *і функції* $f_k(z)$, $k = 1, 2$ *регулярно відображають одиничний круг* $\{z : |z| < 1\}$ *на області* D_k, $k = 1, 2$ *так, що* $f_k(0) = a_k$, $k = 1, 2$. *Тоді справедлива нерівність*

$$|f_1'(0)| \cdot |f_2'(0)| \leq |a_1 - a_2|^2 .$$

Причому для областей D_k, $k = 1, 2$, *знак рівності в нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли області* D_1, D_2 *обмежені прямою* $\left|\frac{z-a_1}{z-a_2}\right| = 1$.

Подальші дослідження показали, що нескладно отримати наступний результат, який ми далі і будемо називати теоремою Лаврентьєва. Цей результат взятий з роботи [32]. (Надалі ми будемо користуватися поняттям внутрішнього радіуса області B відносно точки $a \in B$, яке ми вводимо у підрозділі 2.1 розділу 2).

Теорема 1.2. *Нехай* a_1 *і* a_2 *— деякі фіксовані точки комплексної площини* $\mathbb{C}$, D_k, $a_k \in D_k$, $k = 1, 2$, *— довільні взаємно неперетинні області на* $\overline{\mathbb{C}}$. *Тоді має місце наступна нерівність*

$$r\left(D_1, a_1\right) \cdot r\left(D_2, a_2\right) \leq \left|a_1 - a_2\right|^2. \tag{1.1}$$

Причому для областей D_k, $k = 1, 2$, *які мають класичну функцію Гріна [25, 66], знак рівності в нерівності (1.1) досягається тоді і тільки тоді, коли області* D_1, D_2 *обмежені колом* $\left|\frac{z-a_1}{z-a_2}\right| = C$ *, де* C *— довільна додатна стала.*

Наступний крок в розвитку цієї тематики у 1951 році зробив Г. М. Голузин. Він суттєво узагальнив задачу Лаврентьєва та за допомогою свого варіаційного метода дав її якісний розв'язок для довільної кількості однозв'язних взаємно неперетинних областей і повний розв'язок для трьох однозв'язних взаємно неперетинних областей. Тут ми приведемо тільки результат Г. М. Голузина для трьох однозв'язних взаємно неперетинних областей.

Теорема 1.3. ([24, 25]). *Нехай* a_1, a_2, a_3 *— деякі фіксовані точки комплексної площини* $\mathbb{C}$, D_k, $a_k \in D_k$, $k = 1, 2, 3$ *— довільні взаємно неперетинні області на* $\overline{\mathbb{C}}$, *і функції* $f_k\left(z\right)$, $k = 1, 2, 3$ *регулярно відображають одиничний круг* $\{z : |z| < 1\}$ *на області* D_k, $k = 1, 2, 3$ *так,* *що* $f_k(0) = a_k$, $k = 1, 2, 3$. *Тоді справедлива нерівність*

$$\left|\prod_{k=1}^{3} f_k'(0)\right| \leq \frac{61}{81\sqrt{3}} \left|(f_1(0) - f_2(0))(f_1(0) - f_3(0))(f_2(0) - f_3(0))\right|. \tag{1.2}$$

Причому, якщо точки $a_k = a \exp\left\{\frac{2\pi i}{3}\right\}$, $k = 1, 2, 3$, $a > 0$, *то знак рівності в нерівності (1.2) досягається для функцій* $f_k(z) = a_k \left(\frac{1+z\exp\{i\alpha_k\}}{1-z\exp\{i\alpha_k\}}\right)^{\frac{2}{3}}$, $k = 1, 2, 3$ *і тільки для них; в іншому випадку, той же максимум досягається для функцій* $f_k(z)$, $k = 1, 2, 3$ *одна з яких обмежена в крузі* $|z| < 1$.

Після цього почався стрімкий розвиток цієї тематики. В зв'язку з цим можна пригадати роботи таких вчених: Н. А. Лебедева [53 – 55], П. М. Тамразова [58 – 61], П. П. Куфарева, А. Е. Фалеса [51], Н. І. Колбіної [40, 41], Дж. Дженкінса [27, 75, 76], Ю. Є. Аленіцина [2], І. А. Александрова [1], В. А. Андрєєва [3] та інших. Н. А. Лебедев узагальнює метод площ та розв'язує з допомогою нього велику кількість нових цікавих задач. Дж. Дженкінс у своїй роботі [27] доводить загальну теорему о коефіцієнтах, яка є розв'язком досить загальної задачі для взаємно неперетинних областей на скінчених рімановних поверхнях. У 1967 році П. М. Тамразов у роботі [60] доповнює цю теорему. Взагалі з загальної теореми о коефіцієнтах можна отримати більшість відомих у той час результатів для взаємно неперетинних областей. Але всі ці задачі відносилися до класу задач з фіксованими полюсами квадратичного диференціалу.

В усіх вище перерахованих роботах регулярні функції задовольняли нормуючій умові: точка $z = 0$ при відображенні цими функціями переходила в деякі різні, але фіксовані точки a_k, $k = \overline{1, n}$ комплексної площини. В 1968 році П. М. Тамразов у своїй роботі [61] висунув ідею, яка полягала у тому, що точкам a_k, $k = \overline{1, n}$ можна надавати теж деяку "свободу". В 1975 році у відповідності з вище сформульованою ідеєю у своїй дисертації [21] Г. П. Бахтіна вперше поставила та розв'язала ряд екстремальних задач на класі взаємно неперетинних областей з так званими "вільними"полюсами. Внаслідок цих результатів тематика отримала новий поштовх для свого розвитку. Тепер сформулюємо один з результатів Г. П. Бахтіной, взятий з робіт [19, 21].

Розглянемо множину різних систем $\{f_i\}_{i=1}^4$ функцій $w = f_i(z)$, $i = \overline{1, 4}$ мероморфних і однолистих в одиничному крузі $|z| < 1$ і, які відображають його на взаємно неперетинні області D_i, $i = \overline{1, 4}$, і задовольняють умовам $|f_i(0)| = 1$, $i = \overline{1, 4}$. Потрібно знайти максимум функціоналу

$$I\left(\{f_i\}_{i=1}^4\right) = \prod_{k=1}^4 |f_k'(0)|,$$

а також визначити екстремальні функції $w = f_i^0(z)$, $i = \overline{1, 4}$. Рішення цієї задачі дає наступна теорема.

Теорема 1.4. ([19, 21]). *Для різних систем $\{f_i\}_{i=1}^4$ функцій $w = f_i(z)$, $i = \overline{1, 4}$ мероморфних і однолистих в одиничному крузі $|z| < 1$ і, які відображають його на взаємно неперетинні області D_i, $i = \overline{1, 4}$, і задовольняють умовам $|f_i(0)| = 1$, $i = \overline{1, 4}$ справедлива нерівність*

$$I\left(\{f_i\}_{i=1}^2\right) = \prod_{k=1}^4 |f_k'(0)| \leq 1. \tag{1.3}$$

Причому знак рівності в нерівності (1.3) досягається для систем функцій $f_i^0(z)$, $i = \overline{1, 4}$, які відображають круг $|z| < 1$ на чотири квадранти і переводять точку $z = 0$ відповідно в чотири точки $\pm e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$. З *точністю до повороту навколо точки* $w = 0$ *екстремальна система областей-образів єдина.*

Після цього у 1978 році в роботі [28] В. Н. Дубинін узагальнив один результат Г. П. Бахтіной, у 1987 році Є. Г. Емельянов розв'язав досить складну задачу з двома колами [36], в 1978 році В. Н. Дубинін розробив свій метод кусочно-поділяючого перетворення і розв'язав за допомогою нього велику кількість різних задач (див. напр. [28 – 32]), Г. В. Кузьміна [42 – 44] та С. І. Федоров [65] розв'язали ряд задач, І. П. Митюк [56, 57] отримав нові цікаві результати. У 90-х роках XX століття з'явилася ціла серія робіт (Г. В. Кузьміна [45 – 47], В. Н. Дубинін [32, 33], Г. П. Бахтіна, О. К. Бахтін [5, 6, 22] і інші). Велика кількість робіт по цій тематиці з'явилася вже у XXI столітті (див. напр., Л. В. Ковалев [38, 39], Г. В. Кузьміна [48 – 50], Є. Г. Емельянов [37], В. Н. Дубинін [34], О. К. Бахтін [4, 7 – 12, 70] та інші). Отже, з усього вищесказаного ми можемо зробити висновок, що зараз цей класичний напрям геометричної теорії функцій переживає бурхливий розвиток.

1.2. Деякі факти теорії квадратичних диференціалів

В цій області суттєво використовується теорія квадратичних диференціалів, яка була розвинута у роботі [27]. Тому в цьому підрозділі ми наведемо основні поняття з теорії квадратичних диференціалів, які будуть використовуватися у дисертації.

Означення 1.1. ([27]). Нехай E — орієнтовна ріманова поверхня. Ми будемо казати, що на E визначено квадратичний диференціал, якщо кожному локальному параметру z поверхні E поставлено у відповідність деяку функцію $Q(z)$, мероморфну у відповідному околі і, яка задовольняє наступній умові. Якщо z^* — інший локальний параметр для E і $Q^*(z^*)$ — така ж функція для z^*, причому околи, відповідні z і z^* перетинаються, то в спільних точках цих околів

$$Q^*(z^*) = Q(z)\left(\frac{dz}{dz^*}\right)^2.$$

Квадратичні диференціали будемо позначати символом $Q(z)\,dz^2$. Точка P поверхні E називається нулем або полюсом порядка k диференціалу $Q(z)\,dz^2$, якщо для кожного локального параметру z вона зображується точкою, яка володіє відповідною властивістю відносно $Q(z)$. Сукупність нулів та простих полюсів будемо надалі позначати C, а сукупність полюсів другого порядку — H.

В нашій роботі ми будемо працювати з квадратичними диференціалами, які мають особливі точки, що є або нулями, або простими полюсами, або полюсами другого порядку.

Означення 1.2. ([27]). Нехай E — орієнтовна ріманова поверхня. $Q(z)\,dz^2$ — квадратичний диференціал, заданий на E. Максимальна регулярна крива, на якій $Q(z)\,dz^2 > 0$, називається траєкторією диференціалу $Q(z)\,dz^2$. Максимальна регулярна крива, на якій $Q(z)\,dz^2 < 0$, називається ортогональною траєкторією диференціалу $Q(z)\,dz^2$.

Означення 1.3. ([27]). Множина K на E називається F-множиною (відносно $Q(z)\,dz^2$), якщо всяка траєкторія диференціалу $Q(z)\,dz^2$, яка перетинається з K, повністю належить K.

Означення 1.4. ([27]). Круговою областю D (відносно $Q(z)\,dz^2$) називається максимальна зв'язна відкрита F-множина на E, яка задовольняє наступним властивостям:

1) D містить єдиний подвійний полюс A диференціалу $Q(z)\,dz^2$;

2) $D\setminus A$ заповнена траєкторіями диференціалу $Q(z)\,dz^2$, кожна з яких представляє собою жорданову криву, яка відокремлює A від границі D.

3) при належному виборі чисто уявної сталої c функція

$$w = \exp\left\{c\int\sqrt{(Q(z))}dz\right\},$$

доповнена значенням нуль в точці A, відображає D конформно на круг $|w| < R$, причому A переходить в точку $w = 0$.

Сформулюємо тепер теорему, яка характеризує поведінку траєкторій квадратичного диференціалу $Q(z)\,dz^2$ в деякому околі нуля або простого полюса.

Теорема 1.5. ([27]). *Яка б не була точка $P \in C$ порядку μ (якщо P – нуль, то $\mu > 0$ і дорівнює порядку цього нуля; $\mu = -1$, якщо P – простий полюс), існує окіл N цієї точки на* E *і гомеоморфне відображення N на круг $|w| < 1$, при якому максимальна дуга кожної траєкторії із N переходить у відкриту дугу, на якій $\mathrm{Im}\, w^{\frac{\mu+2}{2}}$ стала. Існує $\mu+2$ траєкторії з кінцями в P і з граничними дотичними напрямками, які складають один з одним рівні кути величиною $\frac{2\pi}{\mu+2}$.*

Наступна теорема характеризує поведінку траєкторій квадратичного диференціалу $Q(z)\,dz^2$ в околі полюса другого порядку.

Теорема 1.6. ([27]). *Нехай $P \in H$ – полюс другого порядку, і z –*

локальний параметр, причому точці P відповідає $z = 0$.

Нехай $[Q(z)]^{-\frac{1}{2}}$ має (при деякому виборі вітки кореня) наступний розклад в околі точки $z = 0$:

$$[Q(z)]^{-\frac{1}{2}} = (a + ib)\, z \left\{1 + b_1 z + b_2 z^2 + ...\right\},$$

де a, b — дійсні, а $b_1, b_2, ...$ — комплексні сталі. Будова образів траєкторій диференціалу $Q(z)\, dz^2$ в площині z визначається тим, який з трьох наступних випадків має місце.

Випадок I: $a \neq 0$, $b \neq 0$. Для достатньо малого $\alpha > 0$ образ всякої траєкторії, яка перетинає круг $|z| < \alpha$, в одному напрямі прямує до $z = 0$, а в іншому — виходить з круга $|z| < \alpha$. І модуль, і аргумент z змінюється монотонно на образі траєкторії в крузі $|z| < \alpha$. Всякий образ траєкторії закручується біля точки $z = 0$ і веде себе асимптотично, як логарифмічна спираль.

Випадок II: $a \neq 0$, $b = 0$. Для достатньо малого $\alpha > 0$ образ всякої траєкторії, яка перетинає круг $|z| < \alpha$, в одному напрямі прямує до $z = 0$, а в іншому — виходить з круга $|z| < \alpha$. Модуль z змінюється монотонно на образі траєкторії в крузі $|z| < \alpha$. Різні образи траєкторій мають різні граничні напрямки в точці $z = 0$.

Випадок III: $a = 0$, $b = 0$. Для всякого $\epsilon > 0$ можна знайти таке число $\alpha(\epsilon) > 0$, що при $0 < \alpha \leq \alpha(\epsilon)$ образ траєкторії, яка перетинає коло $|z| = \alpha$, представляє собою жорданову криву, яка належить круговому кільцю

$$\alpha (1 + \epsilon)^{-1} < |z| < \alpha (1 + \epsilon).$$

1.3. Основні класичні результати, які використовуються в роботі

В цьому підрозділі ми наведемо ряд класичних результатів, які використовуються в роботі.

Спочатку сформулюємо результат В. Н. Дубиніна 1985 року для фіксованих полюсів, який підсилює класичний результат Дж. Дженкінса [27].

Теорема 1.7. ([29, 30]). *Нехай $Q(z)\,dz^2$ — додатній квадратичний диференціал на G, регулярний усюди, за виключенням n простих полюсів та m полюсів другого порядку, $b_1, b_2, ..., b_m$, в околах яких в термінах деякого локального параметра, який зображає b_l, $l = 1, 2, ..., m$ як точку $z = 0$, має місце розклад*

$$Q(z)\,dz^2 = \left(-\frac{\alpha_l}{z^2} + ...\right) dz^2,$$

$\alpha_l > 0$, $l = 1, ..., m$ ($n \geq 0$, $m \geq 1$, множина простих полюсів може бути порожня). Для $n = 0$, $m = 2$ і $G = \mathbb{C}$ одночасно нехай G_1 і G_2 — довільні області обмежені одною і тою ж траєкторією квадратичного диференціалу $Q(z)\,dz^2$. В інших випадках нехай G є внутрішнім замиканням кругових областей $G_1, G_2, ..., G_m$, відповідних полюсам $b_1, b_2, ..., b_m$. Тоді для довільних областей $D_1, D_2, ..., D_m$, $b_l \in D_l \subset G$, $l = 1, 2, ..., m$, об'єднання яких містить не більше, ніж скінчене число замикань ортогональних траєкторій квадратичного диференціалу

$Q(z)\,dz^2$, справедлива нерівність

$$\prod_{k=1}^{m} r^{\alpha_l}(D_l, a_l) \leq \prod_{k=1}^{m} r^{\alpha_l}(G_l, a_l)\,. \tag{1.4}$$

Якщо, додатково, області D_l, $l = 1, ..., m$ мають класичні функції Гріна, то рівність в (1.4) досягається тільки у тому випадку, коли лінії рівня цих функцій складаються із замикань траєкторій квадратичного диференціалу $Q(z)\,dz^2$. Зокрема, для однозв'язних областей $D_1, ..., D_m$ знак рівності має місце тоді і тільки тоді, коли $D_l = G_l$, $l = 1, ..., m$.

Наступний результат В. Н. Дубиніна отриманий у 1978 році для вільних полюсів на одиничному колі, суттєво узагальнює відомий результат Г. П. Бахтіної [19, 21].

Нехай a_k, $k = 1, 2, ..., n$ $(n \geq 3)$ довільні різні точки, які належать одиничному колу $|z| = 1$, а D_k, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 1, ..., n$ — довільні попарно неперетинні області. Розглянемо функціонал

$$\prod_{k=1}^{m} r(D_k, a_k)\,.$$

Необхідно знайти його максимум і визначити екстремальну конфігурацію. Відповідь на ці питання дає наступна теорема.

Теорема 1.8. ([28 – 32]). *Для довільних різних точок a_k, $k = 1, 2, ..., n$ $(n \geq 3)$, які належать одиничному колу $|z| = 1$, і довільних попарно неперетинних областей D_k, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 1, ..., n$, справедлива нерівність*

$$\prod_{k=1}^{m} r(D_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n. \tag{1.5}$$

Якщо, додатково, області D_k, $k = 1, ..., n$, мають класичні функції Гріна, то рівність в (1.5) досягається у тому і тільки у тому випадку, ко-

ли $a_k = \exp\left(i\left(\theta + \frac{2\pi k}{n}\right)\right)$, $D_k = \left\{z : \left|\arg z - \theta - \frac{2\pi k}{n}\right| < \frac{\pi}{n}\right\}$, $k = 1, ..., n$, *де* θ *— довільна дійсна стала.*

Тепер сформулюємо результати В. Н. Дубиніна 1988 року, які відрізняється від попереднього тим, що крім n вільних точок одиничного кола додатково розглядаються ще дві фіксовані точки $z = 0$, $z = \infty$. Тобто, для системи різних точок $a_0 := 0$, a_k, $a_{n+1} := \infty$, $k = 1, 2, ..., n$ $(n \geq 2)$, де різні точки a_k, $k = 1, 2, ..., n$ належать одиничному колу $|z| = 1$, і системи попарно неперетинних областей D_k, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 0, 1, ..., n, n+1$, потрібно знайти максимум функціоналу

$$\left(r\left(D_0, a_0\right) \cdot r\left(D_{n+1}, a_{n+1}\right)\right)^{\beta} \cdot \prod_{k=1}^{m} r\left(D_k, a_k\right),$$

а також визначити екстремальну конфігурацію. Ця задача також бере початок у роботі Г. П. Бахтіної [21]. В цьому випадку справедливий наступний результат, який безпосередньо у його роботах не сформульований, але є простим наслідком доведення теореми, яка розв'язує вище сформульовану задачу для $\beta = \frac{1}{2}$, приведену у роботах [28 – 32].

Теорема 1.9. *Для довільного дійсного* $0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}$, *і довільних різних точок* a_k, $k = 1, 2, ..., n$ $(n \geq 2)$, *які належать одиничному колу* $|z| = 1$ *та попарно неперетинних областей* D_k, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 0, 1, ..., n+1$ $(a_0 = 0, a_{n+1} = \infty)$, *справедлива нерівність*

$$\left(r\left(D_0, a_0\right) \cdot r\left(D_{n+1}, a_{n+1}\right)\right)^{\beta} \cdot \prod_{k=1}^{m} r\left(D_k, a_k\right) \leq$$

$$\leq \left(r\left(D_0^0, 0\right) \cdot r\left(D_{n+1}^0, \infty\right)\right)^{\beta} \cdot \prod_{k=1}^{m} r\left(D_k^0, a_k^0\right), \qquad (1.6)$$

де області D_k^0, $k = 0, 1, ..., n, n+1$ *і точки* a_k^0 $k = 1, ..., n$, *є відповідно* *круговими областями і полюсами квадратичного диференціалу*

$$Q(z)dz^2 = -\frac{(\alpha z)^{2n} + (\alpha z)^n \left(\frac{n^2}{\beta} - 2\right) + 1}{z^2\left((\alpha z)^n - 1\right)^2} dz^2,$$

де α *— довільна стала,* $|\alpha| = 1$*. Якщо, додатково, області* D_k*,* $k = 0, 1, ..., n, n+1$*, мають класичні функції Гріна, то рівність в (1.6) досягається у тому і тільки у тому випадку, коли області* $D_k = D_k^0$*,* $k = 0, 1, ..., n, n+1$*, і точки* $a_k = a_k^0$*,* $k = 1, ..., n$*.*

Відмітимо, що вперше в цій роботі в теоремі 4.1 підрозділу 4.3 отримане суттєве підсилення класичної теореми 1.9.

Розглянемо тепер результат, який дає повну характеристику екстремальної конфігурації для функціоналу

$$J_{\alpha,\beta} = \frac{r^{\alpha}(B_1, a_1) \cdot r^{\beta}(B_2, a_2) \cdot r^{\alpha}(B_3, a_3) \cdot r^{\beta}(B_4, a_4)}{|a_1 - a_3|^{2\alpha} \cdot |a_2 - a_4|^{2\beta}}, \tag{1.7}$$

який є інваріантним відносно довільного конформного автоморфізму комплексного площини для чотирьох вільних полюсів a_k, $k = \overline{1, 4}$, що належать одиничному колу $|w| = 1$. Цей результат отриманий у 2001 році О. К. Бахтіним. Для цього результату потрібно поняття логарифмічної ємності множини — $\operatorname{cap} e$, яке можна взяти із роботи [32].

Теорема 1.10. ([4, 8, 9]). *Нехай* a_1, a_2, a_3, a_4 *довільні різні точки одиничного кола такі, що*

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < \arg a_4 < 2\pi.$$

Тоді для довільної системи багатозв'язних областей B_1, B_2, B_3, B_4 *такої, що*

$$B_k \bigcap B_m = \emptyset, \quad k \neq m, \ k, m = \overline{1, 4},$$

$$a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}, \quad k = \overline{1,4},$$

справедлива нерівність

$$\frac{r^{\alpha}(B_1, a_1) \cdot r^{\beta}(B_2, a_2) \cdot r^{\alpha}(B_3, a_3) \cdot r^{\beta}(B_4, a_4)}{|a_1 - a_3|^{2\alpha} \cdot |a_2 - a_4|^{2\beta}} \leq$$

$$\leq \frac{r^{\alpha}\left(B_1^0, a_1^0\right) \cdot r^{\beta}\left(B_2^0, a_2^0\right) \cdot r^{\alpha}\left(B_3^0, a_3^0\right) \cdot r^{\beta}\left(B_4^0, a_4^0\right)}{|a_1^0 - a_3^0|^{2\alpha} \cdot |a_2^0 - a_4^0|^{2\beta}}, \tag{1.8}$$

де $a_1^0 = 1$, $a_2^0 = i$, $a_3^0 = -1$, $a_4^0 = -i$, *а області* B_k^0, $k = \overline{1,4}$ *є круговими областями квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = \frac{(\beta - \alpha)\, w^4 - 2\,(\beta + \alpha)\, w^2 + (\beta - \alpha)}{\left(w^4 - 1\right)^2} dw^2. \tag{1.9}$$

Причому знак рівності в нерівності (1.8), з точністю до повороту комплексної площини навколо початку координат, досягається тоді і тільки тоді, коли $a_k = i^{k+3}$, $B_k = B_k^0 \setminus e_k$, *де* $\operatorname{cap} e_k = 0$, $a_k \overline{\in} e_k$, $k = \overline{1,4}$.

Слід відмітити, що результат теореми 1.10, з першого погляду, досить близький до результатів Г. В. Кузьміної [48 – 50] та Є. Г. Емельянова [37], але на самому ділі, він суттєво відрізняється від цих результатів тим, що функціонал (1.7) не є компактним на всій комплексній площині, а досягає компактності на одиничному колі за рахунок введеного порядку точок a_k, $k = \overline{1,4}$, тоді як у згаданих вище роботах [38], [49 – 51] розглядаються функціонали компактні на всій комплексній площині. (Тут ми поняття компактності функціоналу на множині M розуміємо наступним чином: екстремальні конфігурації функціоналу існують і є невиродженими, тобто жодна екстремальна область не стягується в точку, при умові, що полюси належать множині M).

Наступний результат отриманий для двох вільних полюсів, які належать двом багатозв'язним областям, що містяться в одиничному крузі.

Він безпосередньо слідує з теореми 1.7 та відповідного результату роботи [44] для однозв'язних областей.

Теорема 1.11. *Для довільних різних точок* a_1, a_2, *і довільних попарно неперетинних областей* D_k, $a_k \in D_k \subset \overline{U} := \{w : |w| \leq 1\}$, $k = 1, 2$, *справедлива нерівність*

$$\frac{r(D_1, a_1) \cdot r(D_2, a_2)}{|a_1 - a_2|^2} \leq \frac{r\left(D_1^0, a_1^0\right) \cdot r\left(D_2^0, a_2^0\right)}{|a_1^0 - a_2^0|^2},$$

де $a_k^0 = (-1)^{k+1} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)$, *а* B_k^0, $k = 1, 2$ *— кругові області квадратичного диференціалу*

$$Q(\zeta)d\zeta^2 = -\frac{\left(\zeta^2 + 1\right)^2}{\left(\zeta^2 - \left(\sqrt{2} - 1\right)^2\right)^2 \left(1 - \zeta^2 \left(\sqrt{2} - 1\right)^2\right)^2} d\zeta^2.$$

1.4. Метод кусочно-поділяючого перетворення

Метод кусочно-поділяючого перетворення є одним з основних методів дослідження, що використовуються у дисертаційній роботі. Він був розроблений В. Н. Дубиніним у роботах [28 – 32]. Ми у цій роботі будемо використовувати тільки часткові випадки цього досить загального методу. Перейдемо до описання цих випадків.

Розглянемо систему $n + 2$ різних точок розширеної комплексної площини $0, b_1, b_2, ..., b_n, \infty$ таких, що

$$0 = \arg b_1 < \arg b_2 < ... < \arg b_n < 2\pi.$$

Введемо позначення

$$b_{n+1} := b_1, \quad b_0 := b_n, \quad \sigma_k := \frac{1}{\pi}\left(\arg b_{k+1} - \arg b_k\right), \ k = \overline{1, n-1},$$

$$\sigma_n := \sigma_0 := \frac{1}{\pi}\left(2\pi - \arg b_n\right), \quad \sigma_{n+1} := \sigma_1.$$

Легко бачити, що $\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k = 2$. Нехай

$$M_k := \left\{z : \ \arg b_k < \arg z < \arg b_{k+1}\right\}, \quad k = 1, 2, ..., n,$$

$$M_0 := M_n, \ M_{n+1} := M_1.$$

Тоді сімейство функцій

$$\zeta_k\left(z\right) = -i\left(e^{-i\arg b_k} w\right)^{\frac{1}{\sigma_k}}, \quad k = 1, 2, ..., n, \qquad \zeta_0 := \zeta_n, \ \zeta_{n+1} := \zeta_1$$

конформно і однолисто відображає області M_k, $k = 1, 2, ..., n$ на праву півплощину $\operatorname{Re}\zeta > 0$ таким чином, що виконуються наступні асимптотичні рівності:

$$\left|\zeta_k\left(z\right) - \zeta_k\left(b_m\right)\right| \sim \frac{1}{\sigma_k}\left|b_m\right|^{\frac{1}{\sigma_k}-1}\left|z - b_m\right|, \quad z \in \overline{M_k}, \quad z \to b_m,$$

$$k = 1, 2, ..., n, \ m = k, k+1;$$

$$\left|\zeta_k\left(z\right)\right| = |z|^{\frac{1}{\sigma_k}}, \quad z \in \overline{M_k} \quad z \to 0, \ z \to \infty.$$

Нехай $\{D_k\}_{k=0}^{n+1}$ — сімейство таких областей, що

$$0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}, \quad b_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}, \ k = \overline{1, n}, \quad \infty \in D_{n+1} \subset \overline{\mathbb{C}}.$$

$$D_k \bigcap D_m = \varnothing, \qquad k \neq m, \ k, m = 0, 1, ..., n, n+1$$

Тоді позначимо через $G_k^{(1)}$, $k = \overline{1, n}$ об'єднання зв'язної компоненти множини $\zeta_k\left(D_k \bigcap M_k\right)$, яка містить точку $\zeta_k\left(b_k\right)$, $k = \overline{1, n}$ з її відображенням відносно уявної вісі, а через $G_{k-1}^{(2)}$, $k = \overline{1, n}$, $G_0^{(2)} := G_n^{(2)}$

об'єднання зв'язної компоненти множини $\zeta_{k-1}\left(D_k \bigcap M_{k-1}\right)$, яка містить точку $\zeta_{k-1}\left(b_k\right)$, $k=\overline{1,n}$ з її відображенням відносно уявної вісі. Сімейство двох симетричних відносно уявної вісі областей $\left\{G_k^{(1)}, G_{k-1}^{(2)}\right\}$ назвемо результатом поділяючого перетворення області D_k відносно сімейства двох функцій $\left\{\zeta_k, \zeta_{k-1}\right\}$, $k=\overline{1,n}$.

Аналогічно назвемо результатом поділяючого перетворення області D_0 відносно сімейства функцій $\left\{\zeta_k\right\}_{k=1}^n$, сімейство симетричних відносно уявної вісі областей $G_k^{(0)}$, $k=\overline{1,n}$, які отримані об'єднанням зв'язної компоненти множини $\zeta_k\left(D_0 \bigcap M_k\right)$, яка містить точку 0, $k=\overline{1,n}$ з її відображенням відносно уявної вісі; а результатом поділяючого перетворення області D_{n+1} відносно сімейства функцій $\left\{\zeta_k\right\}_{k=1}^n$, сімейство симетричних відносно уявної вісі областей $G_k^{(\infty)}$, $k=\overline{1,n}$, які отримані об'єднанням зв'язної компоненти множини $\zeta_k\left(D_{n+1} \bigcap M_k\right)$, яка містить точку ∞, $k=\overline{1,n}$ з її відображенням відносно уявної вісі.

Очевидно, що система областей $\left\{G_k^{(0)}, G_k^{(1)}, G_k^{(2)}, G_k^{(\infty)}\right\}$ є системою попарно неперетинних областей.

В цьому випадку, справедлива наступна теорема.

Теорема 1.12. *Мають місце наступні нерівності*

$$r\left(D_k, b_k\right) \leq \left[\frac{r\left(G_k^{(1)}, \zeta_k\left(b_k\right)\right)}{\frac{1}{\sigma_k}\cdot\left|b_k\right|^{\frac{1}{\sigma_k}-1}} \cdot \frac{r\left(G_{k-1}^{(2)}, \zeta_{k-1}\left(b_k\right)\right)}{\frac{1}{\sigma_{k-1}}\cdot\left|b_k\right|^{\frac{1}{\sigma_{k-1}}-1}}\right]^{\frac{1}{2}} \quad \forall k=1,2,...,n, \tag{1.10}$$

$$r\left(D_0, 0\right) \leq \prod_{k=1}^{n}\left[r\left(G_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{\sigma_k^2}{2}}, \tag{1.11}$$

$$r\left(D_{n+1}, \infty\right) \leq \prod_{k=1}^{n}\left[r\left(G_k^{(\infty)}, \infty\right)\right]^{\frac{\sigma_k^2}{2}}. \tag{1.12}$$

Причому, якщо для областей D_k, $k=\overline{0,n+1}$ *існують класичні функції Гріна, то в нерівностях (1.10) досягається знак рівності тоді і тільки тоді, коли області* D_k, $k=\overline{1,n}$ *відповідно симетричні відносно прямих* $z=\rho\cdot\exp\left\{i\cdot\frac{2\pi}{n}\left(k-1\right)\right\}$, $\rho>0$, $k=\overline{1,n}$; *а в нерівностях (1.11) і (1.12) відповідно тоді і тільки тоді, коли області* D_0 *і* D_{n+1} *симетричні відносно сімейства прямих* $z=\rho\cdot\exp\left\{i\cdot\frac{2\pi}{n}\left(k-1\right)\right\}$, $\rho>0$, $k=\overline{1,n}$.

В деяких випадках, замість півплощини $\mathrm{Re}\,\zeta>0$ ми будемо розглядати круг одиничного радіуса. Тому зараз розглянемо метод кусочно-поділяючого перетворення В. Н. Дубиніна для цього випадку.

В зв'язку з вищесказаним, розглянемо сімейство функцій

$$\xi_k\left(z\right),\ k=\overline{1,n},\quad \xi_0\left(z\right):=\xi_n\left(z\right),$$

яке конформно і однолисто відображає області M_k, $k=1,2,...,n$ на внутрішню частину одиничного круга $U:=\{\xi:|\xi|<1\}$ таким чином, що виконуються наступні асимптотичні рівності:

$$\left|\xi_k\left(z\right)-\xi_k\left(b_m\right)\right|\sim\beta_m\cdot\left|z-b_m\right|,\quad z\in\overline{M_k},\quad z\to b_m,$$

$$k=1,2,...,n,\ m=k,k+1;$$

$$\left|\xi_k\left(z\right)-\xi_k\left(0\right)\right|\sim\beta_0\cdot|z|^{\frac{1}{\sigma_k}},\quad z\in\overline{M_k},\quad z\to 0,$$

$$\left|\xi_k\left(z\right)-\xi_k\left(\infty\right)\right|\sim\beta_\infty\cdot|z|^{-\frac{1}{\sigma_k}},\quad z\in\overline{M_k},\quad z\to\infty,$$

де β_m, $k=\overline{1,n}$, β_0, β_∞ — деякі додатні числа і $\beta_{n+1}:=\beta_1$.

Нехай сімейство попарно неперетинних областей $\{D_k\}_{k=0}^{n+1}$ таке ж як і раніше.

Тоді позначимо через $G_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$ об'єднання зв'язної компоненти множини $\xi_k\left(D_k \bigcap M_k\right)$, яка містить точку $\xi_k\left(b_k\right)$, $k = \overline{1,n}$ з її інверсією відносно кола $|\xi| = 1$, а через $G_{k-1}^{(4)}$, $k = \overline{1,n}$, $G_0^{(4)} := G_n^{(4)}$ об'єднання зв'язної компоненти множини $\xi_{k-1}\left(D_k \bigcap M_{k-1}\right)$, яка містить точку $\xi_{k-1}\left(b_k\right)$, $k = \overline{1,n}$ з її інверсією відносно кола $|\xi| = 1$. Сімейство двох симетричних відносно кола $|\xi| = 1$ областей $\left\{G_k^{(2)}, G_{k-1}^{(4)}\right\}$ назвемо результатом поділяючого перетворення області D_k відносно сімейства двох функцій $\left\{\zeta_k, \zeta_{k-1}\right\}$, $k = \overline{1,n}$.

Аналогічно, назвемо результатом поділяючого перетворення області D_0 відносно сімейства функцій $\{\xi_k\}_{k=1}^n$, сімейство симетричних відносно кола $|\xi| = 1$ областей $G_k^{(1)}$, $k = \overline{1,n}$, які отримані об'єднанням зв'язної компоненти множини $\xi_k\left(D_0 \bigcap M_k\right)$, яка містить точку $\xi_k\left(0\right)$, $k = \overline{1,n}$ з її інверсією відносно одиничного кола $|\xi| = 1$; а результатом поділяючого перетворення області D_{n+1} відносно сімейства функцій $\{\xi_k\}_{k=1}^n$, сімейство симетричних відносно одиничного кола $|\xi| = 1$ областей $G_k^{(3)}$, $k = \overline{1,n}$, які отримані об'єднанням зв'язної компоненти множини $\xi_k\left(D_{n+1} \bigcap M_k\right)$, яка містить точку $\xi_k\left(\infty\right)$, $k = \overline{1,n}$ з її інверсією відносно кола $|\xi| = 1$.

Ясно, що система областей $\left\{G_k^{(1)}, G_k^{(2)}, G_k^{(3)}, G_k^{(4)}\right\}$ є системою попарно неперетинних областей. В цьому випадку є справедливим наступний результат.

Теорема 1.13. *Справедлива нерівність*

$$r\left(D_k, b_k\right) \leq \frac{\left[r\left(G_k^{(2)}, \xi_k\left(b_k\right)\right) \cdot r\left(G_{k-1}^{(4)}, \xi_{k-1}\left(b_k\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{\beta_k} \quad \forall k = 1, 2, ..., n, \tag{1.13}$$

$$r\left(D_0,0\right)\leq\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{r\left(G_k^{(1)},\xi_k\left(0\right)\right)}{\beta_0}\right]^{\frac{\sigma_k^2}{2}},\tag{1.14}$$

$$r\left(D_{n+1},\infty\right)\leq\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{r\left(G_k^{(3)},\xi_k\left(\infty\right)\right)}{\beta_\infty}\right]^{\frac{\sigma_k^2}{2}}.\tag{1.15}$$

Причому, якщо для областей D_k, $k=\overline{1,n}$ існують класичні функції Гріна, то в нерівностях (1.13) досягається знак рівності тоді і тільки тоді, коли області D_k, $k=\overline{1,n}$ відповідно симетричні відносно прямих $z=\rho\cdot\exp\left\{i\cdot\frac{2\pi}{n}\left(k-1\right)\right\}$, $\rho>0$, $k=\overline{1,n}$; а в нерівностях (1.14) і (1.15) відповідно тоді і тільки тоді, коли області D_0 і D_{n+1} симетричні відносно сімейства прямих $z=\rho\cdot\exp\left\{i\cdot\frac{2\pi}{n}\left(k-1\right)\right\}$, $\rho>0$, $k=\overline{1,n}$.

Висновки до розділу 1

Отже, у даному розділі наведено наступні результати.

1. Дві форми теореми Лаврентьєва, яка визначає повну екстремальну конфігурацію функціоналу, що дорівнює добутку внутрішніх радіусів двох взаємно неперетинних областей відносно точок, які належать комплексній площині.

2. Теорема Голузина, яка визначає повну екстремальну конфігурацію функціоналу, що дорівнює добутку внутрішніх радіусів трьох взаємно неперетинних областей відносно точок, які належать комплексній площині.

3. Теорема Бахтіної, яка визначає повну екстремальну конфігурацію функціоналу, що дорівнює добутку внутрішніх радіусів двох взаємно

неперетинних областей, які належать одиничному кругу, відносно двох точок.

4. Дві теореми, які характеризують локальну структуру траєкторій квадратичного диференціалу.

5. Теорема Дубиніна для фіксованих полюсів, що належать комплексній площині.

6. Теорема Дубиніна, яка визначає повну екстремальну конфігурацію функціоналу, що дорівнює добутку внутрішніх радіусів n взаємно неперетинних областей, відносно n точок, які належать одиничному колу.

7. Теорема Дубиніна, яка визначає повну екстремальну конфігурацію функціоналу, що залежать від добутку внутрішніх радіусів $n+2$ взаємно неперетинних областей, відносно n точок, які належать одиничному колу та точок 0 і ∞.

8. Теорема Бахтіна, яка визначає повну екстремальну конфігурацію інваріантного відносно довільного конформного автоморфізму комплексної площини функціоналу для чотирьох взаємно неперетинних областей, що містять чотири точки одиничного кола.

9. Теорему, яка визначає повну екстремальну конфігурацію інваріантного відносно довільного конформного автоморфізму комплексної площини функціоналу для двох взаємно неперетинних областей, що належать одиничному кругу і містять дві точки.

10. Описані частинні випадки методу кусочно-поділяючого перетворення В. Н. Дубиніна необхідні для дисертаційної роботи.

РОЗДІЛ 2

ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНОМІРНИХ СИСТЕМ ТОЧОК

Скоріше за все, вперше задачі з вільними полюсами на променях з'явилися в роботі [33]. В цьому розділі розглядаються ряд екстремальних задач на класі взаємно неперетинної системи областей з вільними полюсами, які розміщенні на рівномірний променевій системі. Також, розглядаються так звані комбіновані екстремальні задачі в яких деякі полюси є фіксованими, а деякі — вільними. Вперше подібні задачі зустрічаються у роботах [19 – 21].

2.1. Основні поняття розділу 2

Цей підрозділ присвячений вивченню екстремальних задач на рівномірних променевих системах точок. Вперше екстремальні задачі з вільними полюсами на одиничному колі з'явилися в роботах [19, 21]. За останні 20 років ця тематика привернула увагу багатьох фахівців геометричної теорії функцій: В. Н. Дубиніна [28 – 34], Є. Г. Ємельянова [35 – 37], Г. В. Кузьміної [42 – 50], а також, Л. В. Ковальова [38, 39] і інших. В працях вищевказаних авторів вільні полюси екстремальних задач знаходились на колах. В останній час О. К. Бахтін отримав ряд результатів (наприклад, в роботі [10]), які підсилюють деякі вищезгадані результати В. Н. Дубиніна, Є. Г. Ємельянова, в тому розумінні, що вільні полюси відповідних екстремальних задач є системами точок більш загального виду. В подальшому, такі системи точок отримали назву променевих. Вирішальну роль у цих дослідженнях зіграв метод поділяючого перетворення В. Н. Дубиніна, який він ввів у роботах [28 – 32]. Виявилося, що можна сформулювати досить цікаві задачі навіть у тому випадки, коли система точок має деяку властивість рівномірності. Основні результати цього підрозділу сформульовані в теоремах 2.1 та 2.2. Для того, щоб сформулювати ці результати введемо деякі означення.

Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — системи натуральних, дійсних та комплексних чисел відповідно. Розглянемо довільну область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ для якої існує функція Гріна [25, 66]. Приведемо поняття, яке буде одним із основних понять роботи — внутрішнього радіуса області B відносно фіксованої точки $a \in B$, яке взяте нами із робіт [28 – 32] і відрізняється від класичного означення (дивись, наприклад [66]). Позначимо функцію Гріна для області B з полюсом в точці a через $g_B(w,a)$. Тоді для скінченої точки $a \in B$ справедлива наступна асимптотична формула

$$g_B(w,a) = -\log|w-a| + \iota + o(1), \quad w \to a,$$

де ι — стала Робена області B. Якщо ж $a = \infty$, то справедлива така формула

$$g_B(w,\infty) = \log|w| + \iota + o(1), \quad w \to \infty.$$

Означення 2.1. ([28 – 32]). Величину $\exp \iota$ будемо називати внутрішнім радіусом області B відносно точки $a \in B$ і будемо позначати $r(B,a)$.

Відзначимо, що прийняте визначення величини $r(B,\infty)$ трохи відрізняється від традиційного (см. [66]), але є, на наш погляд, більш природним.

Означення 2.2. Пару (B, a) будемо називати областю B з відміченою точкою $a \in B$ чи, коротко, відміченою областю (B, a). Будемо вважати, що $(B_1, a_1) = (B_2, a_2)$ тоді і тільки тоді, коли $B_1 = B_2$ і $a_1 = a_2$.

Означення 2.3. Внутрішнім радіусом відміченої області (B, a) назвемо внутрішній радіус області B відносно точки a.

Розглянемо впорядкований набір відмічених областей $p := \{(B_k, a_k)\}_{k=1}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Кожному набору $p = \{(B_k, a_k)\}_{k=1}^{n}$ співставимо наступні впорядковані набори $A_n := A_n(p) := \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $F_n := F_n(p) := \{B_k\}_{k=1}^{n}$. Систему $A_n = A_n(p)$ назвемо системою полюсів p, а набір $F_n = F_n(p)$ — системою або набором областей p.

Для довільних $p^{(1)} = \left\{\left(B_k^{(1)}, a_k^{(1)}\right)\right\}_{k=1}^{n}$, $p^{(2)} = \left\{\left(B_k^{(2)}, a_k^{(2)}\right)\right\}_{k=1}^{n}$ поняття рівності визначимо наступним співвідношенням:

$$p^{(1)} = p^{(2)} \Longleftrightarrow \left(B_k^{(1)}, a_k^{(1)}\right) = \left(B_k^{(2)}, a_k^{(2)}\right) \qquad \forall k = \overline{1, n}.$$

Означення 2.4. Системою неперетинних областей або коротко с. н. о. будемо називати скінчений набір $F_n = \{B_k\}_{k=1}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ довільних (взагалі кажучи багатозв'язних) областей таких, що $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \bigcap B_m = \varnothing$ $\forall k \neq m$, $k, m = \overline{1, n}$.

Означення 2.5. Для кожного $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ множину всіх наборів точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{C}$ таких, що $\arg a_k = \frac{2\pi}{n}(k-1)$, $k = \overline{1, n}$ позначимо Λ_n^0. Такі системи точок будемо називати рівномірними променевими системами точок.

На наборі точок $A_n = \{b_k\}_{k=1}^n \in \Lambda_n^0$ визначимо функціонал

$$\mu = \mu(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{b_k}{b_{k+1}}\right|^{\frac{n}{4}}\right)|b_k|,$$

де $b_{n+1} := b_1$, $\chi(t) = \frac{1}{2}\left(t + t^{-1}\right)$.

Означення 2.6. При $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ та фіксованому $R > 0$ розглянемо множину $\Lambda_{2n}^{(1)}(R) \subset \Lambda_{2n}^0$ всіх наборів A_{2n}, які задовольняють умові

$$a_{2k} = R \cdot \exp\left\{i\frac{\pi}{n}(2k-1)\right\}, \qquad k = \overline{1, n}.$$

При $n = 2$ розглянемо, також множину наборів

$$\Lambda_2^* = \left\{A_2 = \{a_1, a_2\} : \{-ia_k\}_{k=1}^2 \in \Lambda_2^0\right\}.$$

Означення 2.7. Позначимо $\mathbf{P}_n^0$ множину всіх впорядкованих наборів відмічених областей $p = \{(B_k, a_k)\}_{k=0}^{n+1}$, які задовольняють умовам $F_{n+2}(p) = \{B_k\}_{k=0}^{n+1}$ є с. н. о. і $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \infty$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \Lambda_n^0$.

Означення 2.8. Позначимо через клас $\mathbf{P}_{2n}^{(1)}(R)$ підмножину множини $\mathbf{P}_{2k}^0$, $k \in \mathbb{N}$ всіх наборів $p = \{(B_k, a_k)\}_{k=0}^{2n+1}$, які задовольняють умовам $A_{2n} = \{a_k\}_{k=1}^{2n} \in \Lambda_n^{(1)}(R)$ і $B_{2k} \subset E_k := \left\{w : \frac{2\pi}{n}(k-1) < \arg w < \frac{2\pi}{n}k\right\}$, $k = \overline{1, n}$.

Означення 2.9. Позначимо також через $\mathbf{P}_{2n}^{(2)}(R)$ та $\mathbf{P}_{2n}^{(3)}(R)$ множини всіх наборів $p = \{(B_k, a_k)\}_{k=0}^{2n}$ і $p = \{(B_k, a_k)\}_{k=1}^{2n+1}$, відповідно, які задовольняють умовам: $F_{2n+1}(p) = \{B_k\}_{k=0}^{2n}$ і $F_{2n+1}(p) = \{B_k\}_{k=1}^{2n+1}$ є с. н. о., $a_0 = 0$, $a_{2n+1} = \infty$, $A_{2n} = \{a_k\}_{k=1}^{2n} \in \Lambda_n^{(1)}(R)$ і $B_{2k} \subset E_k =$
$= \left\{w : \frac{2\pi}{n}(k-1) < \arg w < \frac{2\pi}{n}k\right\}$, $k = \overline{1, n}$.

Означення 2.10. Нехай $\widehat{\mathbf{P}}_n^0$ позначає множину всіх впорядкованих наборів $p = \{(B_k, a_k)\}_{k=1}^n$ таких, що $F_n(p)$ є с. н. о. та $A_n(p) \in \Lambda_n^0$.

Означення 2.11. Позначимо через $\widehat{\mathbf{P}}_{2n}^{(1)}(R)$ множину всіх наборів $p =$
$= \{(B_k, a_k)\}_{k=1}^{2n}$ таких, що $F_{2n}(p) = \{B_k\}_{k=1}^{2n}$ є с. н. о., $A_{2n} = \{a_k\}_{k=1}^{2n} \in$
$\in \Lambda_n^{(1)}(R)$ і $B_{2k} \subset E_k = \left\{w : \frac{2\pi}{n}(k-1) < \arg w < \frac{2\pi}{n}k\right\}$, $k = \overline{1,n}$.

Означення 2.12. Нехай $\mathbf{P}_2^*$ позначає множину усіх наборів відмічених областей $\{(B_0, a_0), (B_1, a_1), (B_2, a_2), (B_3, a_3)\}$ таких, що $\{B_0, B_1, B_2, B_3\}$ — с. н. о. та $a_0 = 0$, $a_3 = \infty$, $\{a_1, a_2\} \in \Lambda_2^*$.

Введемо тепер поняття операції заповнення несуттєвих граничних компонент, яка введена в роботах [8, с. 8].

Нехай, як і раніше $p = \{(B_k, a_k)\}_{k=1}^{n} \in \mathbf{P}_n^0$, $F_n = \{B_k\}_{k=1}^{n}$, $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 1, 2, ..., n$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$. Будь-якій області B_k, $k = 1, 2, ..., n$ набору F_n нехай відповідає $\mathrm{T}(B_k) = \{\mathrm{t_k}\}_{\mathrm{k} \in \mathrm{K}}$ — сукупність усіх компонент зв'язності множини $\left(\overline{\mathbb{C}} \setminus B_k\right)$, де K — відповідна множина індексів. Позначимо через $\mathrm{T}^0(B_k) = \{\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2, ..., \mathrm{t}_\vartheta\} = \{\mathrm{t_k}\}_{\mathrm{k}=1}^{\vartheta}$, $\vartheta \in \mathbb{N}$, $\vartheta \leq (n-1)$ скінчений набір тих і тільки тих елементів сукупності $\mathrm{T}(B_k)$, для який виконані умови: $\mathrm{t_k} \bigcap A_n \neq \emptyset$, $k = 1, 2, ..., \vartheta$. Ясно, що при кожному $m \neq k$, $m = 1, 2, ..., n$ знайдеться таке k_0, $\mathrm{k}_0 = 1, 2, ..., \vartheta$, що $B_m \subset \mathrm{t}_{\mathrm{k}_0}$. Елементи сукупності $\mathrm{T}^0(B_k)$ назвемо суттєвими, щодо системи p, компонентами зв'язності $\left(\overline{\mathbb{C}} \backslash B_k\right)$. Всі інші компоненти з множини $\mathrm{T}(B_k) \backslash \mathrm{T}^0(B_k)$ будемо називати несуттєвими щодо системи p. Покладемо $\widetilde{B_k} = \overline{\mathbb{C}} \backslash \bigcup\limits_{k=1}^{\vartheta} \mathrm{t}_k$. Ясно, що $\widetilde{B_k}$ — область. Перехід від області B_k до області $\widetilde{B_k}$, $k = 1, 2, ..., n$ будемо називати операцією заповнення несуттєвих, щодо системи $p \in \mathbf{P}_n^0$, граничних компонент області B_k. Неважко показати, що система $\widetilde{F_n} =$
$= \left\{\widetilde{B_k}\right\}_{k=1}^{n}$ визначена однозначно, $\widetilde{B_k} \bigcap \widetilde{B_j} = \emptyset$, $k \neq j$, $k, j = 1, 2, ..., n$ і $a_k \in \widetilde{B_k}$, $k = 1, 2, ..., n$. Систему $\widetilde{p} = \left\{\left(\widetilde{B_k}, a_k\right)\right\}_{k=1}^{n} \in \mathbf{P}_n^0$ будемо нази-

вати результатом виконання операції заповнення несуттєвих граничних компонент системи $p = \{(B_k, a_k)\}_{k=1}^n \in \mathbf{P}_n^0$.

2.2. Оцінки функціоналів на класах $\mathbf{P}_2^*$,$\mathbf{P}_n^0$ та $\widehat{\mathbf{P}}_n^0$

Для довільного $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$ на класі $\mathbf{P}_n^0$ визначимо функціонал

$$J_n = J_n\left(p\right) = \left(r\left(B_0, 0\right) \cdot r\left(B_{n+1}, \infty\right)\right)^\alpha \cdot \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right), \tag{2.1}$$

де $r\left(B_k, a_k\right)$ — внутрішній радіус відміченої області (B_k, a_k), $k = \overline{1, n}$.

На класі $\widehat{\mathbf{P}}_n^0$ розглянемо функціонал

$$I_n = \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right). \tag{2.2}$$

Сформулюємо наступну задачу.

Задача 2.1. Для довільного фіксованого значення $\mu = \mu_0$, $0 < \mu_0 < \infty$ знайти максимум функціоналу (2.1) на класі $\mathbf{P}_n^0$ і визначити такі відмічені області $p \in \mathbf{P}_n^0$ на яких цей максимум досягається.

Вперше задачу 2.1 розглядав В. Н. Дубинін [30], при умові, що точки знаходяться на одиничному колі. В подальшому, велику увагу вивченню цієї задачі приділили Є. Г. Ємельянов і Г. В. Кузьміна. Починаючи з 2000 року ці автори отримали ряд узагальнень цієї задачі [37, 48 – 50]. Також, ця задача розглядалася в роботі О. К. Бахтіна [10], який запропонував нову її постановку, розмістивши точки на променевих системах.

Перед тим як приступити до розв'язування задачі 2.1 сформулюємо і доведемо наступну лему.

Лема 2.1. *При довільних $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$, $\tau_1 + \tau_2 > 0$ на класі $\mathbf{P}_2^*$ справедлива нерівність*

$$(r(B_0, 0)\, r(B_3, \infty))^{\tau_1} \cdot \left(\frac{r(B_1, a_1)\, r(B_2, a_2)}{|\, a_1 - a_2\,|^2}\right)^{\tau_2} \leq$$

$$\leq \left(r\left(B_0^0, 0\right) r\left(B_3^0, \infty\right)\right)^{\tau_1} \cdot \left(\frac{r\left(B_1^0, a_1^0\right) r\left(B_2^0, a_2^0\right)}{|\, a_1^0 - a_2^0\,|^2}\right)^{\tau_2}, \qquad (2.3)$$

де $p_0 := \left\{\left(B_0^0, 0\right), \left(B_1^0, a_1^0\right), \left(B_2^0, a_2^0\right), \left(B_3^0, \infty\right)\right\}$, $a_1^0 = i\frac{h}{2}$, $a_2^0 = -i\frac{h}{2}$, *а* B_s^0, $s = 0, 1, 2, 3$ — *система кругових областей квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\left[\frac{\tau_1}{2}\right] \cdot \frac{w^4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\tau_2}{\tau_1}\right) h^2 w^2 + \frac{h^4}{16}}{w^2\left(w^2 + \frac{h^2}{4}\right)^2} dw^2 \qquad \forall h > 0. \qquad (2.4)$$

Знак рівності в (2.3) реалізується тоді і тільки тоді, коли $\widetilde{p} = p_0$ і множина всіх несуттєвих граничних компонент системи p має логарифмічну ємність рівну нулю.

Доведення леми 2.1, а отже і нерівність 2.3, безпосередньо слідує з теореми 1.10 (див., також, теорему 1 [8, 9]) та інваріантості функціоналу $(r(B_0, 0)\, r(B_3, \infty))^{\tau_1} \cdot \left(\frac{r(B_1, a_1) r(B_2, a_2)}{|a_1 - a_2|^2}\right)^{\tau_2}$ відносно довільного дробово-лінійного перетворення комплексної площини на себе. Квадратичний диференціал (2.4) легко отримати з квадратичного диференціалу (1.9) заміною змінної. *Лема 2.1 доведена.*

Рішення задачі 2.1 дає теорема.

Теорема 2.1. *Для довільних $\alpha \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, μ_0, $0 < \mu_0 < \infty$ і всіх наборів $p \in \mathbf{P}_n^0$ з значенням $\mu = \mu_0$ справедлива нерівність*

$$J_n(p) \leq J_n(p_0), \qquad (2.5)$$

де $p_0 = \left\{\left(B_0^0, 0\right), \left(B_1^0, \sqrt[n]{\mu_0}\right), \ldots, \left(B_n^0, \sqrt[n]{\mu_0} e^{i\frac{2\pi}{n}(n-1)}\right), \left(B_{n+1}^0, \infty\right)\right\}$, *а* B_s^0,

$s=0,1,2,...,n,n+1$ — *система кругових областей квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2=-\frac{\alpha w^{2n}+\mu_0\left(n^2-2\alpha\right)w^n+\alpha\mu_0^2}{w^2\left(w^n-\mu_0\right)^2}dw^2. \tag{2.6}$$

Знак рівності в нерівності (2.5) досягається тоді і тільки тоді, коли $\widetilde{p}=p_0$, *і логарифмічна ємність множини всіх несуттєвих граничних компонент* p *рівна нулю.*

Доведення теореми 2.1. При доведенні теореми 2.1 використаємо метод кусочно-поділяючого перетворення, розробленого В. Н. Дубиніним (див. напр., [28 – 32]). Нехай $E_k=\{w:\frac{2\pi}{n}(k-1)<\arg w<\frac{2\pi}{n}k\}$, $k=1,2,...,n$. Функція

$$\pi_k=(-1)^k\cdot i\cdot w^{\frac{n}{2}} \tag{2.7}$$

однолисто і конформно відображає область E_k на праву півплощину $\forall k=1,2,...,n$.

З рівностей (2.7), легко бачити, що

$$|\pi_k(w)-\pi_k(a_m)|\sim\frac{n}{2}\left|a_m\right|^{\frac{n}{2}-1}|w-a_m|,\quad w\to a_m,$$

$$k=1,2,...,n-1,\quad m=k,k+1;$$

$$|\pi_n(w)-\pi_n(a_m)|\sim\frac{n}{2}\left|a_m\right|^{\frac{n}{2}-1}|w-a_m|,\quad w\to a_m,\quad m=1,n; \tag{2.8}$$

$$|\pi_k(w)|=|w|^{\frac{n}{2}},\qquad w\to 0,\ w\to\infty.$$

Позначимо:

$$\pi_k(a_k)=:\omega_k^{(1)},\quad \pi_k(a_{k+1})=:\omega_k^{(2)},\quad k=1,2,...,n-1; \tag{2.9}$$

$$\pi_n(a_n)=:\omega_n^{(1)};\quad \pi_n(a_1)=:\omega_n^{(2)};\quad B_{n+1}=:B_\infty. \tag{2.10}$$

Результати поділяючого перетворення [28 – 32] областей B_0 та B_∞ відносно сімейства функцій $\{\pi_k\}_{k=1}^n$ позначимо відповідно $\left\{G_k^{(0)}\right\}_{k=1}^n$ та $\left\{G_k^{(\infty)}\right\}_{k=1}^n$. Результат поділяючого перетворення області B_k, $k=2,3,...,n$, відносно сімейства функцій $\{\pi_{k-1},\pi_k\}$ позначимо $\left\{G_{k-1}^{(2)},G_k^{(1)}\right\}$. Для області B_1 результатом поділяючого перетворення відносно сімейства функцій $\{\pi_1,\pi_n\}$ буде пара областей $\left\{G_1^{(1)},G_n^{(2)}\right\}$. Таким чином, сукупність областей $\{E_k\}_{k=1}^n$ та довільна система $p\in\mathbf{P}_n^0$ породжує систему елементів $\nu_k:=\left\{\left(G_k^{(0)},0\right),\left(G_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right),\left(G_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right),\left(G_k^{(\infty)},\infty\right)\right\}\in\mathbf{P}_2^*$, $k=$ $=1,2,...,n$.

Систему $\nu_k\in\mathbf{P}_2^*$, $k=1,2,...,n$ назвемо результатом поділяючого перетворення елемента $p\in\mathbf{P}_n^0$ відносно системи кутів E_k. Побудований системі ν_k, $k=1,2,...,n$ відповідає система $\widetilde{\nu}_k\in\mathbf{P}_2^*$, де $\widetilde{\nu}_k$ — результат операції заповнення елемента ν_k.

З теореми 1.9 [32] (див. також [30], [31]) та співвідношень (2.8) – (2.10) отримаємо наступні нерівності:

$$
\begin{gathered}
r\left(B_0,0\right)\le\prod_{k=1}^{n}\left(r\left(G_k^{(0)},0\right)\right)^{\frac{2}{n^2}},\\
r\left(B_\infty,\infty\right)\le\prod_{k=1}^{n}\left(r\left(G_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\frac{2}{n^2}},\\
r(B_k,a_k)\le\left(\frac{r\left(G_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(G_{k-1}^{(2)},\omega_{k-1}^{(2)}\right)}{\frac{n^2}{4}\mid a_k\mid^{n-2}}\right)^{\frac{1}{2}},\ k=2,3,...,n,\\
r(B_1,a_1)\le\left(\frac{r\left(G_1^{(1)},\omega_1^{(1)}\right)\cdot r\left(G_n^{(2)},\omega_n^{(2)}\right)}{\frac{n^2}{4}\mid a_1\mid^{n-2}}\right)^{\frac{1}{2}},
\end{gathered}
\tag{2.11}
$$

випадки реалізації рівності в нерівностях (2.11) повністю розглянуто в теоремі 1.9 [32], та працях [30], [31].

Нерівності (2.11) дозволяють отримати оцінку функціоналу (2.1) на класі $\mathbf{P}_n^0$

$$J_n(p) = \left(r\left(B_0,0\right)\cdot r\left(B_{n+1},\infty\right)\right)^{\alpha}\cdot\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right)\leq$$

$$\leq\left(r\left(G_n^{(0)},0\right)\cdot r\left(G_n^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\frac{2\alpha}{n^2}}\cdot\left(\frac{r\left(G_n^{(1)},\omega_n^{(1)}\right)\cdot r\left(G_n^{(2)},\omega_n^{(2)}\right)}{\frac{n^2}{4}\left(\mid a_n\mid\cdot\mid a_1\mid\right)^{\frac{n-2}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n-1}\left\{\left(r\left(G_k^{(0)},0\right)\cdot r\left(G_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\frac{2\alpha}{n^2}}\cdot\left(\frac{r\left(G_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(G_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)}{\frac{n^2}{4}\left(\mid a_k\mid\cdot\mid a_{k+1}\mid\right)^{\frac{n-2}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{2.12}$$

$$\forall p\in\mathbf{P}_n^0.$$

Вираз (2.12) можна перетворити наступним чином

$$J_n(p)\leq\left(\frac{2}{n}\right)^{n}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{|a_k|^{\frac{n}{2}-1}}\times$$

$$\times\left(r\left(G_n^{(0)},0\right)\cdot r\left(G_n^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\frac{2\alpha}{n^2}}\cdot\left(r\left(G_n^{(1)},\omega_n^{(1)}\right)\cdot r\left(G_n^{(2)},\omega_n^{(2)}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n-1}\left\{\left(r\left(G_k^{(0)},0\right)\cdot r\left(G_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\frac{2\alpha}{n^2}}\cdot\left(r\left(G_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(G_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{2.13}$$

$$\forall p\in\mathbf{P}_n^0.$$

Помножимо та поділимо праву частину нерівності (2.13) на величину

$$\left(|a_1|^{\frac{n}{2}}+|a_n|^{\frac{n}{2}}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\left(|a_k|^{\frac{n}{2}}+|a_{k+1}|^{\frac{n}{2}}\right).$$

Отримаємо,

$$J_n\left(p\right) \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n \cdot \frac{|a_1|^{\frac{n}{2}}+|a_n|^{\frac{n}{2}}}{|a_n|^{\frac{n}{2}-1}} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{|a_k|^{\frac{n}{2}}+|a_{k+1}|^{\frac{n}{2}}}{|a_k|^{\frac{n}{2}-1}} \times$$

$$\times \left\{ \left[\frac{r\left(G_n^{(1)}, \omega_n^{(1)}\right) \cdot r\left(G_n^{(2)}, \omega_n^{(2)}\right)}{\left(\mid a_n \mid^{\frac{n}{2}} + \mid a_1 \mid^{\frac{n}{2}}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[r\left(G_n^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(G_n^{(\infty)}, \infty\right)\right]^{\frac{2\alpha}{n^2}} \right\} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n-1} \left\{ \left[\frac{r\left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{\left(\mid a_k \mid^{\frac{n}{2}} + \mid a_{k+1} \mid^{\frac{n}{2}}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[r\left(G_k^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(G_k^{(\infty)}, \infty\right)\right]^{\frac{2\alpha}{n^2}} \right\}. \quad (2.14)$$

Легко бачити, що

$$\frac{|a_n|^{\frac{n}{2}}+|a_1|^{\frac{n}{2}}}{|a_n|^{\frac{n}{2}-1}} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{|a_k|^{\frac{n}{2}}+|a_{k+1}|^{\frac{n}{2}}}{|a_k|^{\frac{n}{2}-1}} =$$

$$= 2\chi\left(\left|\frac{a_n}{a_1}\right|^{\frac{n}{4}}\right)|a_n| \cdot \prod_{k=1}^{n-1}\left[2\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{n}{4}}\right)|a_k|\right], \quad (2.15)$$

де $\chi\left(t\right) = \frac{1}{2}\left(t + t^{-1}\right)$.

Нерівність (2.14), враховуючи рівності (2.15), можна переписати наступним чином

$$J_n \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \left[\chi\left(\left|\frac{a_n}{a_1}\right|^{\frac{n}{4}}\right)|a_n| \cdot \prod_{k=1}^{n-1}\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{n}{4}}\right)|a_k|\right] \times$$

$$\times \left\{ \left[\frac{r\left(G_n^{(1)}, \omega_n^{(1)}\right) \cdot r\left(G_n^{(2)}, \omega_n^{(2)}\right)}{\left(\mid a_n \mid^{\frac{n}{2}} + \mid a_1 \mid^{\frac{n}{2}}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[r\left(G_n^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(G_n^{(\infty)}, \infty\right)\right]^{\frac{2\alpha}{n^2}} \right\} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n-1} \left\{ \left[\frac{r\left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{\left(\mid a_k \mid^{\frac{n}{2}} + \mid a_{k+1} \mid^{\frac{n}{2}}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[r\left(G_k^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(G_k^{(\infty)}, \infty\right)\right]^{\frac{2\alpha}{n^2}} \right\}. \quad (2.16)$$

З формул (2.9), (2.10) та функції (2.7) отримаємо вирази

$$\omega_k^{(1)} = (-1)^k i a_k^{\frac{n}{2}} = (-1)^k i \mid a_k \mid^{\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{n}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}(k-1)i\right) =$$

$$= (-1)^k i \mid a_k \mid^{\frac{n}{2}} \exp\left(i\pi (k-1)\right) = -i \mid a_k \mid^{\frac{n}{2}}, \ k = \overline{1,n}, \tag{2.17}$$

$$\omega_k^{(2)} = (-1)^k i a_{k+1}^{\frac{n}{2}} = (-1)^k i \mid a_{k+1} \mid^{\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{n}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} k i\right) =$$

$$= (-1)^k i \mid a_{k+1} \mid^{\frac{n}{2}} \exp\left(i\pi k\right) = i \mid a_{k+1} \mid^{\frac{n}{2}}, \ k = \overline{1,n-1}, \quad \omega_n^{(2)} = i \mid a_1 \mid^{\frac{n}{2}}. \tag{2.18}$$

Згідно формул (2.17), (2.18) мають місце рівності

$$\mid a_k \mid^{\frac{n}{2}} + \mid a_{k+1} \mid^{\frac{n}{2}} = \mid \omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)} \mid, \ k = \overline{1,n-1}, \tag{2.19}$$

$$\mid a_n \mid^{\frac{n}{2}} + \mid a_1 \mid^{\frac{n}{2}} = \mid \omega_n^{(1)} - \omega_n^{(2)} \mid.$$

Користуючись співвідношеннями (2.17) – (2.19), з нерівності (2.16), а також враховуючи умови теореми, легко отримати, що

$$\frac{1}{\mu} J_n = \frac{1}{\mu} J_n(p) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \left\{ \left(\frac{r\left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{\mid \omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)} \mid^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[r\left(G_k^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(G_k^{(\infty)}, \infty\right) \right]^{\frac{2\alpha}{n^2}} \right\}. \tag{2.20}$$

Якщо $\alpha = 0$ вираз (2.20) має вигляд

$$\frac{1}{\mu} I_n \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \prod_{k=1}^{n} \left\{ \left(\frac{r\left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{\mid \omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)} \mid^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \tag{2.21}$$

Для подальшої оцінки виразу (2.20) скористаємося лемою 2.1.

Враховуючи (2.20) та (2.3), отримаємо співвідношення

$$\frac{1}{\mu}J_n \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \left(r\left(G_k^{(0)}, 0\right) r\left(G_k^{(3)}, \infty\right) \right)^{\tau_1} \cdot \left(\frac{r\left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{\mid \omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)} \mid^2} \right)^{\tau_2} \leq$$

$$\leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \left[\left(r\left(D_0^0, 0\right) r\left(D_3^0, \infty\right) \right)^{\tau_1} \cdot \left(\frac{r\left(D_1^0, \omega_1^0\right) r\left(D_2^0, \omega_2^0\right)}{\mid \omega_1^0 - \omega_2^0 \mid^2} \right)^{\tau_2} \right]^n, \quad (2.22)$$

де $\nu_k := \left\{ \left(G_k^{(0)}, 0\right), \left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right), \left(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right), \left(G_k^{(3)}, \infty\right) \right\} \in \mathbf{P}_2^*$, $k = \overline{1, n}$, $\nu_0 := \left\{ \left(D_0^0, 0\right), \left(D_1^0, \omega_1^0\right), \left(D_2^0, \omega_2^0\right), \left(D_3^0, \infty\right) \right\} \in \mathbf{P}_2^*$, $\tau_1 = \frac{2\alpha}{n^2}$, $\tau_2 = \frac{1}{2}$, D_0^0, D_1^0, D_2^0, D_3^0 — кругові області, а ω_1^0, ω_2^0 — полюси квадратичного диференціалу (2.4).

Знак рівності в нерівності (2.22) можливий тільки тоді, коли виконується система рівностей:

$$1. \quad \left(r\left(G_k^{(0)}, 0\right) r\left(G_k^{(3)}, \infty\right) \right)^{\tau_1} \cdot \left(\frac{r\left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{\mid \omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)} \mid^2} \right)^{\tau_2} =$$

$$= \left(r\left(D_0^0, 0\right) r\left(D_3^0, \infty\right) \right)^{\tau_1} \cdot \left(\frac{r\left(D_1^0, \omega_1^0\right) r\left(D_2^0, \omega_2^0\right)}{\left|\omega_1^0 - \omega_2^0\right|^2} \right)^{\tau_2} \quad \forall k = 1, 2, ..., n. \quad (2.23)$$

2. *Реалізується знак рівності в усіх нерівностях системи (2.11).*

З пункту 1 системи (2.23), враховуючи (2.9), (2.10) і лему 2.1 безпосередньо отримаємо

$$\left|\omega_k^{(1)}\right| = \left|\omega_k^{(2)}\right| \quad \forall k = 1, 2, ..., n. \quad (2.24)$$

Враховуючи вирази (2.9), (2.10), (2.17), (2.18), систему (2.24) перетворимо до вигляду

$$|a_k|^{\frac{n}{2}} = |a_{k+1}|^{\frac{n}{2}} \quad \forall k = 1, 2, ..., n-1. \tag{2.25}$$

Співвідношення (2.25) можна звести до вигляду

$$|a_1| = |a_2| = ... = |a_n|\,. \tag{2.26}$$

Таким чином, з умови 1 системи (2.23) необхідно слідує рівність (2.26).

Тоді з формули (2.26) і визначення числа μ отримаємо, що

$$|a_k| = \sqrt[n]{\mu_0} \qquad \forall k = 1, 2, ..., n. \tag{2.27}$$

У відповідності з формулою (2.27), маємо

$$\widetilde{\nu}_k = \nu_0 \quad \forall k = 1, 2, ..., n. \tag{2.28}$$

Як слідує з теореми 1.9 праці [32] співвідношення (2.28) забезпечують виконання умов пункту 2 системи (2.23).

Здійснивши заміну локального параметру по формулі $\zeta = iw^{\frac{n}{2}}$ в квадратичному диференціалі (2.4) отримаємо квадратичний диференціал (2.6).

В результаті співставлень співвідношень (2.23) – (2.28) та леми 2.1, приходимо до висновку, що знак рівності в нерівності (2.22) досягається тоді і тільки тоді, коли $\widetilde{p} = p_0$, де $\widetilde{p}$ — результат заповнення елемента $p \in \mathbf{P}_n^0$, причому логарифмічна ємність множини всіх несуттєвих граничних компонент рівна нулю.

Враховуючи співвідношення (2.21) і використавши теорему Лаврентьєва М. А. [52], з доведення теореми 2.1 випливає її вірність при $\alpha = 0$. *Теорема 2.1 доведена.*

В задачі 2.1 ми розглядали тільки набори $A_n \in \Lambda_n^0$ для яких $\mu(A_n) = \mu_0$, де μ_0 деяке фіксоване додатне число, $0 < \mu_0 < \infty$.

Тепер набір $A_n \in \Lambda_n^0$ ми не будемо фіксувати, тобто нехай цей набір має певну "свободу". Розглядаємо екстремальну задачу.

Задача 2.2. Для різних наборів $A_n \in \Lambda_n^0$ знайти максимум функціоналу (2.1) і визначити всі екстремальні відмічені області $p \in \mathbf{P}_n^0$ при умові, що $\mu(A_n) \leq \mu_0$, де μ_0 деяке фіксоване додатне дійсне число.

В цьому випадку має місце наступний результат, який безпосередньо слідує з теореми 2.1.

Наслідок 2.1. *Для довільних $\alpha \geq 0$, μ_0, $0 < \mu_0 < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ і всіх наборів $p \in \mathbf{P}_n^0$ таких, що*

$$\mu(A_n) \leq \mu_0$$

справедлива нерівність

$$J_n(p) \leq J_n(p_0), \tag{2.29}$$

де $p_0 = \left\{ \left(B_0^0, 0\right), \left(B_1^0, \sqrt[n]{\mu_0}\right), ..., \left(B_n^0, \sqrt[n]{\mu_0} e^{\frac{2\pi}{n}(n-1)}\right), \left(B_{n+1}^0, \infty\right) \right\}$, *а* B_s^0, $s = 0, 1, 2, ..., n, n+1$ — *система кругових областей квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\alpha w^{2n} + \mu_0\left(n^2 - 2\alpha\right) w^n + \alpha\mu_0^2}{w^2\left(w^n - \mu_0\right)^2} dw^2.$$

Знак рівності в нерівності (2.29) досягається тоді і тільки тоді, коли $\widetilde{p} = p_0$, і логарифмічна ємність множини всіх несуттєвих граничних компонент p рівна нулю.

При $\alpha = 0$ з наслідку 2.1 слідує наступний результат, який дає оцінку зверху функціоналу 2.2.

Наслідок 2.2. *Для довільних* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, μ_0, $0 < \mu_0 < \infty$ *і всіх наборів* $p \in \widehat{\mathbf{P}}_n^0$ *таких, що*

$$\mu\left(A_n\right) \leq \mu_0$$

справедлива нерівність

$$I_n\left(p\right) \leq I_n\left(p_0\right), \tag{2.30}$$

де $p_0 = \left\{\left(B_1^0, \sqrt[n]{\mu_0}\right), ..., \left(B_n^0, \sqrt[n]{\mu_0} e^{\frac{2\pi}{n}(n-1)}\right)\right\}$, *а* B_s^0, $s = 1, 2, ..., n$ *– система кругових областей квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{\left(w^n - \mu_0\right)^2} dw^2.$$

Знак рівності в нерівності (2.30) досягається тоді і тільки тоді, коли $\widetilde{p} = p_0$ *і логарифмічна ємність множини всіх несуттєвих граничних компонент* p *рівна нулю.*

Наступний наслідок можна отримати з наслідку 2.1 підносячи нерівність (2.29) до деякого степеня $\beta \geq 0$ і вводячи позначення $\gamma := \alpha\beta$.

Наслідок 2.3. *Для довільних* $\gamma \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma + \beta > 0$, μ_0, $0 < \mu_0 < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ *і всіх наборів* $p \in \mathbf{P}_n^0$ *таких, що*

$$\mu\left(A_n\right) \leq \mu_0$$

справедлива нерівність

$$\left(r\left(B_0, 0\right) \cdot r\left(B_{n+1}, \infty\right)\right)^{\gamma} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)\right)^{\beta} \leq$$

$$\leq \left(r\left(B_0^0, 0\right) \cdot r\left(B_{n+1}^0, \infty\right)\right)^{\gamma} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^0, a_k^0\right)\right)^{\beta}, \tag{2.31}$$

де $p_0 = \left\{\left(B_0^0, 0\right), \left(B_1^0, \sqrt[n]{\mu_0}\right), ..., \left(B_n^0, \sqrt[n]{\mu_0}e^{\frac{2\pi}{n}(n-1)}\right), \left(B_{n+1}^0, \infty\right)\right\}$, *а* B_s^0, $s = 0, 1, 2, ..., n, n+1$ *— система кругових областей квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + \mu_0\left(\beta n^2 - 2\gamma\right)w^n + \gamma\mu_0^2}{w^2\left(w^n - \mu_0\right)^2}dw^2.$$

Знак рівності в нерівності (2.31) досягається тоді і тільки тоді, коли $\widetilde{p} = p_0$ *і логарифмічна ємність множини всіх несуттєвих граничних компонент* p *рівна нулю.*

Слід відмітити, що результати аналогічні наслідкам 2.2 та 2.3, які сформульовані для задачі 2.2, нескладно сформулювати і для задачі 2.1.

Зараз наведемо один результат для однолистих функцій, який є безпосереднім наслідком теореми 2.1.

Нехай $w = f_k(z)$, $k = \overline{0, n}$ — однолисті функції, які відображають одиничний круг $|z| < 1$ на попарно взаємно неперетинні однозв'язні області $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, відповідно, а функція $w = f_{n+1}(z)$ однолисто відображає зовнішність одиничного круга $\{z : |z| > 1\}$ на область $B_{n+1} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_{n+1} \bigcap B_k = \varnothing$, $k = \overline{0, n}$, таким чином, що $f_0(0) = 0 \in B_0$, $f_k(0) = a_k \in \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $f_{n+1}(\infty) = \infty \in B_{n+1}$, причому $\arg a_k = \frac{2\pi}{n}(k-1)$, $k = \overline{1, n}$. Тоді справедливий наступний результат, який є безпосереднім наслідком теореми 2.1.

Наслідок 2.4. *Для довільних* $\alpha \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, μ_0, $0 < \mu_0 < \infty$ *і всіх наборів* $p = \{(B_k, a_k)\}_{k=0}^{n+1} \in \mathbf{P}_n^0$ *із значенням* $\mu = \mu_0$ *та довільної системи однолистих функцій* $w = f_k(z)$, $k = \overline{0, n+1}$, *де функції* $w = f_k(z)$, $k = \overline{0, n}$ *відображають одиничний круг* $|z| < 1$ *на попарно взаємно неперетинні однозв'язні області* $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, *відповідно,* *а функція* $w = f_{n+1}(z)$ *однолисто відображає зовнішність одиничного круга* $\{z : |z| > 1\}$ *на область* $B_{n+1} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_{n+1} \bigcap B_k = \varnothing$, $k = \overline{0, n}$, *таким чином, що* $f_k(0) = a_k \in B_k$, $k = \overline{0, n}$, $f_{n+1}(\infty) = a_{n+1} = \infty \in B_{n+1}$, *функціонал*

$$\left| \frac{f_0'(0)}{f_{n+1}'(\infty)} \right|^{\alpha} \cdot \prod_{k=1}^{n} |f_k'(0)|$$

досягає свого максимуму на областях B_k^0 *та точках* a_k^0, $k = 0, 1, 2, ..., n$, $n+1$, *які є, відповідно, системами кругових областей та полюсів квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\alpha w^{2n} + \mu\left(n^2 - 2\alpha\right) w^n + \alpha\mu^2}{w^2 \left(w^n - \mu\right)^2} dw^2.$$

Слід звернути увагу на те, що можна аналогічно сформулювати ще ряд нових результатів на класі однолистих функцій, у вигляді наслідків інших результатів цього підрозділу.

2.3. Екстремальна задача на класі $\mathbf{P}_{2n}^{(1)}(R)$

Для довільних $\alpha, R \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$ на класі $\mathbf{P}_{2n}^{(1)}(R)$ визначимо функціонал

$$\Omega_n = \Omega_n(p) = \left(r(B_0, 0) \cdot r(B_{2n+1}, \infty)\right)^{\frac{n^2}{4}} \cdot \prod_{k=1}^{n} r^{\alpha}(B_{2k}, a_{2k}) \cdot r(B_{2k-1}, a_{2k-1}). \tag{2.32}$$

Дубинін В. Н. у своїй роботі [31] увів поняття задач змішаного типу в яких ряд полюсів мають деяку "свободу", а деякі полюси є фіксованими. Розглянемо екстремальну задачу, яка якраз відноситься до даного типу задач.

Задача 2.3. Знайти максимум функціоналу (2.32) на класі $\mathbf{P}_{2n}^{(1)}(R)$ при умові

$$\prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_{2k-1}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)\left|\frac{a_{2k-1}}{R}\right|\leq 1$$

і визначити всі екстремальні відмічені області $p\in\mathbf{P}_{2n}^{(1)}(R)$.

Рішення даної задачі дає теорема.

Теорема 2.2. *Для довільних $n\geq 3$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\left[0,\,\frac{1}{2}\right]$ і для всіх наборів $p\in\mathbf{P}_{2n}^{(1)}(R)$ таких, що*

$$\prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_{2k-1}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)\left|\frac{a_{2k-1}}{R}\right|\leq 1,$$

справедлива нерівність

$$\Omega_n(p)\leq\Omega_n(p_0)\,, \tag{2.33}$$

де $p_0=\{(D_k,d_k)\}_{k=0}^{2n+1}\in\mathbf{P}_{2n}^{(1)}(R)\,,$ D_k и d_k, $k=\overline{0,2n+1}$, відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціалу

$$Q(w)dw^2=$$
$$=-\frac{\left(\left(w^{\frac{n}{2}}-iR^{\frac{n}{2}}\right)^4h^4+\left(w^{\frac{n}{2}}+iR^{\frac{n}{2}}\right)^4\right)\left(\left(w^{\frac{n}{2}}-iR^{\frac{n}{2}}\right)^4+\left(w^{\frac{n}{2}}+iR^{\frac{n}{2}}\right)^4h^4\right)}{w^2\left(w^{2n}-R^{2n}\right)^2}dw^2, \tag{2.34}$$

а $h\in[0;\,1)$ — корінь рівняння $\chi^2\left(h^2\right)=\frac{4}{\alpha}$.

Доведення теореми 2.2. Доведення теореми 2.3.1, також спирається на метод кусочно-поділяючого перетворення ([28 – 32]).

Нехай, як і раніше функція $\pi_k(w)=(-1)^k\,iw^{\frac{n}{2}}$ конформно відображає область $E_k=\left\{w:\,\frac{2\pi}{n}(k-1)<\arg w<\frac{2\pi}{n}k\right\}$ на праву півплощину для всіх $k=\overline{1,n}$.

Функції

$$z_k(w)=\frac{\pi_k(a_{2k})-\pi_k(w)}{\pi_k(a_{2k})+\pi_k(w)},\ k=\overline{1,n},\quad z_0(w):=z_n(w)$$

конформно відображають праву півплощину на внутрішню частину одиничного круга. Сімейство функцій $z_k(w)$ здійснює поділяюче перетворення довільної системи $p\in\mathbf{P}_{2n}^{(1)}(R)$ відносно областей E_k, $z_k(a_{2k})=0$, $k=\overline{1,n}$.

Легко бачити, що

$$|z_k(w)-1|\sim 2\cdot R^{-\frac{n}{2}}\cdot|w|^{\frac{n}{2}},\ w\to 0,\ k=\overline{1,n},$$

$$|z_k(w)+1|\sim 2\cdot R^{\frac{n}{2}}\cdot|w|^{-\frac{n}{2}},\ w\to\infty,\ k=\overline{1,n},$$

$$|z_k(w)-z_k(a_m)|\sim n\cdot\frac{|a_m|^{\frac{n}{2}-1}R^{\frac{n}{2}}}{R^n+|a_m|^n}\cdot|w-a_m|,\ w\to a_m,\tag{2.35}$$

$$k=\overline{1,n-1},\quad m=2k-1,2k+1,$$

$$|z_n(w)-z_n(a_m)|\sim n\cdot\frac{|a_m|^{\frac{n}{2}-1}R^{\frac{n}{2}}}{R^n+|a_m|^n}\cdot|w-a_m|,\ w\to a_m,\ m=1,2n-1.$$

Результатом поділяючого перетворення областей B_{2k-1}, відносно сімейства функцій $\{z_{k-1}(w),z_k(w)\}$, $k=\overline{1,n}$ позначимо області $\left\{G_{k-1}^{(4)},G_k^{(2)}\right\}$, $k=\overline{1,n}$, де $G_0^{(4)}:=G_n^{(4)}$. Ясно, що $z_k(a_{2k-1})=:\lambda_k^{(2)}\in G_k^{(2)}$, $z_k(a_{2k+1})=$ $=:\lambda_k^{(4)}\in G_k^{(4)}$, $k=\overline{1,n-1}$, $z_n(a_{2n-1})=:\lambda_n^{(2)}\in G_n^{(2)}$, $z_n(a_1)=:\lambda_n^{(4)}\in G_n^{(4)}$.

З теореми 1.9 [32] і співвідношень (2.35) отримаємо нерівність

$$r(B_{2k-1},a_{2k-1})\leq\left[\frac{r\left(G_{k-1}^{(4)},\lambda_{k-1}^{(4)}\right)\cdot r\left(G_k^{(2)},\lambda_k^{(2)}\right)}{\frac{n\cdot|a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}-1}R^{\frac{n}{2}}}{R^n+|a_{2k-1}|^n}\cdot\frac{n\cdot|a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}-1}R^{\frac{n}{2}}}{R^n+|a_{2k-1}|^n}}\right]^{\frac{1}{2}},\quad k=\overline{1,n},\tag{2.36}$$

де $\lambda_0^{(4)}:=\lambda_n^{(4)}$.

Для області B_0 в результаті застосування поділяючого перетворення відносно сімейства $\{z_k(w)\}_{k=1}^{n}$ отримаємо набір областей $G_k^{(1)}$ таких, що $z = 1 \in G_k^{(1)}$, $k = \overline{1, n}$ для яких справедлива нерівність

$$r(B_0, 0) \leq \left[\left(\frac{R^{\frac{n}{2}}}{2}\right)^n \cdot \prod_{k=1}^{n} r\left(G_k^{(1)}, 1\right)\right]^{\frac{2}{n^2}}. \qquad (2.37)$$

Для області $B_{2n+1} =: B_\infty$ в результаті застосування поділяючого перетворення відносно сімейства $\{z_k(w)\}_{k=1}^{n}$ отримаємо набір областей $G_k^{(3)}$ таких, що $z = -1 \in G_k^{(3)}$, $k = \overline{1, n}$ для яких справедлива нерівність

$$r(B_\infty, \infty) \leq \left[\left(\frac{1}{2R^{\frac{n}{2}}}\right)^n \cdot \prod_{k=1}^{n} r\left(G_k^{(3)}, -1\right)\right]^{\frac{2}{n^2}}. \qquad (2.38)$$

Для областей B_{2k}, $k = 1, 2, ..., n$ в результаті застосування поділяючого перетворення відносно сімейства $\{z_k(w)\}_{k=1}^{n}$ отримаємо набір областей $G_k^{(0)}$, $G_k^{(\infty)}$ таких, що $z = 0 \in G_k^{(0)}$, $z = \infty \in G_k^{(\infty)}$, $k = \overline{1, n}$ для яких справедлива нерівність

$$r(B_{2k}, a_{2k}) = \frac{4R}{n} \cdot \left(r\left(G_k^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(G_k^{(\infty)}, \infty\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.39)$$

Таким чином, сукупність областей $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ і довільна система $p \in \in \mathbf{P}_{2n}^{(1)}(R)$ породжує систему елементів $e_k := \left\{\left(G_k^{(0)}, 0\right), \left(G_k^{(1)}, 1\right), \left(G_k^{(2)}, \lambda_k^{(2)}\right), \left(G_k^{(3)}, -1\right), \left(G_k^{(4)}, \lambda_k^{(4)}\right), \left(G_k^{(\infty)}, \infty\right)\right\}$, де система областей $F_6 = \left\{G_k^{(0)}, G_k^{(1)}, G_k^{(2)}, G_k^{(3)}, G_k^{(4)}, G_k^{(\infty)}\right\}$ є с. н. о., а $\lambda_k^{(2)} = e^{i\varphi_k}$, $\lambda_k^{(4)} = = e^{i(\pi + \psi_k)}$ $\forall \varphi_k, \psi_k \in (0, \pi)$, $k = \overline{1, n}$.

З нерівностей (2.36) – (2.39) отримаємо

$$\Omega_n = (r(B_0, 0) \cdot r(B_{2n+1}, \infty))^{\frac{n^2}{4}} \cdot \prod_{k=1}^{n} r^\alpha(B_{2k}, a_{2k}) \cdot r(B_{2k-1}, a_{2k-1}) \leq$$

$$\leq \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n} \cdot \prod_{k=1}^{n} r\left(G_{k}^{(1)},1\right) \cdot r\left(G_{k}^{(3)},-1\right) \cdot \frac{r\left(G_{k-1}^{(4)},\lambda_{k-1}^{(4)}\right)}{\frac{n\cdot|a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}-1}R^{\frac{n}{2}}}{R^{n}+|a_{2k-1}|^{n}}} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{r\left(G_{k}^{(2)},\lambda_{k}^{(2)}\right)}{\frac{n\cdot|a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}-1}R^{\frac{n}{2}}}{R^{n}+|a_{2k-1}|^{n}}} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{4R}{n} \cdot \left(r\left(G_{k}^{(0)},0\right) \cdot r\left(G_{k}^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\alpha}. \qquad (2.40)$$

Із нерівності (2.40) маємо наступне співвідношення

$$\Omega_{n}(p) \leq \frac{2^{n(2\alpha-1)} \cdot R^{n\alpha}}{n^{n(\alpha+1)}} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{R^{n}+|a_{2k-1}|^{n}}{R^{\frac{n}{2}} \cdot |a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}-1}} \times$$

$$\times \left[\prod_{k=1}^{n} r\left(G_{k}^{(1)},1\right) \cdot r\left(G_{k}^{(3)},-1\right) \cdot r\left(G_{k-1}^{(4)},\lambda_{k-1}^{(4)}\right) \cdot r\left(G_{k}^{(2)},\lambda_{k}^{(2)}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \left(\left(r\left(G_{k}^{(0)},0\right) \cdot r\left(G_{k}^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\alpha}, \quad p \in \mathbf{P}_{2n}^{(1)}(R). \qquad (2.41)$$

Легко бачити, що

$$\frac{R^{n}+|a_{2k-1}|^{n}}{R^{\frac{n}{2}} \cdot |a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}-1}} = 2\chi\left(\left| \frac{a_{2k-1}}{R} \right|^{\frac{n}{2}} \right) |a_{2k-1}|, \quad k = 1, 2, ..., n, \qquad (2.42)$$

де $\chi(t) = \frac{1}{2}\left(t + t^{-1}\right)$.

Користуючись рівностями (2.42) з (2.41) маємо

$$\Omega_{n} \leq \left(\frac{4^{\alpha} \cdot R^{\alpha}}{n^{\alpha+1}} \right)^{n} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left| \frac{a_{2k-1}}{R} \right|^{\frac{n}{2}} \right) |a_{2k-1}| \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(r\left(G_{k}^{(0)},0\right) \cdot r\left(G_{k}^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}} \times$$

$$\times \left[r\left(G_{k}^{(2)},\lambda_{k}^{(2)}\right) \cdot r\left(G_{k}^{(4)},\lambda_{k}^{(4)}\right) \cdot r\left(G_{k}^{(1)},1\right) \cdot r\left(G_{k}^{(3)},-1\right) \right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.43)$$

Враховуючи умови теореми 2.2 з (2.43) отримаємо

$$\Omega_{n}(p) \leq \left(\frac{4^{\alpha} \cdot R^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}} \right)^{n} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(r\left(G_{k}^{(0)},0\right) \cdot r\left(G_{k}^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}} \times$$

$$\times\left[r\left(G_k^{(2)},\lambda_k^{(2)}\right)\cdot r\left(G_k^{(4)},\lambda_k^{(4)}\right)\cdot r\left(G_k^{(1)},1\right)\cdot r\left(G_k^{(3)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\frac{4^{\alpha}\cdot R^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}}\right)^{n}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}J_4\left(e_k\right)\right)^{\frac{1}{2}},\quad p\in\mathbf{P}_{2n}^{(1)}\left(R\right),\qquad(2.44)$$

де функціонал J_4 визначений формулою (2.1).

Користуючись теоремою 6 роботи [31] з нерівності (2.44) отримаємо оцінку

$$\Omega_n\leq\left(\frac{4^{\alpha}\cdot R^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}}\right)^{n}\cdot\left(J_4\left(e^0\right)\right)^{\frac{n}{2}},$$

де $e^0=\left\{\left(B_0^0,0\right),\left(B_1^0,1\right),\left(B_2^0,\lambda_2^0\right),\left(B_3^0,-1\right),\left(B_4^0,\lambda_4^0\right),\left(B_\infty^0,\infty\right)\right\}$, а с. н. о. $\left\{\left\{B_k^0\right\}_{k=0}^4,B_\infty^0\right\}$ та точки λ_2^0, λ_4^0 відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціалу

$$Q(w)dw^2=-\frac{\left(w^4+h^4\right)\left(w^4+\frac{1}{h^4}\right)}{w^2\left(w^4-1\right)^2}dw^2,\qquad(2.45)$$

а $h\in[0;\,1)$ — корінь рівняння $\chi^2\left(h^2\right)=\frac{4}{\alpha}$.

Користуючись властивостями поділяючого перетворення для значень функціоналу $\Omega_n(p)$, $p\in\mathbf{P}_{2n}^{(1)}\left(R\right)$ отримаємо нерівність (2.33). Квадратичний диференціал (2.34) за допомогою заміни змінної, отримаємо з квадратичного диференціалу (2.45). *Теорема 2.2 доведена.*

Як і в випадку теореми 2.1, для теореми 2.2 сформулюємо очевидний наслідок, який буде новим результатом на класі однолистих функцій.

Наслідок 2.5. *Для довільних $n\geq 3$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\left[0,\,\frac{1}{2}\right]$ і для всіх наборів $p=\{(B_k,a_k)\}_{k=0}^{2n+1}\in\mathbf{P}_{2n}^{(1)}\left(R\right)$ таких, що*

$$\prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_{2k-1}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)\left|\frac{a_{2k-1}}{R}\right|\leq 1,$$

та довільної системи однолистих функцій $w=f_k\left(z\right)$, $k=\overline{0,2n+1}$, де функції $w=f_k\left(z\right)$, $k=\overline{0,2n}$ відображають одиничний круг $|z|<$

< 1 *на попарно взаємно неперетинні однозв'язні області* $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, 2n}$, *відповідно, а функція* $w = f_{2n+1}(z)$ *однолисто відображає зовнішність одиничного круга* $\{z : |z| > 1\}$ *на область* $B_{2n+1} \subset \overline{\mathbb{C}}$,
$B_{2n+1} \bigcap B_k = \varnothing$, $k = \overline{0, 2n}$, *таким чином, що* $f_k(0) = a_k \in B_k$, $k = \overline{0, 2n}$, $f_{2n+1}(\infty) = a_{2n+1} = \infty \in B_{2n+1}$, *функціонал*

$$\left|\frac{f_0'(0)}{f_{2n+1}'(\infty)}\right|^{\frac{n^2}{4}} \cdot \prod_{k=1}^{n} |f_{2k}'(0)|^{\alpha} \cdot |f_{2k-1}'(0)|$$

досягає свого максимуму на областях B_k^0 *та точках* a_k^0, $k = 0, 1, 2, ..., 2n$, $2n+1$, *які є, відповідно, системами кругових областей та полюсів квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 =$$

$$= -\frac{\left(\left(w^{\frac{n}{2}} - iR^{\frac{n}{2}}\right)^4 h^4 + \left(w^{\frac{n}{2}} + iR^{\frac{n}{2}}\right)^4\right)\left(\left(w^{\frac{n}{2}} - iR^{\frac{n}{2}}\right)^4 + \left(w^{\frac{n}{2}} + iR^{\frac{n}{2}}\right)^4 h^4\right)}{w^2\left(w^{2n} - R^{2n}\right)^2} dw^2,$$

а $h \in [0;\, 1)$ *— корінь рівняння* $\chi^2\left(h^2\right) = \frac{4}{\alpha}$.

Звернемо увагу на те, що для всіх інших результатів роботи також можна сформулювати наслідки, які будуть новими результатами на класі однолистих функцій. Але, в більшості випадків, ми цього робити не будемо.

2.4. Екстремальні задачі на класах $\mathbf{P}_{2n}^{(2)}(R)$, $\mathbf{P}_{2n}^{(3)}(R)$

Задачі цього параграфу є аналогічними задачі попереднього параграфу.

Для довільних $\alpha, R \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$ на класі $\mathbf{P}_{2n}^{(2)}(R)$ визначимо функціонал

$$\mathbf{\Xi}_n = \mathbf{\Xi}_n(p) = r^{\frac{n^2}{4}}(B_0, 0) \cdot \prod_{k=1}^{n} r^{\alpha}(B_{2k}, a_{2k}) \cdot r(B_{2k-1}, a_{2k-1}). \qquad (2.46)$$

Для довільних $\alpha, R \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$ на класі $\mathbf{P}_{2n}^{(3)}(R)$ визначимо функціонал

$$\mathbf{\Theta}_n = \mathbf{\Theta}_n(p) = r^{\frac{n^2}{4}}(B_{n+1}, \infty) \cdot \prod_{k=1}^{n} r^{\alpha}(B_{2k}, a_{2k}) \cdot r(B_{2k-1}, a_{2k-1}). \qquad (2.47)$$

Задача 2.4. Знайти максимум функціоналу (2.46) на класі $\mathbf{P}_{2n}^{(2)}(R)$ при умові

$$\prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_{2k-1}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)\left|\frac{a_{2k-1}}{R}\right| \leq 3 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n}$$

і визначити всі екстремальні відмічені області $p \in \mathbf{P}_{2n}^{(2)}(R)$.

Задача 2.5. Знайти максимум функціоналу (2.47) на класі $\mathbf{P}_{2n}^{(3)}(R)$ при умові

$$\prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_{2k-1}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)\left|\frac{a_{2k-1}}{R}\right| \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n}$$

і визначити всі екстремальні відмічені області $p \in \mathbf{P}_{2n}^{(3)}(R)$.

Рішення задачі 2.4 дає наступна теорема.

Теорема 2.3. *Для довільних $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ і для всіх наборів $p \in \mathbf{P}_{2n}^{(2)}(R)$ таких, що*

$$\prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_{2k-1}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)\left|\frac{a_{2k-1}}{R}\right| \leq 3 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n},$$

справедлива нерівність

$$\mathbf{\Xi}_n(p) \leq \mathbf{\Xi}_n(p_0), \qquad (2.48)$$

де $p_0 = \{(D_k, d_k)\}_{k=0}^{2n} \in \mathbf{P}_{2n}^{(2)}(R)$, D_k и d_k, $k = \overline{0, 2n}$, відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціалу

$$Q(w)dw^2 =$$

$$= \frac{\left(\left(w^{\frac{n}{2}}+iR^{\frac{n}{2}}\right)^3 h^3-\left(w^{\frac{n}{2}}-iR^{\frac{n}{2}}\right)^3\right)\left(\left(w^{\frac{n}{2}}+iR^{\frac{n}{2}}\right)^3-\left(w^{\frac{n}{2}}-iR^{\frac{n}{2}}\right)^3 h^3\right)}{w^2\left(w^n+R^n\right)^2\left(w^n-3R^n\right)^2}dw^2, \tag{2.49}$$

а $h \in [0;1)$ *— корінь рівняння* $h^3+\frac{1}{h^3}=\frac{9}{\alpha}-2$.

Доведення теореми 2.3. Доведення теореми 2.3 проводиться таким же методом, що й вище наведені теореми.

Результатом поділяючого перетворення областей B_{2k-1}, відносно сімейства функцій $\{z_{k-1}(w), z_k(w)\}$, $k=\overline{1,n}$, де функції z_k введено при доведенні теореми 2.2, будемо вважати області $\left\{G_{k-1}^{(3)}, G_k^{(2)}\right\}$, $k=\overline{1,n}$, де $G_0^{(3)} := G_n^{(3)}$. Ясно, що $z_k(a_{2k-1}) =: \lambda_k^{(2)} \in G_k^{(2)}$, $z_k(a_{2k+1}) =: \lambda_k^{(3)} \in G_k^{(3)}$, $k=\overline{1,n-1}$, $z_n(a_{2n-1}) =: \lambda_n^{(2)} \in G_n^{(2)}$, $z_n(a_1) =: \lambda_n^{(3)} \in G_n^{(3)}$.

Скориставшись співвідношеннями (2.35) отримаємо наступну нерівність

$$r\left(B_{2k-1}, a_{2k-1}\right) \leq \left[\frac{r\left(G_{k-1}^{(3)}, \lambda_{k-1}^{(3)}\right)\cdot r\left(G_k^{(2)}, \lambda_k^{(2)}\right)}{\frac{n\cdot|a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}-1}R^{\frac{n}{2}}}{R^n+|a_{2k-1}|^n}\cdot\frac{n\cdot|a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}-1}R^{\frac{n}{2}}}{R^n+|a_{2k-1}|^n}}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad k=\overline{1,n}, \tag{2.50}$$

де $\lambda_0^{(3)} := \lambda_n^{(3)}$.

Результати поділяючого перетворення областей B_0 та B_{2k}, $k=\overline{1,n}$ будемо позначати так як і при доведенні теореми 2.2.

Скориставшись співвідношеннями (2.37), (2.39), (2.50) отримаємо наступну оцінку функціоналу (2.46) на класі $\mathbf{P}_{2n}^{(2)}(R)$.

$$\Xi_n = r^{\frac{n^2}{4}}(B_0,0)\cdot\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha}(B_{2k},a_{2k})\cdot r(B_{2k-1},a_{2k-1}) \leq$$

$$\leq \left[\left(\frac{R^{\frac{n}{2}}}{2}\right)^n\cdot\prod_{k=1}^{n} r\left(G_k^{(1)},1\right)\cdot\frac{r\left(G_{k-1}^{(3)}, \lambda_{k-1}^{(3)}\right)\cdot r\left(G_k^{(2)}, \lambda_k^{(2)}\right)}{\frac{n\cdot|a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}-1}R^{\frac{n}{2}}}{R^n+|a_{2k-1}|^n}\cdot\frac{n\cdot|a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}-1}R^{\frac{n}{2}}}{R^n+|a_{2k-1}|^n}}\right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{4R}{n} \cdot \left(r\left(G_k^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(G_k^{(\infty)}, \infty\right)\right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\alpha}. \tag{2.51}$$

Із нерівності (2.51) маємо наступне співвідношення

$$\Xi_n(p) \leq \frac{2^{n\left(2\alpha-\frac{1}{2}\right)} \cdot R^{n\left(\alpha+\frac{n}{4}\right)}}{n^{n(\alpha+1)}} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{R^n + |a_{2k-1}|^n}{R^{\frac{n}{2}} \cdot |a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}-1}} \times$$

$$\times \left[\prod_{k=1}^{n} r\left(G_k^{(1)}, 1\right) \cdot r\left(G_{k-1}^{(3)}, \lambda_{k-1}^{(3)}\right) \cdot r\left(G_k^{(2)}, \lambda_k^{(2)}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \left(\left(r\left(G_k^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(G_k^{(\infty)}, \infty\right)\right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\alpha}, \quad p \in \mathbf{P}_{2n}^{(2)}(R). \tag{2.52}$$

Користуючись рівностями (2.42) з (2.52) маємо

$$\Xi_n \leq \left(\frac{2^{2\alpha+\frac{1}{2}} \cdot R^{\alpha+\frac{n}{4}}}{n^{\alpha+1}} \right)^n \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left| \frac{a_{2k-1}}{R} \right|^{\frac{n}{2}} \right) |a_{2k-1}| \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(r\left(G_k^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(G_k^{(\infty)}, \infty\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}} \times$$

$$\times \left[r\left(G_k^{(2)}, \lambda_k^{(2)}\right) \cdot r\left(G_k^{(3)}, \lambda_k^{(3)}\right) \cdot r\left(G_k^{(1)}, 1\right) \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.53}$$

Враховуючи умови теореми 2.3 з (2.53) отримаємо

$$\Xi_n(p) \leq 3 \cdot \left(\frac{2^{2\alpha+\frac{3}{2}} \cdot R^{\alpha+\frac{n}{4}+1}}{\sqrt{3} \cdot n^{\alpha+1}} \right)^n \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(r\left(G_k^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(G_k^{(\infty)}, \infty\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}} \times$$

$$\times \left[r\left(G_k^{(2)}, \lambda_k^{(2)}\right) \cdot r\left(G_k^{(3)}, \lambda_k^{(3)}\right) \cdot r\left(G_k^{(1)}, 1\right) \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{2^{2\alpha+\frac{3}{2}} \cdot R^{\alpha+\frac{n}{4}+1}}{\sqrt{3} \cdot n^{\alpha+1}} \right)^n \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} J_3(e_k) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad p \in \mathbf{P}_{2n}^{(2)}(R), \tag{2.54}$$

де функціонал J_3 визначений формулою (2.1), $e_k := \left\{ \left(G_k^{(0)}, 0\right), \left(G_k^{(1)}, 1\right), \left(G_k^{(2)}, \lambda_k^{(2)}\right), \left(G_k^{(3)}, \lambda_k^{(3)}\right), \left(G_k^{(\infty)}, \infty\right) \right\}$, система областей $F_5 = \left\{ G_k^{(0)}, G_k^{(1)}, \right.$

$\left.G_k^{(2)}, G_k^{(3)}, G_k^{(\infty)}\right\}$ є с. н. о., а $\lambda_k^{(2)} = e^{i\varphi_k}$, $\lambda_k^{(3)} = e^{i(\pi+\psi_k)}$ $\forall\varphi_k, \psi_k \in (0, \pi)$, $k = \overline{1, n}$.

Користуючись теоремою 6 роботи [31] з нерівності (2.54) отримаємо оцінку

$$\Xi_n \leq 3 \cdot \left(\frac{2^{2\alpha+\frac{3}{2}} \cdot R^{\alpha+\frac{n}{4}+1}}{\sqrt{3} \cdot n^{\alpha+1}} \right)^n \cdot \left(J_3\left(e^0\right)\right)^{\frac{n}{2}},$$

де $e^0 = \left\{\left(B_0^0, 0\right), \left(B_1^0, 1\right), \left(B_2^0, \lambda_2^0\right), \left(B_3^0, \lambda_3^0\right), \left(B_\infty^0, \infty\right)\right\}$, а с.н.о. $\left\{\left\{B_k^0\right\}_{k=0}^3, B_\infty^0\right\}$ та точки λ_2^0, λ_3^0 є відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціалу

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\left(w^3 + h^3\right)\left(w^3 + \frac{1}{h^3}\right)}{w^2\left(w^3 - 1\right)^2} dw^2, \tag{2.55}$$

$h \in [0; 1)$ — корінь рівняння $h^3 + \frac{1}{h^3} = \frac{9}{\alpha} - 2$.

Користуючись властивостями поділяючого перетворення для значень функціоналу $\Xi_n(p)$, $p \in \mathbf{P}_{2n}^{(2)}(R)$ отримаємо нерівність (2.48). Квадратичний диференціал (2.49) за допомогою заміни змінної, отримаємо з квадратичного диференціалу (2.55). *Теорема 2.3 доведена.*

Тепер розв'яжемо задачу 2.5. В цьому випадку справедлива така теорема.

Теорема 2.4. *Для довільних $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ і для всіх наборів $p \in \mathbf{P}_{2n}^{(3)}(R)$ таких, що*

$$\prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_{2k-1}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)\left|\frac{a_{2k-1}}{R}\right| \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n,$$

справедлива нерівність

$$\mathbf{\Theta}_n(p) \leq \mathbf{\Theta}_n(p_0),$$

де $p_0 = \{(D_k, d_k)\}_{k=1}^{2n+1} \in \mathbf{P}_{2n}^{(3)}(R)$, D_k *и* d_k, $k = \overline{1, 2n+1}$, *відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -w^{n-2}\times$$

$$\times\frac{\left(\left(w^{\frac{n}{2}}+iR^{\frac{n}{2}}\right)^3 h^3+\left(w^{\frac{n}{2}}-iR^{\frac{n}{2}}\right)^3\right)\left(\left(w^{\frac{n}{2}}+iR^{\frac{n}{2}}\right)^3+\left(w^{\frac{n}{2}}-iR^{\frac{n}{2}}\right)^3 h^3\right)}{\left(w^n+R^n\right)^2\left(w^n-\frac{R^n}{3}\right)^2}dw^2,$$

а $h \in [0;\,1)$ — *корінь рівняння* $h^3 + \frac{1}{h^3} = \frac{9}{\alpha} - 2$.

Доведення теореми 2.4 проводиться повністю аналогічно доведенню теореми 2.3.

2.5. Екстремальна задача на класі $\widehat{\mathbf{P}}_{2n}^{(1)}(R)$

В цьому параграфі розглядається задача, яка є логічним продовженням задач попередніх двох параграфів.

Для довільних $\alpha, R \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$ на класі $\widehat{\mathbf{P}}_{2n}^{(1)}(R)$ визначимо функціонал

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{S}_n(p) = \prod_{k=1}^{n} r^{\alpha}\left(B_{2k}, a_{2k}\right) \cdot r\left(B_{2k-1}, a_{2k-1}\right). \tag{2.56}$$

Задача 2.6. Знайти максимум функціоналу (2.56) на класі $\widehat{\mathbf{P}}_{2n}^{(1)}(R)$ при умові

$$\prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_{2k-1}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)\left|\frac{a_{2k-1}}{R}\right| \leq 1$$

і визначити всі екстремальні відмічені області $p \in \widehat{\mathbf{P}}_{2n}^{(1)}(R)$.

Теорема, яка дає розв'язок задачі 2.6 є подібною до наслідку 2.2, а також аналогічного результату роботи [50, теорема 1].

Розв'язок задачі 2.6 дає наступна теорема.

Теорема 2.5. *Для довільних* $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ *і для всіх наборів* $p \in \widehat{\mathbf{P}}_{2n}^{(1)}(R)$ *таких, що*

$$\prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_{2k-1}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)\left|\frac{a_{2k-1}}{R}\right| \leq 1,$$

справедлива нерівність

$$\mathbf{S}_n(p) \leq \mathbf{S}_n(p_0), \tag{2.57}$$

де $p_0 = \{(D_k, d_k)\}_{k=0}^{2n} \in \widehat{\mathbf{P}}_{2n}^{(1)}(R)$, D_k *и* d_k, $k = \overline{0, 2n}$, *відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = w^{n-2}\times$$

$$\times\frac{\left(\left(w^{\frac{n}{2}} - iR^{\frac{n}{2}}\right)^2 h^2 - \left(w^{\frac{n}{2}} + iR^{\frac{n}{2}}\right)^2\right)\left(\left(w^{\frac{n}{2}} - iR^{\frac{n}{2}}\right)^2 - \left(w^{\frac{n}{2}} + iR^{\frac{n}{2}}\right)^2 h^2\right)}{\left(w^{2n} - R^{2n}\right)^2}dw^2, \tag{2.58}$$

а $h \in [0; 1)$ *— корінь рівняння* $h^2 + \frac{1}{h^2} = \frac{4}{\alpha} - 2$.

Доведення теореми 2.5. Доведенні цієї теореми проводиться, в основному, аналогічно доведенню попередніх теорем.

Результатом поділяючого перетворення областей B_{2k-1}, відносно сімейства функцій $\{z_{k-1}(w), z_k(w)\}$, $k = \overline{1, n}$, де функції z_k введено при доведенні теореми 2.2, будемо вважати області $\left\{G_{k-1}^{(2)}, G_k^{(1)}\right\}$, $k = \overline{1, n}$, де $G_0^{(2)} := G_n^{(2)}$. Ясно, що $z_k(a_{2k-1}) =: \lambda_k^{(1)} \in G_k^{(1)}$, $z_k(a_{2k+1}) =: \lambda_k^{(2)} \in G_k^{(2)}$, $k = \overline{1, n-1}$, $z_n(a_{2n-1}) =: \lambda_n^{(1)} \in G_n^{(1)}$, $z_n(a_1) =: \lambda_n^{(2)} \in G_n^{(2)}$.

Скориставшись співвідношеннями (2.35) отримаємо нерівність

$$r(B_{2k-1}, a_{2k-1}) \leq \left[\frac{r\left(G_{k-1}^{(2)}, \lambda_{k-1}^{(2)}\right) \cdot r\left(G_k^{(1)}, \lambda_k^{(1)}\right)}{\frac{n\cdot|a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}-1}R^{\frac{n}{2}}}{R^n+|a_{2k-1}|^n} \cdot \frac{n\cdot|a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}-1}R^{\frac{n}{2}}}{R^n+|a_{2k-1}|^n}}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = \overline{1, n}, \tag{2.59}$$

де $\lambda_2^{(0)} := \lambda_2^{(n)}$.

Результат поділяючого перетворення для областей B_{2k}, $k=\overline{1,n}$ будемо позначати так як і при доведенні теореми 2.2.

Скориставшись співвідношеннями (2.39) та (2.59) отримаємо наступну оцінку функціоналу (2.56) на класі $\widehat{\mathbf{P}}_{2n}^{(1)}(R)$.

$$\mathbf{S}_n = \prod_{k=1}^{n} r^{\alpha}\left(B_{2k}, a_{2k}\right) \cdot r\left(B_{2k-1}, a_{2k-1}\right) \leq \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{r\left(G_{k-1}^{(2)}, \lambda_{k-1}^{(2)}\right)}{\frac{n\cdot|a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}-1}R^{\frac{n}{2}}}{R^n+|a_{2k-1}|^n}} \times\right.$$

$$\left.\times \frac{r\left(G_{k}^{(1)}, \lambda_{k}^{(1)}\right)}{\frac{n\cdot|a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}-1}R^{\frac{n}{2}}}{R^n+|a_{2k-1}|^n}}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{4R}{n}\cdot\left(r\left(G_k^{(0)},0\right)\cdot r\left(G_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\alpha}. \qquad (2.60)$$

Із нерівності (2.60) маємо наступне співвідношення

$$\mathbf{S}_n(p) \leq \frac{2^{2n\alpha}\cdot R^{n\alpha}}{n^{n(\alpha+1)}} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{R^n + |a_{2k-1}|^n}{R^{\frac{n}{2}}\cdot|a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}-1}} \times$$

$$\times\left[\prod_{k=1}^{n} r\left(G_{k-1}^{(2)}, \lambda_{k-1}^{(2)}\right)\cdot r\left(G_{k}^{(1)}, \lambda_{k}^{(1)}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left(r\left(G_k^{(0)},0\right)\cdot r\left(G_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}, \quad p\in\widehat{\mathbf{P}}_{2n}^{(1)}(R). \qquad (2.61)$$

Користуючись рівностями (2.42) з (2.61) маємо

$$\mathbf{S}_n \leq \left(\frac{2^{2\alpha+1}\cdot R^{\alpha}}{n^{\alpha+1}}\right)^{n} \times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_{2k-1}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{2k-1}| \cdot \prod_{k=1}^{n}\left(r\left(G_k^{(0)},0\right)\cdot r\left(G_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}} \times$$

$$\times\left[r\left(G_{k}^{(1)}, \lambda_{k}^{(1)}\right)\cdot r\left(G_{k}^{(2)}, \lambda_{k}^{(2)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.62)$$

Враховуючи умови теореми 2.5 з (2.62) отримаємо

$$\mathbf{S}_n\left(p\right) \leq \left(\frac{2^{2\alpha+1}\cdot R^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}}\right)^n \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(r\left(G_k^{(0)},0\right)\cdot r\left(G_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}} \times$$

$$\times\left[r\left(G_k^{(1)},\lambda_k^{(1)}\right)\cdot r\left(G_2^{(k)},\lambda_k^{(2)}\right)\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{2^{2\alpha+1}\cdot R^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}}\right)^n \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} J_2\left(e_k\right)\right)^{\frac{1}{2}}, \quad p\in \widehat{\mathbf{P}}_{2n}^{(1)}\left(R\right), \qquad (2.63)$$

де функціонал J_2 визначений формулою (2.1), $e_k := \Big\{\left(G_k^{(0)},0\right),$ $\left(G_k^{(1)},\lambda_k^{(1)}\right), \left(G_k^{(2)},\lambda_k^{(2)}\right), \left(G_k^{(\infty)},\infty\right)\Big\}$, система областей $F_4 = \Big\{G_k^{(0)}, G_k^{(1)},$ $G_k^{(2)}, G_k^{(\infty)}\Big\}$ є с. н. о., а $\lambda_k^{(1)} = e^{i\varphi_k}$, $\lambda_k^{(2)} = e^{i(\pi+\psi_k)}$ $\forall \varphi_k, \psi_k \in (0,\,\pi)\,, k=\overline{1,n}.$

Користуючись теоремою 6 роботи [31] з нерівності (2.63) отримаємо оцінку

$$\mathbf{S}_n \leq \left(\frac{2^{2\alpha+1}\cdot R^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}}\right)^n \cdot \left(J_2\left(e^0\right)\right)^{\frac{n}{2}},$$

де $e^0 = \left\{\left(B_0^0,0\right),\left(B_1^0,\lambda_1^0\right),\left(B_2^0,\lambda_2^0\right),\left(B_\infty^0,\infty\right)\right\}$, а с. н. о. $\Big\{\left\{B_k^0\right\}_{k=0}^2, B_\infty^0\Big\}$ та точки λ_1^0, λ_2^0 відповідно, є круговими областями і полюсами квадратичного диференціалу

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\left(w^2-h^2\right)\left(w^2-\frac{1}{h^2}\right)}{w^2\left(w^2+1\right)^2}dw^2, \qquad (2.64)$$

$h\in[0;\,1)$ — корінь рівняння $h^2+\frac{1}{h^2}=\frac{4}{\alpha}-2.$

Користуючись властивостями поділяючого перетворення для значень функціоналу $\mathbf{S}_n(p)$, $p\in \widehat{\mathbf{P}}_{2n}^{(1)}\left(R\right)$ отримаємо нерівність (2.57). Квадратичний диференціал (2.58) за допомогою заміни змінної, отримаємо з квадратичного диференціалу (2.64). *Теорема 2.5 доведена.*

Висновки до розділу 2

В цьому розділі розв'язані наступні екстремальні задачі:

1. Отримано повну характеристику екстремальної конфігурації для функціоналу, що складається з добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей взятих відносно точок, що вільно рухаються по рівномірний променевій системі.

2. Знайдено повну характеристику екстремальної конфігурації для функціоналу, що складається з добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей взятих відносно точок, що вільно рухаються по рівномірний променевій системі, а також деякої системи фіксованих точок комплексній площини.

РОЗДІЛ 3

ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ З ВІЛЬНИМИ ПОЛЮСАМИ НА КОЛІ АБО В КІЛЬЦІ

В цьому розділі розглядаються екстремальні задачі на класі взаємно неперетинної системи областей для рівномірної променевої системи з вільними полюсами, які належать певному кільцю, екстремальні задачі для яких кільце містить взаємно неперетинні області, а також ряд різних екстремальних задач з вільними полюсами, що належать одиничному колу.

Екстремальні задачі на класі взаємно неперетинних областей з рівномірною променевою системою, для яких або тільки полюси належать кільцю, або кільце містить області, до цих пір не розглядалися. Задачі з вільними полюсами на одиничному колі вперше з'явилися у роботах [19 – 21]. Після цього подібні задачі розглядалися в роботах багатьох авторів, наприклад [4 – 9, 22, 28 – 32, 35 – 39, 48 – 50].

3.1. Основні поняття розділу 3

Використаємо всі означення, які були введені нами в підрозділі 2.1, а також наведемо деякі додаткові означення необхідні для цього розділу.

Позначимо через $l := \{w : |w| = 1\}$ — одиничне коло w-площини.

Означення 3.1. Для кожного $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ множину всіх наборів точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{C}$ таких, що $a_k \in l$, $k = \overline{1, n}$ позначимо $\Lambda_n\,(l)$.

Тепер введемо клас $\Lambda_n^0\,(\rho, R)$, який є підкласом класу Λ_n^0, введеним нами у розділі 2.1.

Означення 3.2. Для довільних $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ρ, $R \in \mathbb{R}$, $R \geq \rho > 0$ множину всіх наборів точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \Lambda_n^0$ таких, що $0 < \rho \leq |a_k| \leq R$, $k = \overline{1, n}$ будемо позначати $\Lambda_n^0 (\rho, R)$. Такі системи точок будемо називати рівномірними променевими системами точок з вільними полюсами в кільці.

На класі $\Lambda_n^0 (\rho, R)$ також будемо розглядати функціонал $\mu (A_n)$ введений нами у підрозділі 2.1.

Означення 3.3. Позначимо $\widehat{\mathbf{P}}_n^l$ множину всіх впорядкованих наборів відмічених областей $p = \{(B_k, a_k)\}_{k=1}^n$ таких, що $F_n (p) = \{B_k\}_{k=1}^n$ є с. н. о. і $A_n (p) \in \Lambda_n (l)$.

Розглянемо тепер клас $\mathbf{P}_n^0$ введений нами у підрозділу 2.1.

Означення 3.4. Позначимо $\mathbf{P}_n^0 (\rho, R)$ множину всіх впорядкованих наборів відмічених областей $p = \{(B_k, a_k)\}_{k=0}^{n+1} \in \mathbf{P}_n^0$, які задовольняють умові $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \Lambda_n^0 (\rho, R)$.

Означення 3.5. Нехай $\widehat{\mathbf{P}}_n^0 (\rho, R)$ позначає множину всіх впорядкованих наборів $p = \{(B_k, a_k)\}_{k=1}^n$ таких, що $F_n (p)$ є с. н. о. та $A_n (p) \in \Lambda_n^0 (\rho, R)$.

3.2. Екстремальні задачі з вільними полюсами в кільці

Цей підрозділ присвячений вивченню екстремальних задач з вільними полюсами, які належать деякому кільцю $\{w :\ 0 < \rho \leq |w| \leq R < \infty\}$. Задачі такого типу іншими авторами до цього часу не розглядалися.

Для довільного $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \geq 0$ на класі $\mathbf{P}_n^0(\rho, R)$ розглянемо наступний функціонал

$$\Theta_n = \left(r\left(B_0, 0\right) \cdot r\left(B_{n+1}, \infty\right)\right)^{\gamma} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \cdot |a_k|^{\frac{n}{2}-1}\right). \tag{3.1}$$

Розглянемо на класі $\widehat{\mathbf{P}}_n^0(\rho, R)$ функціонал

$$\Upsilon_n = \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \cdot |a_k|^{\frac{n}{2}-1}. \tag{3.2}$$

Сформулюємо таку екстремальну задачу.

Задача 3.1. Знайти максимум функціоналу (3.1) на класі $\mathbf{P}_n^0(\rho, R)$ та знайти екстремальні відмічені області $p \in \mathbf{P}_n^0(\rho, R)$ для довільних фіксованих ρ, $R \in \mathbb{R}$.

Перед тим як приступити до розв'язання задачі 3.1 сформулюємо і доведемо лему 3.1. В цій лемі досліджується максимум функціоналу $J_2 = J_2(p)$, введений формулою (2.1), на підмножині класу $\mathbf{P}_2^*$, який ми ввели в підрозділі 2.1

Лема 3.1. *Нехай для довільних чисел ρ, $R_* \in \mathbb{R}$, $R_* \geq \rho > 0$, елементи компоненти A_2 довільних впорядкованих наборів відмічених областей $p = \{(B_k, a_k)\}_{k=0}^{3} \in \mathbf{P}_2^*$ задовольняють умовам:*

$$1.\ \mathrm{Re}\, a_1 = \mathrm{Re}\, a_2 = 0;$$

$$2.\ 0 < \rho \leq |a_1| \leq R_* < \infty,\ 0 < \rho \leq |a_2| \leq R_* < \infty;$$

$$3.\ a_1 \cdot a_2 > 0.$$

Тоді для довільного $\alpha \geq 0$ має місце нерівність

$$J_2 \leq J_2^0, \tag{3.3}$$

де функціонал J_2 визначений формулою (2.1), а J_2^0 — значення функціоналу J_2 на впорядкованому наборі відмічених областей виду $\left\{\left(B_0^0, 0\right),\right.$ $\left.\left(B_1^0, iR_*\right), \left(B_2^0, -iR_*\right), \left(B_3^0, \infty\right)\right\}$. *Причому області* $B_0^0, B_1^0, B_2^0, B_3^0$ *є круговими областями квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\alpha w^4 + 2\left(\alpha - 2\right) R_*^2 w^2 + \alpha R_*^4}{w^2\left(w^2 + R_*^2\right)^2} dw^2. \tag{3.4}$$

Доведення леми 3.1. У лемі 2.1 було показано, що функціонал

$$W_2\left(p\right) := \left(r\left(D_0, 0\right) r\left(D_3, \infty\right)\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{r\left(D_1, a_1\right) r\left(D_2, a_2\right)}{\left|a_1 - a_2\right|^2}\right)^{\beta}$$

досягає свого максимуму на відмічених областях виду:
$\left\{\left(D_0^0, 0\right), \left(D_1^0, i\frac{h}{2}\right), \left(D_2^0, -i\frac{h}{2}\right), \left(D_3^0, \infty\right)\right\}$, де $h > 0$. Області D_0^0, D_1^0, D_2^0, D_3^0 — є круговими областями квадратичного диференціалу (2.4).

Позначимо максимум функціоналу W_2 через W_2^0. Тоді можна записати нерівність $W_2 \leq W_2^0$. Звідси випливає, що

$$\left(r\left(D_0, 0\right) r\left(D_3, \infty\right)\right)^{\alpha} \cdot \left(r\left(D_1, a_1\right) r\left(D_2, a_2\right)\right)^{\beta} \leq \left|a_1 - a_2\right|^{2\beta} \cdot W_2^0. \tag{3.5}$$

З умов леми випливає, що максимум правої частини нерівності (3.5) досягається при $|a_1 - a_2| = 2R_*$. При цьому одночасно в нерівності (3.5) реалізується знак рівності. Ясно, що $a_1 = iR_*$, $a_2 = -iR_*$. Вираз для квадратичного диференціалу (3.4) можна отримати з відповідного диференціалу (2.4). Звідси випливає твердження про знак рівності в нерівності (3.3). *Лема* 3.1 *доведена.*

Розв'язок задачі 3.1 дає наступна теорема.

Теорема 3.1. *Для довільних фіксованих чисел $\gamma \geq 0$, ρ, $R > 0$ та для довільних впорядкованих наборів відмічених областей $p =$*

$= \{(B_k, a_k)\}_{k=0}^{n+1} \in \mathbf{P}_n^0(\rho, R)$ *справедлива нерівність*

$$\Theta_n \leq \Theta_n^0, \tag{3.6}$$

де Θ_n^0 *— значення функціоналу* Θ_n *на відмічених областях виду* $\left\{\left(B_0^0, 0\right), \left(B_1^0, R\right), \left(B_2^0, R\cdot e^{\frac{2\pi}{n}i}\right), ..., \left(B_n^0, R\cdot e^{\frac{2\pi}{n}(n-1)i}\right), \left(B_{n+1}^0, \infty\right)\right\}$*, а області* B_0^0, B_{n+1}^0, B_k^0, $k = 1, 2, ..., n$ *є круговими областями квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + \left(n^2 - 2\gamma\right) R^n w^n + \gamma R^{2n}}{w^2 \left(w^n - R^n\right)^2} dw^2. \tag{3.7}$$

Доведення теореми 3.1. При доведенні цієї теореми будемо користуватися методом кусочно-поділяючого перетворення ([28 – 32]).

Нехай $E_k = \{w : \frac{2\pi}{n}(k-1) < \arg w < \frac{2\pi}{n}k\}$, $\quad k = 1, 2, ..., n$. Функція (2.7) однолисто відображає область E_k на праву півплощину $\forall k =$ $= 1, 2, ..., n$.

Легко бачити, що

$$|\pi_k(w)| = |w|^{\frac{n}{2}}, \qquad w \to 0,\ w \to \infty,$$

$$|\pi_k(w) - \pi_k(a_m)| \sim \frac{n}{2}|a_m|^{\frac{n}{2}-1} \cdot |w - a_m|, \quad w \to a_m, \tag{3.8}$$

$$k = 1, 2, ..., n-1; m = k, k+1,$$

$$|\pi_n(w) - \pi_n(a_m)| \sim \frac{n}{2}|a_m|^{\frac{n}{2}-1}|w - a_m|, \quad w \to a_m, \quad m = 1, n.$$

Позначимо:

$$\pi_k(a_k) =: \omega_k^{(1)},\ k = 1, 2, ..., n,\ \pi_k(a_{k+1}) =: \omega_k^{(2)},\ k = 1, 2, ..., n-1, \tag{3.9}$$

$$\pi_n\left(a_1\right) =: \omega_n^{(2)}.$$

Результат поділяючого перетворення області B_k, $k=2,...,n$, відносно сімейства функцій $\{\pi_{k-1},\pi_k\}$ позначимо $\left\{G_{k-1}^{(2)}, G_k^{(1)}\right\}$. Для області B_1 результат поділяючого перетворення відносно сімейства $\{\pi_1,\pi_n\}$ буде пара областей $\left\{G_1^{(1)}, G_n^{(2)}\right\}$. Результат поділяючого перетворення областей B_0 и B_{n+1} відносно сімейства функцій $\{\pi_k\}_{k=1}^n$ позначимо через $\left\{G_k^{(0)}\right\}_{k=1}^n$ і $\left\{G_k^{(\infty)}\right\}_{k=1}^n$. Системи областей $\left\{G_k^{(0)}, G_k^{(1)}, G_k^{(2)}, G_k^{(\infty)}\right\}$ є системами попарно взаємно неперетинних багатозв'язних областей $\forall k=1,2,..,n$.

З теорем робіт [28 – 32] і рівностей (3.8) отримаємо наступні нерівності:

$$r\left(B_0,0\right) \leq \prod_{k=1}^{n}\left(r\left(G_k^{(0)},0\right)\right)^{\frac{2}{n^2}},$$

$$r\left(B_{n+1},\infty\right) \leq \prod_{k=1}^{n}\left(r\left(G_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\frac{2}{n^2}},$$

$$r(B_k,a_k) \leq \left(\frac{r\left(G_{k-1}^{(2)},\omega_{k-1}^{(2)}\right)\cdot r\left(G_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)}{\frac{n^2}{4}\mid a_k\mid^{n-2}}\right)^{\frac{1}{2}}, k=2,3,...,n, \tag{3.10}$$

$$r(B_1,a_1) \leq \left(\frac{r\left(G_1^{(1)},\omega_1^{(1)}\right)\cdot r\left(G_n^{(2)},\omega_n^{(2)}\right)}{\frac{n^2}{4}\mid a_1\mid^{n-2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Користуючись позначеннями (3.9) і нерівностями (3.10) можна записати наступну оцінку функціоналу (3.1)

$$\Theta_n \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n \times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left\{\left(r\left(G_k^{(0)},0\right)\cdot r\left(G_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\frac{4\gamma}{n^2}}\cdot r\left(G_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(G_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{3.11}$$

При $\gamma = 0$ з нерівності (3.11) отримаємо наступну оцінку функціоналу (3.2)

$$\Upsilon_n \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(r\left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В правій частині нерівності (3.11) кожен вираз, який стоїть у фігурних дужках є функціонал заданий на відмічених областях $\left\{ \left(G_k^{(0)}, 0\right),\right.$ $\left.\left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right), \left(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right), \left(G_k^{(\infty)}, \infty\right)\right\}$, $k = 1, 2, ..., n$. Як слідує з леми 2.1 максимум правої частини нерівності (3.11) досягається при виконанні умов $\mid \omega_k^{(l)} \mid = \mid \omega_p^{(s)} \mid = R_* = R^{\frac{n}{2}}$ $\forall k, p = 1, 2, ..., n$; $l, s = 1, 2$. Звідси безпосередньо випливає, що $\mid a_1 \mid = \mid a_2 \mid = ... = \mid a_n \mid = R$. Усе вищесказане означає, що максимум функціонала (3.1) досягається при $\mid a_1 \mid = \mid a_2 \mid =$ $= ... = \mid a_n \mid = R$ і всі відмічені області $\left\{ \left(G_k^{(0)}, 0\right), \left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right), \left(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right),\right.$ $\left.\left(G_k^{(\infty)}, \infty\right)\right\}$, $k = 1, 2, ..., n$ співпадають з екстремаллю леми 3.1.

Здійснюючи заміну локального параметра по формулі $\zeta = iw^{\frac{n}{2}}$ в квадратичному диференціалі (3.4), отримаємо квадратичний диференціал (3.7). Звідси випливає справедливість нерівності (3.6). При $\gamma = 0$ закінчення доведення теореми аналогічно сказаному вище, тільки замість леми 3.1 використовується класичний результат М. А. Лаврентьєва [52]. *Теорема 3.1 доведена.*

При піднесенні нерівності (3.6) до степеня $\beta > 0$ можна отримати наступний результат.

Наслідок 3.1. *Для довільних фіксованих чисел* α, $\beta \geq 0$, ρ, $R > 0$, $\alpha + \beta > 0$ *та для довільних впорядкованих наборів відмічених областей*

$p = \{(B_k, a_k)\}_{k=0}^{n+1} \in \mathbf{P}_n^0(\rho, R)$ *справедлива нерівність*

$$(r(B_0, 0) \cdot r(B_{n+1}, \infty))^{\alpha} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \cdot |a_k|^{\frac{n}{2}-1}\right)^{\beta} \leq$$

$$\leq \left(r\left(B_0^0, 0\right) \cdot r\left(B_{n+1}^0, \infty\right)\right)^{\alpha} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^0, a_k^0\right) \cdot |a_k^0|^{\frac{n}{2}-1}\right)^{\beta}, \qquad (3.12)$$

де $a_k^0 = R \cdot e^{\frac{2\pi}{n}(k-1)i}$, $k = 1, 2, ..., n$, *а області* B_0^0, B_{n+1}^0, B_k^0, $k = 1, 2, ..., n$ *є круговими областями квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\alpha w^{2n} + \left(\beta n^2 - 2\alpha\right) R^n w^n + \alpha R^{2n}}{w^2 \left(w^n - R^n\right)^2} dw^2.$$

Наслідок 3.2. *Для довільних фіксованих чисел* α, $\beta \geq 0$, ρ, $R > 0$, $\alpha + \beta > 0$ *та для довільних впорядкованих наборів відмічених областей* $p = \{(B_k, a_k)\}_{k=0}^{n+1} \in \mathbf{P}_n^0(\rho, R)$ *справедлива нерівність*

$$(r(B_0, 0) \cdot r(B_{\infty}, \infty))^{\alpha} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\right)^{\beta} \leq \left(r\left(B_0^0, 0\right) \cdot r\left(B_{n+1}^0, \infty\right)\right)^{\alpha} \times$$

$$\times \left(\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^0, a_k^0\right) \cdot |a_k^0|^{\frac{n}{2}-1}\right)^{\beta} \cdot \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{\beta\left(1-\frac{n}{2}\right)}, \qquad (3.13)$$

де величини B_0^0, B_{n+1}^0, a_k^0, B_k^0, $k = 1, 2, ..., n$ *визначені в наслідку 3.1, а знак рівності реалізується тоді і тільки тоді, коли рівність досягається в (3.12).*

Доведення наслідку 3.2. Домножаючи обидві частини нерівності (3.12) на величину $\prod_{k=1}^{n} |a_k|^{\beta\left(1-\frac{n}{2}\right)}$, одержимо (3.13). *Наслідок 3.2.2* доведено.

Наслідок 3.3. *Для довільних фіксованих чисел* α, $\beta \geq 0$, ρ, M, $R >$ > 0, $\alpha + \beta > 0$, *де* $M = \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{\beta\left(1-\frac{n}{2}\right)}$ *та для довільних впорядкованих* *наборів відмічених областей* $p = \{(B_k, a_k)\}_{k=0}^{n+1} \in \mathbf{P}_n^0(\rho, R)$ *справедлива нерівність*

$$(r(B_0, 0) \cdot r(B_\infty, \infty))^\alpha \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\right)^\beta \leq$$

$$\leq \left(r\left(B_0^0, 0\right) \cdot r\left(B_{n+1}^0, \infty\right)\right)^\alpha \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^0, a_k^0\right) \cdot |a_k^0|^{\frac{n}{2}-1}\right)^\beta \cdot M, \qquad (3.14)$$

де величини B_0^0, B_{n+1}^0, a_k^0, B_k^0, $k = 1, 2, ..., n$ *визначені в наслідку 3.1.*

Доведення наслідку 3.3. Нерівність (3.14) безпосередньо випливає з твердження наслідку 3.2 та умов наслідку 3.3. *Наслідок 3.3 доведено.*

Наслідок 3.4. *Для довільних фіксованих чисел* ρ, $R > 0$ *та для довільних впорядкованих наборів відмічених областей* $p =$
$= \{(B_k, a_k)\}_{k=1}^{n} \in \widehat{\mathbf{P}}_n^0(\rho, R)$ *справедлива нерівність*

$$\Upsilon_n \leq \Upsilon_n^0, \qquad (3.15)$$

де Υ_n^0 *— значення функціоналу* Υ_n *на відмічених областях виду* $\left\{\left(B_1^0, R\right), \left(B_2^0, R \cdot e^{\frac{2\pi}{n}i}\right), ..., \left(B_n^0, R \cdot e^{\frac{2\pi}{n}(n-1)i}\right)\right\}$, *а області* B_k^0, $k = 1, 2, ..., n$ *є круговими областями квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n - R^n)^2}dw^2. \qquad (3.16)$$

Доведення наслідку 3.4. Нерівність (3.15) та квадратичний диференціал (3.16) слідують з нерівності (3.6) та квадратичного диференціала (3.7) відповідно, при $\gamma = 0$. *Наслідок 3.4 доведено.*

Наступні наслідки безпосередньо випливають з наслідку 3.4.

Наслідок 3.5. *Для довільних фіксованих чисел* ρ, $R > 0$ *та для довільних впорядкованих наборів відмічених областей* $p =$ $= \{(B_k, a_k)\}_{k=1}^{n} \in \widehat{\mathbf{P}}_n^0\,(\rho, R)$ *справедлива нерівність*

$$I_n \leq \Upsilon_n^0 \cdot \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{1-\frac{n}{2}},$$

де функціонал I_n *вводиться формулою (2.2), а величина* Υ_n^0 *визначена в наслідку 3.4. Знак рівності реалізується тоді і тільки тоді, коли рівність досягається в (3.15).*

Наслідок 3.6. *Для довільних фіксованих чисел* M, ρ, $R > 0$, *де* $M =$ $= \prod\limits_{k=1}^{n} |a_k|^{1-\frac{n}{2}}$ *та для довільних впорядкованих наборів відмічених областей* $p = \{(B_k, a_k)\}_{k=1}^{n} \in \widehat{\mathbf{P}}_n^0\,(\rho, R)$ *справедлива нерівність*

$$I_n \leq \Upsilon_n^0 \cdot M,$$

де функціонал I_n *вводиться формулою (2.2), а величина* Υ_n^0 *визначена в наслідку 3.4.*

3.3. Екстремальні задачі для областей, які належать одиничному кругу

В цьому підрозділі будемо користуватися введеною нами в підрозділі 2.1 функцією $\mu\,(A_n)$, а також будемо продовжувати досліджувати функціонал (2.2). Наведемо тепер одну екстремальну задачу для рівномірної променевої системи вільних полюсів при умові, що області належать одиничному кругу.

На класі $\widehat{\mathbf{P}}_n^0$ розглянемо функціонал (2.2), а також визначимо наступний функціонал

$$\Phi_n = \frac{1}{\mu\left(A_n\right)} \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right), \tag{3.17}$$

де функціонал $\mu\left(A_n\right)$ введений в підрозділі 2.1.

Задача 3.2. Для довільного фіксованого числа $\rho \in \mathbb{R}, 0 < \rho \le \left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{2}{n}}$, знайти максимум функціоналу (2.2) на класі $\widehat{\mathbf{P}}_n^0$ і знайти такі відмічені області $p \in \widehat{\mathbf{P}}_n^0$ для яких цей максимум досягається, якщо виконується сукупність умов:

$$\begin{aligned} &1.\ B_k \subset \{w :\, |w| < 1\}\,,\ k = 1, 2, ..., n, \\ &2.\ 0 < \rho \le |a_k| < 1,\ k = 1, 2, ..., n, \\ &3.\ \mu\left(A_n\right) = \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{n}{4}}\right) \cdot |\ a_k\ | \le \left(\sqrt{2}-1\right)^2, \end{aligned} \tag{3.18}$$

де $\chi\left(t\right) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$.

Розв'язок задачі 3.2 дає наступна теорема.

Теорема 3.2. *Нехай компоненти $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ та $F_n = \{B_k\}_{k=1}^n$ довільних впорядкованих наборів відмічених областей $p = \{(B_k, a_k)\}_{k=1}^n \in \in \widehat{\mathbf{P}}_n^0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ задовольняють умовам (3.18). Тоді справедлива нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \le \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^0, a_k^0\right), \tag{3.19}$$

де відмічені області $\left\{\left(B_k^0, a_k^0\right)\right\}_{k=1}^n = \left\{\left(B_k^0, \left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{2}{n}} \cdot e^{\frac{2\pi}{n}(k-1)i}\right)\right\}_{k=1}^n$, а області B_k^0, $k = 1, 2, ..., n$ є круговими областями квадратичного диференціалу

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}\left(1+w^n\right)^2}{\left(w^n - \left(\sqrt{2}-1\right)^2\right)^2\left(1 - w^n\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right)^2}dw^2. \tag{3.20}$$

Доведення теореми 3.2. Застосуємо при доведенні цієї теореми також метод кусочно-поділяючого перетворення. Знову, нехай $E_k =$ $= \{w : \frac{2\pi}{n}(k-1) < \arg w < \frac{2\pi}{n}k\}, \quad k = 1, 2, ..., n$. Функція (2.7) однолисто відображає область E_k на праву півплощину, $k = 1, 2, ..., n$.

Легко бачити, що

$$|\pi_k(w) - \pi_k(a_m)| \sim \frac{n}{2}|a_m|^{\frac{n}{2}-1} \cdot \mid w - a_m|, \quad w \to a_m,$$

$$k = 1, 2, ..., n-1; m = k, k+1, \tag{3.21}$$

$$|\pi_n (w) - \pi_n (a_m)| \sim \frac{n}{2} |a_m|^{\frac{n}{2}-1} |w - a_m|, \quad w \to a_m, \quad m = 1, n;$$

Позначимо:

$$\pi_k (a_k) =: \omega_k^{(1)},\ k = 1, 2, ..., n,\ \pi_k (a_{k+1}) =: \omega_k^{(2)},\ k = 1, 2, ..., n-1, \tag{3.22}$$

$$\pi_n (a_1) =: \omega_n^{(2)}.$$

Результат поділяючого перетворення області B_k, $k = 2, ..., n$, відносно сімейства функцій $\{\pi_{k-1}, \pi_k\}$ позначимо $\left\{G_{k-1}^{(2)}, G_k^{(1)}\right\}$. Для області B_1 результат поділяючого перетворення відносно сімейства $\{\pi_1, \pi_n\}$ буде пара областей $\left\{G_1^{(1)}, G_n^{(2)}\right\}$. Системи областей $\left\{G_k^{(1)}, G_k^{(2)}\right\}$ є системами попарно взаємно неперетинними багатозв'язними областями, $k = 1, 2, .., n$.

З теорем робіт [28 – 32] і рівностей (3.21) і (3.22) отримаємо наступні нерівності:

$$r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{r\left(G_{k-1}^{(2)}, \omega_{k-1}^{(2)}\right) \cdot r\left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right)}{\frac{n^2}{4} \mid a_k \mid^{n-2}} \right)^{\frac{1}{2}}, k = 2, 3, ..., n, \tag{3.23}$$

$$r(B_1,a_1)\leq\left(\frac{r\left(G_1^{(1)},\omega_1^{(1)}\right)\cdot r\left(G_n^{(2)},\omega_n^{(2)}\right)}{\frac{n^2}{4}\mid a_1\mid^{n-2}}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.24)$$

Нерівності (3.23), (3.24) дозволяють записати наступну оцінку функціоналу (2.2)

$$I_n=\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right)\leq\left(\frac{r\left(G_n^{(1)},\omega_n^{(1)}\right)\cdot r\left(G_n^{(2)},\omega_n^{(2)}\right)}{\frac{n^2}{4}\left(\mid a_n\mid\cdot\mid a_1\mid\right)^{\frac{n-2}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{r\left(G_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(G_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)}{\frac{n^2}{4}\left(\mid a_k\mid\cdot\mid a_{k+1}\mid\right)^{\frac{n-2}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.25)$$

Як і при доведенні теореми 2.1, вираз (3.25) перетворимо наступним чином

$$I_n\leq\left(\frac{4}{n}\right)^n\cdot\chi\left(\left|\frac{a_n}{a_1}\right|^{\frac{n}{4}}\right)\mid a_n\mid\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{n}{4}}\right)\mid a_k\mid\times$$

$$\times\frac{\left(r\left(G_n^{(1)},\omega_n^{(1)}\right)r\left(G_n^{(2)},\omega_n^{(2)}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\mid a_n\mid^{\frac{n}{2}}+\mid a_1\mid^{\frac{n}{2}}\right)}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\left(r\left(G_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)r\left(G_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\mid a_k\mid^{\frac{n}{2}}+\mid a_{k+1}\mid^{\frac{n}{2}}\right)}. \qquad (3.26)$$

Таким чином, користуючись рівностями (3.22), а також умовою теореми, із співвідношення (3.26) отримаємо нерівність

$$I_n\leq\left(\frac{4}{n}\right)^n\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)^2\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{r\left(G_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(G_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)}{\mid\omega_k^{(1)}-\omega_k^{(2)}\mid^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.27)$$

В правій частині нерівності (3.27) кожний вираз, який стоїть під знаком добутку є функціонал, який заданий на наборі відмічених областей $\left\{\left(G_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right),\left(G_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)\right\}$, $k=1,2,...,n$. З теореми 1.11 слідує, що максимум правої частини нерівності (3.27) досягається при виконанні умов

$| \omega_k^{(l)} |=| \omega_p^{(s)} |= \sqrt{2}-1,\ k,p=1,2,...,n;\ l,s=1,2.$ Звідси безпосередньо слідує, що $| a_1 |=| a_2 |= ... =| a_n |= \left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{2}{n}}$. Також

$$\chi\left(\left|\frac{a_n}{a_1}\right|^{\frac{n}{4}}\right) \cdot | a_n | \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{n}{4}}\right) \cdot | a_k |= \left(\sqrt{2}-1\right)^2,$$

зокрема, при $| a_1 |=| a_2 |= ... =| a_n |= \left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{2}{n}}$. Усе вищесказане означає, що максимум функціонала (2.2) на класі $\widehat{\mathbf{P}}_n^0$ досягається при

$$| a_1 |=| a_2 |= ... =| a_n |= \left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{2}{n}}$$

і всі відмічені області

$$\left\{\left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right), \left(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)\right\}$$

співпадають з екстремаллю теореми 1.11.

Здійснивши заміну локального параметру по формулі $\zeta = iw^{\frac{n}{2}}$ в квадратичному диференціалі (див. теорему 1.11)

$$Q(\zeta)d\zeta^2 = -\frac{\left(\zeta^2+1\right)^2}{\left(\zeta^2-\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right)^2\left(1-\zeta^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right)^2}d\zeta^2$$

отримаємо квадратичний диференціал (3.20). Отже, отримаємо формулу (3.19). *Теорема 3.2 доведена.*

Розглянемо наступну задачу.

Задача 3.3. Знайти максимум функціоналу (3.17) на класі $\widehat{\mathbf{P}}_n^0$ та знайти такі відмічені області $p \in \widehat{\mathbf{P}}_n^0$ на яких цей максимум досягається.

Теорема 3.3 дає розв'язок задачі 3.3. Сформулюємо цю теорему.

Теорема 3.3. *Нехай компоненти $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ та $F_n = \{B_k\}_{k=1}^n$ довільних впорядкованих наборів відмічених областей $p = \{(B_k, a_k)\}_{k=1}^n \in$*

$\in \widehat{\mathbf{P}}_n^0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ задовольняють умовам 1 та 2 системи (3.18). Тоді має місце нерівність

$$\Phi_n \leq \Phi_n^0, \tag{3.28}$$

де Φ_n^0 — значення функціоналу Φ_n на відмічених областях виду $\left\{\left(B_k^0, \left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{2}{n}} \cdot e^{\frac{2\pi}{n}(k-1)i}\right)\right\}_{k=1}^{n}$. Причому області B_k^0, $k = 1, 2, ..., n$ є круговими областями квадратичного диференціалу (3.20).

Доведення теореми 3.3. Доведення цієї теореми, в основному, аналогічно доведенню теореми 3.2. Скористаємося позначеннями, які використовуються при доведенні теореми 3.2.

Використовуючи співвідношення (3.22) – (3.24) отримаємо

$$\Phi_n = \frac{1}{\mu\left(A_n\right)} \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leq \frac{1}{\mu\left(A_n\right)} \cdot \left(\frac{r\left(G_n^{(1)}, \omega_n^{(1)}\right) \cdot r\left(G_n^{(2)}, \omega_n^{(2)}\right)}{\frac{n^2}{4}\left(|a_n| \cdot |a_1|\right)^{\frac{n-2}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{r\left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{\frac{n^2}{4}\left(|a_k| \cdot |a_{k+1}|\right)^{\frac{n-2}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.29}$$

З нерівності (3.29) маємо

$$\Phi_n \leq \frac{1}{\mu\left(A_n\right)} \cdot \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \chi\left(\left|\frac{a_n}{a_1}\right|^{\frac{n}{4}}\right) |a_n| \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{n}{4}}\right) |a_k| \times$$

$$\times \frac{\left(r\left(G_n^{(1)}, \omega_n^{(1)}\right) r\left(G_n^{(2)}, \omega_n^{(2)}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(|a_n|^{\frac{n}{2}} + |a_1|^{\frac{n}{2}}\right)} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\left(r\left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(|a_k|^{\frac{n}{2}} + |a_{k+1}|^{\frac{n}{2}}\right)}. \tag{3.30}$$

Із співвідношення (3.30) можна отримати наступну оцінку функціоналу (3.17)

$$\Phi_n \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{\left(r\left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{\left|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}\right|}.$$

Завершення доведення теореми 3.3 проводиться аналогічно теоремі 3.2. Тобто, доведена правильність нерівності (3.28) і те, що екстремальні області є круговими областями квадратичного диференціалу (3.20). *Теорема 3.3 доведена.*

3.4. Екстремальна задача з чотирма вільними полюсами на одиничному колі

В цьому параграфі на класі $\widehat{\mathbf{P}}_4^l$ для довільного дійсного $\alpha \geq 0$ розглянемо функціонал

$$\Xi_4 = r^{\alpha}\left(B_1, a_1\right) \cdot r\left(B_2, a_2\right) \cdot r\left(B_3, a_3\right) \cdot r^{\alpha}\left(B_4, a_4\right). \tag{3.31}$$

Сформулюємо екстремальну задачу.

Задача 3.4. Знайти максимум функціоналу (3.31) на класі $p \in \widehat{\mathbf{P}}_4^l$ та знайти екстремальні відмічені області $p \in \widehat{\mathbf{P}}_4^l$.

О. К. Бахтіним в роботах [5, 6, 22] була розглянута задача, яка відрізняється від задачі 3.4 тільки порядком розміщення полюсів a_k, $k = \overline{1,4}$ на одиничному колі. Подібні задачі розглядалися також в роботах [37, 48 – 50]. Виходячи з вищесказаного можна зробити висновок, що задача 3.4 представляє певний інтерес.

Розв'язок задачі 3.4 дає наступна теорема.

Теорема 3.4. *Для довільного фіксованого* $\alpha \geq 0$ *і довільного впорядкованого набору відмічених областей* $p = \{(B_k, a_k)\}_{k=1}^{4} \in \widehat{\mathbf{P}}_4^l$ *такого, що*

$$0 \leq \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < \arg a_4 < 2\pi$$

справедлива нерівність

$$\Xi_4 \leq \Xi_4^0, \tag{3.32}$$

де Ξ_4^0 *— значення функціоналу* Ξ_4 *на відмічених областях виду* $\left\{\left(B_1^0, a_1^0\right), \left(B_2^0, a_2^0\right), \left(B_3^0, a_3^0\right), \left(B_4^0, a_4^0\right)\right\}$, *області* B_k^0, $k = 1, 2, 3, 4$ *є круговими областями квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = \frac{(w-\varrho)^2 \left(w - \frac{1}{\varrho}\right)^2}{\left(w-a_1^0\right)^2 \left(w-a_4^0\right)^2 \left(w-a_2^0\right)^2 \left(w-a_3^0\right)^2} dw^2, \tag{3.33}$$

$$a\ \cos\psi = \frac{1}{|1-\alpha|}\sqrt{\frac{2}{\alpha} \cdot \left((\alpha+1)\sqrt{\alpha^2-\alpha+1} - \alpha^2 - 1\right)},$$

$$\varrho + \frac{1}{\varrho} = \frac{\cos\psi\,(1-\alpha)\left(2-\alpha\cos^2\psi\right)}{1-2\alpha\cos^2\psi},$$

$$a_1^0 = e^{i\psi},\ a_4^0 = \overline{a}_1^0,\ a_3^0 = \overline{a}_2^0,\ a_2^0 + \overline{a}_2^0 = -2\alpha\cos\psi.$$

Доведення теореми 3.4. Стандартним чином доводиться існування екстремальних відмічених областей $p_0 := \left\{\left(B_k^0, a_k^0\right)\right\}_{k=1}^{4}$.

Застосуємо додаткову варіацію до відмічених областей

$$\xi = \frac{w-\varepsilon}{1-w\overline{\varepsilon}}, \tag{3.34}$$

де $|\varepsilon| < 1$.

З рівності (3.34) отримаємо співвідношення

$$\xi = w - \varepsilon + w^2\overline{\varepsilon} + O\left(\varepsilon^2\right), \tag{3.35}$$

де величина $\varepsilon^{-2}O\left(\varepsilon^2\right)$ рівномірно обмежена на будь-якому компакті при $\varepsilon \to 0$.

Нехай $g_{B_k^0}\left(w, a_k^0\right)$, $k = 1,2,3,4$ узагальнені функції Гріна для областей B_k^0, відповідно відносно точок a_k^0, $k = 1,2,3,4$. (Вони існують, бо $\mathrm{cap}\, \partial B_k > 0$, $k = 1,2,3,4$).

Користуючись означенням функції Гріна отримаємо співвідношення

$$g_{B_k^0}\left(w, a_k^0\right) = \ln r\left(B_k^0, a_k^0\right) - \ln\left|w - a_k^0\right| + o\left(1\right), \tag{3.36}$$

$$o\left(1\right) \rightrightarrows 0, \quad w \to a_k^0, \quad k = 1,2,3,4.$$

При відображенні (3.34) екстремальна система відмічених областей $p_0 = \left\{\left(B_k^0, a_k^0\right)\right\}_{k=1}^4 \in \widehat{\mathbf{P}}_4^l$ переходить в деяку систему $p^\varepsilon =$
$= \left\{\left(B_k^\varepsilon, a_k^\varepsilon\right)\right\}_{k=1}^4 \in \widehat{\mathbf{P}}_4^l$.

Внаслідок інваріантності функції Гріна при конформному відображенні отримаємо

$$g_{B_k^\varepsilon}\left(\xi, a_k^\varepsilon\right) = g_{B_k^0}\left(w, a_k^0\right), \quad k = 1,2,3,4. \tag{3.37}$$

Із співвідношення (3.35) маємо

$$\left|\xi - a_k^\varepsilon\right| = \left|w - a_k^0\right| \cdot \left|1 + 2a_k^0\overline{\varepsilon} + O\left(\varepsilon^2\right)\right|, \quad k = 1,2,3,4. \tag{3.38}$$

Очевидно, що справедлива тотожність

$$\left|1 + 2a_k^0\overline{\varepsilon} + O\left(\varepsilon^2\right)\right| = 1 + 2\mathrm{Re}\, a_k^0\overline{\varepsilon} + O\left(\varepsilon^2\right). \tag{3.39}$$

Враховуючи тотожність (3.39) з рівності (3.38) отримаємо

$$\left|w - a_k^0\right| = \left|\xi - a_k^\varepsilon\right| \cdot \left\{1 - 2\mathrm{Re}\, a_k^0\overline{\varepsilon} + O\left(\varepsilon^2\right)\right\}, \quad k = 1,2,3,4. \tag{3.40}$$

Тоді із співвідношень (3.36), враховуючи рівності (3.40) маємо

$$g_{B_k^0}\left(w, a_k^0\right) = \ln \frac{r\left(B_k^0, a_k^0\right)}{1 - 2\mathrm{Re}\, a_k^0 \overline{\varepsilon} + O\left(\varepsilon^2\right)} - \ln\left|\xi - a_k^{\varepsilon}\right| + o\left(1\right), \qquad (3.41)$$

$$o\left(1\right) \rightrightarrows 0, \quad w \to a_k^0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

З формули (3.37), скориставшись рівностями (3.41) одержимо

$$g_{B_k^{\varepsilon}}\left(\xi, a_k^{\varepsilon}\right) = \ln \frac{r\left(B_k^0, a_k^0\right)}{1 - 2\mathrm{Re}\, a_k^0 \overline{\varepsilon} + O\left(\varepsilon^2\right)} - \ln\left|\xi - a_k^{\varepsilon}\right| + o\left(1\right), \qquad (3.42)$$

$$o\left(1\right) \rightrightarrows 0, \quad \xi \to a_k^{\varepsilon}, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Вираз (3.42) дає можливість одержати значення внутрішнього радіуса для варійованих відмічених областей $p^{\varepsilon} = \{(B_k^{\varepsilon}, a_k^{\varepsilon})\}_{k=1}^4 \in \widehat{\mathbf{P}}_4^l$.

$$r\left(B_k^{\varepsilon}, a_k^{\varepsilon}\right) = r\left(B_k^0, a_k^0\right)\left\{1 + 2\mathrm{Re}\, a_k^0 \overline{\varepsilon} + O\left(\varepsilon^2\right)\right\}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \qquad (3.43)$$

З рівності (3.43) знайдемо значення функціоналу (3.31) на відмічених областях $p^{\varepsilon} \in \widehat{\mathbf{P}}_4^l$

$$\Xi_4\left(p^{\varepsilon}\right) = \Xi_4\left(p_0\right)\left\{1 + 2\mathrm{Re}\, \overline{\varepsilon}\left[a_2^0 + a_3^0 + \alpha\left(a_1^0 + a_4^0\right)\right] + O\left(\varepsilon^2\right)\right\}. \qquad (3.44)$$

З рівності (3.44) і екстремальності системи відмічених областей p_0, по аналогії з роботами [5, 6, 22], одержуємо нормуючу умову, якій задовольняють точки a_k^0, $k = 1, 2, 3, 4$

$$\alpha\left(a_1^0 + a_4^0\right) + a_2^0 + a_3^0 = 0. \qquad (3.45)$$

Користуючись умовою (3.45), а також тим фактом, що функціонал (3.31) є інваріантним відносно обертання комплексної площини навколо початку координат, і тим, що $a_k^0 \in l$, $k = 1, 2, 3, 4$, маємо

$$a_4^0 = \overline{a}_1^0 = e^{i\psi},\ \psi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad a_3^0 = \overline{a}_2^0. \qquad (3.46)$$

Доведемо тепер, що області B_k^0, $k=\overline{1,4}$ симетричні відносно одиничного кола l. Доводити цей факт будемо подібно до роботи [6].

Нехай $p^{(s)}\in\widehat{\mathbf{P}}_4^l$ означає такі відмічені області, для яких області B_k, $k=\overline{1,4}$ симетричні відносно одиничного кола.

Введемо позначення $U:=\{w:\,|w|\leq 1\}$, $B_k^{(1)}:=U\bigcap B_k^0$, $B_k^{(2)}:=$ $=\left(\overline{\mathbb{C}}\setminus U\right)\bigcap B_k^0$, $k=\overline{1,4}$.

Область $B_k^{(1)}$ в об'єднані з симетричній їй областю відносно одиничного кола позначимо $\mathcal{B}_k^{(1)}$, $k=\overline{1,4}$, а область $B_k^{(2)}$ в об'єднані з симетричній їй областю відносно одиничного кола позначимо $\mathcal{B}_k^{(2)}$, $k=\overline{1,4}$.

Згідно результатів робіт [30 – 32] справедлива нерівність:

$$r\left(B_k^0,a_k^0\right)\leq\sqrt{r\left(\mathcal{B}_k^{(1)},a_k^0\right)\cdot r\left(\mathcal{B}_k^{(2)},a_k^0\right)},\quad k=\overline{1,4}. \tag{3.47}$$

Тоді із співвідношень (3.31) та (3.47) слідує

$$\Xi_4\left(p_0\right)\leq\sqrt{\Xi_4\left(p^{(s_1)}\right)\cdot\Xi_4\left(p^{(s_2)}\right)}, \tag{3.48}$$

де $p^{(s_1)}:=\left\{\left(\mathcal{B}_k^{(1)},a_k^0\right)\right\}_{k=1}^4$, $p^{(s_2)}:=\left\{\left(\mathcal{B}_k^{(2)},a_k^0\right)\right\}_{k=1}^4$.

Позначимо екстремальну відмічену область, для областей B_k, $k=\overline{1,4}$ симетричних відносно одиничного кола, через $p_0^{(s)}$.

З нерівності (3.48) отримаємо співвідношення

$$\Xi_4\left(p_0\right)\leq\sqrt{\left(\Xi_4\left(p_0^{(s)}\right)\right)^2}=\Xi_4\left(p_0^{(s)}\right). \tag{3.49}$$

З іншої сторони, множина відмічених областей $p^{(s)}\in\widehat{\mathbf{P}}_4^l$ є підмножиною множини відмічених областей $p\in\widehat{\mathbf{P}}_4^l$.

З огляду на вищесказане очевидна наступна нерівність

$$\Xi_4\left(p_0^{(s)}\right)\leq\Xi_4\left(p_0\right). \tag{3.50}$$

З нерівностей (3.49) та (3.50) слідує, що максимум функціоналу (3.31) досягається для відмічених областей $p^{(s)} \in \widehat{\mathbf{P}}^l_4$.

Тому в подальшому будемо вважати, що області B^0_k, $k = \overline{1,4}$, відміченого набору областей $p_0 \in \widehat{\mathbf{P}}^l_4$, симетричні відносно одиничного кола l.

Отже, для подальшого дослідження екстремальних відмічених областей, можна скористатися варіаційною формулою Дюрена-Шиффера [72]

$$w^* = w + \frac{A\rho^2}{w_0} \cdot \frac{w}{w - w_0} - \frac{\overline{A}\rho^2}{\overline{w_0}} \cdot \frac{w^2}{1 - w\overline{w_0}} + O(\rho^3), \qquad (3.51)$$

де $\rho > 0$ — достатньо малий параметр, $A = A(\rho)$ — параметр граничної варіації, $\rho^{-3} \mid O\left(\rho^3\right) \mid$ — величина, рівномірно обмежена на довільному компакті комплексної площини $\mathbb{C}$, який не містить точок w_0 і $\frac{1}{\overline{w_0}}$.

Позначимо через $p^* = \{(B^*_k, a^*_k)\}^4_{k=1} \in \widehat{\mathbf{P}}^l_4$ систему відмічених областей, в яку переходить екстремальна система відмічених областей $p_0 =$ $= \left\{\left(B^0_k, a^0_k\right)\right\}^4_{k=1} \in \widehat{\mathbf{P}}^l_4$, при відображенні (3.51).

Нехай, як і раніше, $g_{B^0_k}\left(w, a^0_k\right)$, $k = 1,2,3,4$ узагальнені функції Гріна для областей B^0_k, відповідно відносно точок a^0_k, $k = 1,2,3,4$, що задаються рівностями (3.36).

Внаслідок інваріантності функції Гріна при конформному відображенні отримаємо

$$g_{B^*_k}\left(w^*, a^*_k\right) = g_{B^0_k}\left(w, a^0_k\right), \quad k = 1,2,3,4. \qquad (3.52)$$

Із співвідношення (3.51) маємо

$$|w^* - a^*_k| = \left|w - a^0_k\right| \times$$

$$\times\left|1-\frac{A\rho^2}{\left(a_k^0-w_0\right)^2}-\frac{\overline{A}\rho^2}{\overline{w_0}}\cdot\frac{2a_k^0-\left(a_k^0\right)^2\overline{w_0}}{\left(1-a_k^0\overline{w_0}\right)^2}+O(\rho^3)\right|,\quad k=1,2,3,4. \tag{3.53}$$

Очевидно, що для довільних $\varrho\in\mathbb{R}$, $\mathcal{L}$, $C\in\mathbb{C}$ справедлива тотожність

$$\left|1-\varrho^2\left(C+\mathcal{L}\right)+O\left(\varrho^3\right)\right|=1-\varrho^2\mathrm{Re}\,\left(C+\overline{\mathcal{L}}\right)+O\left(\varrho^3\right). \tag{3.54}$$

Враховуючи тотожність (3.54) з рівності (3.53) отримаємо

$$\left|w-a_k^0\right|=\left|w^*-a_k^*\right|\times$$

$$\times\left\{1+\rho^2\mathrm{Re}\,A\left[\frac{1}{\left(a_k^0-w_0\right)^2}+\frac{2\overline{a_k^0}-\left(\overline{a_k^0}\right)^2w_0}{w_0\left(1-\overline{a_k^0}w_0\right)^2}\right]+O(\rho^3)\right\},\quad k=\overline{1,4}. \tag{3.55}$$

Тоді із співвідношень (3.36), враховуючи рівності (3.55) маємо

$$g_{B_k^0}\left(w,a_k^0\right)=-\ln\left|w^*-a_k^*\right|+$$

$$+\ln\frac{r\left(B_k^0,a_k^0\right)}{1+\rho^2\mathrm{Re}\,A\left[\frac{1}{\left(a_k^0-w_0\right)^2}+\frac{2\overline{a_k^0}-\left(\overline{a_k^0}\right)^2w_0}{w_0\left(1-\overline{a_k^0}w_0\right)^2}\right]+O(\rho^3)}+o\left(1\right), \tag{3.56}$$

$$o\left(1\right)\rightrightarrows 0,\quad w\to a_k^0,\quad k=1,2,3,4.$$

З формул (3.52), скориставшись рівностями (3.56) одержимо

$$g_{B_k^*}\left(w^*,a_k^*\right)=-\ln\left|w^*-a_k^*\right|+$$

$$+\ln\frac{r\left(B_k^0,a_k^0\right)}{1+\rho^2\mathrm{Re}\,A\left[\frac{1}{\left(a_k^0-w_0\right)^2}+\frac{2\overline{a_k^0}-\left(\overline{a_k^0}\right)^2w_0}{w_0\left(1-\overline{a_k^0}w_0\right)^2}\right]+O(\rho^3)}+o\left(1\right), \tag{3.57}$$

$$o\left(1\right)\rightrightarrows 0,\quad w^*\to a_k^*,\quad k=1,2,3,4.$$

Вираз (3.57) дає можливість одержати значення внутрішнього радіуса для варійованих відмічених областей $p^* = \{(B_k^*, a_k^*)\}_{k=1}^4$

$$r\left(B_k^*, a_k^*\right) = r\left(B_k^0, a_k^0\right)\left\{1 - \rho^2 \mathrm{Re} A\left[\frac{2a_k^0}{w_0\left(a_k^0 - w_0\right)^2}\right] + O\left(\rho^3\right)\right\}. \tag{3.58}$$

З рівності (3.58), користуючись (3.46) отримаємо наступне співвідношення

$$\Xi_4^* = \Xi_4 \cdot \left\{1 + 8\left(\alpha+1\right)\cdot\rho^2 \times\right.$$

$$\left.\times \mathrm{Re} A\left[\frac{A_1 w^4 - A_2 w^3 + A_3 w^2 - A_2 w + A_1}{\left(w-a_1^0\right)^2\left(w-\overline{a}_1^0\right)^2\left(w-a_2^0\right)^2\left(w-\overline{a}_2^0\right)^2}\right] + O\left(\rho^3\right)\right\}, \tag{3.59}$$

де Ξ_4^* — значення функціоналу (3.31) на варійованих відмічених областях $p^* \in \widehat{\mathbf{P}}_4^l$,

$$A_1 = 1 - 2\alpha\cos^2\psi, \quad A_2 = 2\left(1-\alpha\right)\left(2 - \alpha\cos^2\psi\right)\cos\psi,$$
$$A_3 = 2\left(1 + 2\left(\alpha-1\right)^2\cos^2\psi\right). \tag{3.60}$$

Аналогічно роботам [5, 22], скориставшись рівністю (3.59) та в силу основної леми метода граничної варіації Шиффера [79], отримаємо висновок, що $\left(\overline{\mathbb{C}}\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{4} B_k^0\right)$ є замикання об'єднання скінченого числа траєкторій квадратичного диференціалу

$$Q(w)dw^2 = \frac{A_1 w^4 - A_2 w^3 + A_3 w^2 - A_2 w + A_1}{\left(w-a_1^0\right)^2\left(w-\overline{a}_1^0\right)^2\left(w-a_2^0\right)^2\left(w-\overline{a}_2^0\right)^2}dw^2. \tag{3.61}$$

Як видно з виразу (3.61) квадратичний диференціал має чотири нулі.

В подальшому, для визначеності, будемо вважати, що $\alpha < 1$. Користуючись результатами праці [27, глави 3, 7] та теоремами розділу 1.2, можна зробити два висновки про поведінку траєкторій квадратичного диференціалу (3.61):

1. Так як коефіцієнти полінома в чисельнику (3.61) є дійсними, то траєкторії квадратичного диференціалу симетричні відносно дійсної осі;

2. Траєкторії квадратичного диференціалу симетричні відносно одиничного кола l тому, що (3.61) задовольняє умові $Q(\frac{1}{w}) = Q(w)$.

Виходячи з висновку 1 можна сформулювати наступні випадки розміщення нулів квадратичного диференціалу (3.61):

I. Всі чотири нулі квадратичного диференціалу не належать дійсний осі;

II. Два нулі не належать дійсні осі, а два їй належать;

III. Всі чотири нулі належать дійсний осі.

Розглянемо кожен випадок окремо.

I. Позначимо чисельник квадратичного диференціалу (3.61) через

$$P_4(w) := A_1 w^4 - A_2 w^3 + A_3 w^2 - A_2 w + A_1,$$

де A_1, A_2, A_3, A_4 визначені формулами (3.60).

Нехай змінна w виразу $P_4(w)$ пробігає тільки дійсну вісь. Тоді знак виразу $P_4(w)$ однаковий для всіх $w \in \mathbb{R}$. Легко бачити, що

$$P_4(1) = 4\,(1 - \cos\psi)\,(1 - (1 - \alpha)\cos\psi)\,(1 + \alpha\cos\psi) > 0.$$

Отже, з попереднього слідує, що

$$P_4(w) > 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}. \tag{3.62}$$

З нерівності (3.62), а також з вигляду знаменника квадратичного диференціалу (3.61) бачимо, що

$$Q(w)dw^2 > 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}. \tag{3.63}$$

З (3.63) слідує, що дійсна вісь є траєкторією квадратичного диференціалу (3.61). Звідси можна показати, що на дійсний осі повинні знаходитись нулі квадратичного диференціалу (3.61). А це, в свою чергу, суперечить випадку I. Отримали протиріччя. Отже, цей випадок неможливий.

Розглянемо тепер випадок II.

II. Аналізуючи розміщення траєкторій та нулів квадратичного диференціалу (3.61), беручи до уваги висновки 1 і 2, легко бачити, що в цьому випадку можливе тільки наступне розміщення нулів диференціалу (3.61): диференціал має два прості нулі $w_1 = b \in l$, $w_2 = \overline{b} \in l$ та один нуль другої кратності $w_3 = 1$.

При цьому квадратичний диференціал (3.61) матиме вигляд

$$Q(w)dw^2 = \frac{(w-b)\left(w-\overline{b}\right)(w-1)^2}{\left(w-a_1^0\right)^2\left(w-\overline{a}_1^0\right)^2\left(w-a_2^0\right)^2\left(w-\overline{a}_2^0\right)^2}dw^2. \tag{3.64}$$

Порівнюючи квадратичні диференціали (3.61) та (3.64), а також скориставшись теоремою Віета, отримаємо систему

$$\begin{cases} b+\overline{b}+2 = \frac{A_2}{A_1} \\ 2b+2\overline{b}+2 = \frac{A_3}{A_1} \end{cases}. \tag{3.65}$$

Розв'язуючи систему (3.65), отримаємо кубічне рівняння

$$\alpha\left(1-\alpha\right)\cos^3\psi + \left(\alpha^2-3\alpha+1\right)\cos^2\psi - 2\left(1-\alpha\right)\cos\psi + 1 = 0. \tag{3.66}$$

Рівняння (3.66) має корені

$$(\cos\psi)_1 = 1, \quad (\cos\psi)_2 = \frac{1}{1-\alpha}, \quad (\cos\psi)_3 = -\frac{1}{\alpha}. \tag{3.67}$$

Корені (3.67) рівняння (3.66) не задовольняють умовам (3.46). Тому і цей випадок неможливий.

Розглянемо тепер випадок III. Беручи до уваги висновки 1 і 2 легко бачити, що диференціал (3.61) має два нулі другої кратності $w_1 = \varrho$, $w_2 = \frac{1}{\varrho}$, $0 < \varrho < 1$.

В цьому випадку квадратичний диференціал (3.61) матиме вигляд

$$Q(w)dw^2 = \frac{(w-\varrho)^2\left(w-\frac{1}{\varrho}\right)^2}{\left(w-a_1^0\right)^2\left(w-\overline{a}_1^0\right)^2\left(w-a_2^0\right)^2\left(w-\overline{a}_2^0\right)^2}dw^2. \tag{3.68}$$

Порівнюючи квадратичні диференціали (3.61) і (3.68), а також скориставшись теоремою Віета, отримаємо систему

$$\begin{cases} 2\varrho + 2\frac{1}{\varrho} = \frac{A_2}{A_1} \\ 4 + \varrho^2 + \frac{1}{\varrho^2} = \frac{A_3}{A_1} \end{cases}. \tag{3.69}$$

Розв'язуючи систему (3.69), отримаємо біквадратне рівняння

$$\alpha\left(1-\alpha\right)^2\cos^4\psi + 4\left(\alpha^2+1\right)\cos^2\psi - 4 = 0. \tag{3.70}$$

Рівняння (3.70) має корені

$$\cos^2\psi = 2\cdot\frac{-\alpha^2 - 1 \pm (\alpha+1)\sqrt{\alpha^2-\alpha+1}}{\alpha\left(1-\alpha\right)^2}. \tag{3.71}$$

З (3.71) легко бачити, що умовам (3.46) задовольняє тільки корінь

$$\cos\psi = \frac{1}{|1-\alpha|}\sqrt{\frac{2}{\alpha}\cdot\left((\alpha+1)\sqrt{\alpha^2-\alpha+1}-\alpha^2-1\right)}.$$

Таким чином, у випадку $\alpha < 1$ формули (3.32) та (3.33) доведено. Випадок $\alpha > 1$ розглядається аналогічним чином. *Теорема 3.4 доведена.*

Підносячи нерівність (3.32) до степеня β і вводячи позначення $\gamma := \alpha\beta$, отримаємо наступний наслідок.

Наслідок 3.7. *Нехай довільні фіксовані дійсні числа β, $\gamma \geq 0$. Тоді, при виконанні умов теореми 3.4, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_1, a_1) \cdot r^{\beta}(B_2, a_2) \cdot r^{\beta}(B_3, a_3) \cdot r^{\gamma}(B_4, a_4) \leq$$

$$\leq r^{\gamma}\left(B_1^0, a_1^0\right) \cdot r^{\beta}\left(B_2^0, a_2^0\right) \cdot r^{\beta}\left(B_3^0, a_3^0\right) \cdot r^{\gamma}\left(B_4^0, a_4^0\right),$$

де області B_k^0, $k = 1, 2, 3, 4$ є круговими областями квадратичного диференціалу

$$Q(w)dw^2 = \frac{(w-\varrho)^2\left(w-\frac{1}{\varrho}\right)^2}{\left(w-a_1^0\right)^2\left(w-a_4^0\right)^2\left(w-a_2^0\right)^2\left(w-a_3^0\right)^2}dw^2,$$

$$a\ \cos\psi = \frac{1}{|\beta-\gamma|}\sqrt{\frac{2\beta}{\gamma}\cdot\left(\left(\gamma+\beta\right)\sqrt{\gamma^2-\gamma\beta+\beta^2}-\gamma^2-\beta^2\right)},$$

$$\varrho + \frac{1}{\varrho} = \ = \frac{\cos\psi\,(\beta-\gamma)\left(2\beta-\gamma\cos^2\psi\right)}{\beta\left(\beta-2\gamma\cos^2\psi\right)},$$

$$a_1^0 = e^{i\psi},\ a_4^0 = \overline{a}_1^0,\ a_3^0 = \overline{a}_2^0,\ a_2^0 + \overline{a}_2^0 = -2\frac{\gamma}{\beta}\cos\psi.$$

Зауваження. Теорема 3.4 при $\gamma = \beta$ отримана в роботах [20, 22].

3.5. Екстремальна задача з трьома вільними полюсами на одиничному колі

В цьому підрозділі розглядається екстремальна задача, яка є вільним аналогом відомого результату Л. І. Колбіної [40]. Також подібні задачі розглядав В. Н. Дубинін [28 – 32].

На класі $\widehat{\mathbf{P}}_3^l$ для довільного дійсного $\alpha \geq 0$ розглянемо функціонал

$$\Delta_3 = r^{\alpha}\left(B_1, a_1\right) \cdot r\left(B_2, a_2\right) \cdot r\left(B_3, a_3\right). \tag{3.72}$$

В цьому підрозділі розглянемо задачу подібну до задачі 3.4.

Задача 3.5. Знайти максимум функціоналу (3.72) на класі $\widehat{\mathbf{P}}_3^l$ та знайти екстремальні відмічені області $p \in \widehat{\mathbf{P}}_3^l$.

Рішення цієї задачі дає наступна теорема.

Теорема 3.5. *Нехай довільне $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha < 2$. Тоді для довільного впорядкованого набору відмічених областей $p = \{(B_k, a_k)\}_{k=1}^3 \in \widehat{\mathbf{P}}_3^l$, компонента A_3 якого задовольняє умові*

$$0 \leq \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < 2\pi,$$

має місце нерівність

$$\Delta_3 \leq \Delta_3^0, \tag{3.73}$$

де Δ_3^0 — значення функціоналу Δ_3 на відмічених областях виду $\left\{\left(B_1^0, 1\right), \left(B_2^0, -e^{-i\arccos\frac{\alpha}{2}}\right), \left(B_3^0, -e^{i\arccos\frac{\alpha}{2}}\right)\right\}$. Причому області B_k^0, $k = 1, 2, 3$ є круговими областями квадратичного диференціалу

$$Q(w)dw^2 = -\frac{2\left(\alpha - 2 + \alpha^2\right)w^2 + \left(8 + \alpha^3\right)w + 2\left(\alpha - 2 + \alpha^2\right)}{(w-1)^2\left(w + e^{-i\phi}\right)^2\left(w + e^{i\phi}\right)^2}dw^2, \tag{3.74}$$

де $\phi = \arccos\frac{\alpha}{2}$.

Доведення теореми 3.5. Доведення цієї теореми проводиться тим же методом, що і доведення теореми 3.4.

Існування екстремальних відмічених областей $\left\{\left(B_k^0, a_k^0\right)\right\}_{k=1}^3$, при умові $0 \leq \alpha < 2$ доводиться стандартним чином. При значеннях $2 \leq \alpha$ екстремальні відмічені області не існують.

Далі, аналогічно доведенню теореми 3.4, скористаємося варіацією (3.34) та отримаємо нормуючу умову для точок a_1^0, a_2^0, a_3^0:

$$\alpha a_1^0 + a_2^0 + a_3^0 = 0. \tag{3.75}$$

Користуючись умовою (3.75), а також тим фактом, що функціонал (3.72) інваріантний щодо повороту комплексної площини навколо початку координат, і тим, що $a_k^0 \in l$, $k = 1, 2, 3$, можна вважати

$$a_1^0 = 1, \quad \operatorname{Re} a_2^0 = -\frac{\alpha}{2}, \quad a_3^0 = \overline{a}_2^0. \tag{3.76}$$

Як і при доведенні теореми 3.4 можна показати, що області B_k^0, $k = = 1, 2, 3$ симетричні відносно одиничного кола l.

Отже, для подальшого вивчення екстремальних відмічених областей можна застосувати варіаційну формулу Дюрена-Шиффера (3.51).

Користуючись формулою (3.58), а також, застосовуючи рівності (3.76), одержимо наступне співвідношення для варійованих відмічених областей $p^* \in \widehat{\mathbf{P}}_3^l$,

$$\Delta_3^* = \Delta_3 \left\{ 1 - \rho^2 \mathrm{Re} A \left[\frac{2\left(\alpha - 2 + \alpha^2\right) w^2 + \left(8 + \alpha^3\right) w + 2\left(\alpha - 2 + \alpha^2\right)}{(w-1)^2 \left(w - e^{i(\pi - \phi)}\right)^2 \left(w - e^{i(\pi + \phi)}\right)^2} \right] + \right.$$
$$\left. + O\left(\rho^3\right) \right\}, \tag{3.77}$$

де Δ_3^* — значення Δ_3 на варійованих відмічених областях, $\phi = \arccos \frac{\alpha}{2}$. З рівності (3.77) отримаємо нерівність

$$\operatorname{Re} \left[A \frac{2\left(\alpha - 2 + \alpha^2\right) w^2 + \left(8 + \alpha^3\right) w + 2\left(\alpha - 2 + \alpha^2\right)}{(w-1)^2 \left(w - e^{i(\pi - \phi)}\right)^2 \left(w - e^{i(\pi + \phi)}\right)^2} \right] \geq 0 \tag{3.78}$$

справедливу для довільних допустимих значень w_0 та $A = A(\rho)$.

На підставі нерівності (3.78) і основної леми методу граничної варіації Шиффера [79] приходимо до висновку про те, що $\left(\overline{\mathbb{C}}\backslash \bigcup\limits_{k=1}^{3} B_k^0\right)$ є замикання об'єднання скінченого числа траєкторій квадратичного диференціалу (3.74). Використовуючи теорему 1, роботи [29], одержуємо оцінку (3.5.73) функціоналу (3.72) на класі $\widehat{\mathbf{P}}_3^l$, при $0 \leq \alpha < 2$. *Теорема 3.5 доведена.*

Як і для попередніх теорем з теореми 3.5 випливає наступний результат.

Наслідок 3.8. *Нехай довільні* α, $\beta \in \mathbb{R}$, α, $\beta \geq 0$, $0 \leq \alpha < 2\beta$. *Тоді для довільного впорядкованого набору відмічених областей* $p =$ $= \{(B_k, a_k)\}_{k=1}^3 \in \widehat{\mathbf{P}}_3^l$, *компонента* A_3 *якого задовольняє умові*

$$0 \leq \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < 2\pi,$$

має місце нерівність

$$r^{\alpha}\left(B_1, a_1\right) \cdot r^{\beta}\left(B_2, a_2\right) \cdot r^{\beta}\left(B_3, a_3\right) \leq r^{\alpha}\left(B_1^0, a_1^0\right) \cdot r^{\beta}\left(B_2^0, a_2^0\right) \cdot r^{\beta}\left(B_3^0, a_3^0\right),$$

де $a_1^0 = 1$, $a_2^0 = -e^{-i \arccos \frac{\alpha}{2\beta}}$, $a_3^0 = -e^{i \arccos \frac{\alpha}{2\beta}}$, *а області* B_k^0, $k = 1, 2, 3$ *є круговими областями квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{2\left(\alpha - 2\beta + \frac{\alpha^2}{\beta}\right)w^2 + \left(8\beta + \frac{\alpha^3}{\beta^2}\right)w + 2\left(\alpha - 2\beta + \frac{\alpha^2}{\beta}\right)}{(w-1)^2\left(w + e^{-i\phi}\right)^2\left(w + e^{i\phi}\right)^2}dw^2,$$

де $\phi = \arccos \frac{\alpha}{2\beta}$.

3.6. Інший варіант екстремальної задачі з чотирма вільними полюсами на одиничному колі

На класі $\widehat{\mathbf{P}}_4^l$ розглянемо функціонал

$$L_4 = \frac{r^{\alpha}(B_1, a_1) \cdot r^{\beta}(B_2, a_2) \cdot r^{\alpha}(B_3, a_3) \cdot r^{\beta}(B_4, a_4)}{|a_1 - a_3|^{2\alpha-\gamma} \cdot |a_2 - a_4|^{2\beta-\delta}}, \qquad (3.79)$$

де α, β, γ, $\delta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$.

В цьому підрозділі розглянемо задачу подібну до задач 3.4 та 3.5.

Задача 3.6. Знайти максимум функціоналу (3.79) на класі $\widehat{\mathbf{P}}_4^l$ та знайти екстремальні відмічені області $p \in \widehat{\mathbf{P}}_4^l$.

При $\gamma = 2\alpha$, $\delta = 2\beta$ цю задачу для однозв'язних симетричних відносно одиничного кола областей розглядали Г. П. Бахтіна та О. К. Бахтін у роботі [22]. Для багатозв'язних симетричних відносно одиничного кола областей при $\gamma = 2\alpha$, $\delta = 2\beta$ ця задача розглянута у роботі [5] О. К. Бахтіним, а для довільних багатозв'язних областей у роботі [6]. Розв'язок задачі 3.6 для функціоналу інваріантного відносно довільного конформного автоморфізму комплексної площини, тобто при $\gamma = \delta = 0$, сформульований теоремою 1.10 та розглядався в роботах [4, 8, 9]. Подібні задачі розглядалися також в роботах [28 – 32, 36 – 39, 48 – 50].

Рішення задачі 3.6 дає наступна теорема.

Теорема 3.6. *Для будь-яких невід'ємних* α, β, γ, δ, $\alpha+\beta > 0$, $\gamma+\delta > 0$ *і довільного впорядкованого набору відмічених областей* $p =$

$= \{(B_k, a_k)\}_{k=1}^4 \in \widehat{\mathbf{P}}_4^l$ *для компоненти* A_4 *якого виконується умова:*

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < \arg a_4 < 2\pi,$$

має місце нерівність

$$L_4 \leq L_4^0, \tag{3.80}$$

де L_4^0 *— значення функціоналу* L_4 *на відмічених областях виду* $\left\{\left(B_1^0, 1\right), \left(B_2^0, i\right), \left(B_3^0, -1\right), \left(B_4^0, -i\right)\right\}$. *Причому області* B_k^0, $k = 1, 2, 3, 4$ *є круговими областями квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = \frac{(\beta-\alpha)\, w^4 - 2\,(\beta+\alpha)\, w^2 + (\beta-\alpha)}{\left(w^4-1\right)^2} dw^2. \tag{3.81}$$

Знак рівності в (3.80), з точністю до повороту комплексної площини навколо початку координат, досягається тоді і тільки тоді, коли $a_1 = 1$, $a_2 = i$, $a_3 = -1$, $a_4 = -i$, $B_k = B_k^0 \setminus e_k$, $cap\ e_k = 0$, $a_k \overline{\in} e_k$, $e_k \in B_k$, $k = \overline{1, 4}$, e_k *— замкнута множина у відносній топології в* B_k, $k = \overline{1, 4}$.

Доведення теореми 3.6. Спочатку доведемо існування екстремальних відмічених областей $p_0 = \left\{\left(B_k^0, a_k^0\right)\right\}_{k=1}^4$.

З теореми М. А. Лаврентьєва [52] випливає, що

$$r\,(B_1, a_1)\, r\,(B_2, a_2) \leq |\ a_1 - a_2\ |^2$$

для довільних областей $B_k \subset \mathbb{C}$ та точок $a_k \in B_k$. Звідси слідує, що функціонал (3.79) на класі $\widehat{\mathbf{P}}_4^l$

$$L_4^{(0)} := \max_{p \in \widehat{\mathbf{P}}_4^l} L_4\,(p) \leq 2^{\gamma+\delta}. \tag{3.82}$$

З (3.82) легко бачити, що існує послідовність відмічених областей $p^{(n)} = \left\{\left(B_k^{(n)}, a_k^{(n)}\right)\right\}_{k=1}^4 \in \widehat{\mathbf{P}}_4^l$ така, що

$$L_4\left(p^{(n)}\right) =: L_4^{(n)} \to L_4^{(0)}, \quad n \to \infty. \tag{3.83}$$

Можемо вважати, що

$$a_k^{(n)} \to a_k^0, \quad n \to \infty.$$

Як і при доведенні теорем 3.4 та 3.5, провівши додаткову варіацію (3.34) та використавши інваріантість функціоналу (3.79) відносно повороту комплексної площини навколо початку координат, показуємо, що можна взяти

$$a_1^0 = 1, \quad a_2^0 = e^{i\varphi}, \quad a_3^0 = -1, \quad a_4^0 = -e^{i\varphi},$$

де $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Нехай при повороті комплексної площини навколо початку координат послідовність відичечених областей $p^{(n)} \in \widehat{\mathbf{P}}_4^l$ перейде в послідовність $p^{(n)}(\varphi) = \left\{\left(B_k^{(n)}(\varphi), a_k^{(n)}(\varphi)\right)\right\}_{k=1}^4 \in \widehat{\mathbf{P}}_4^l$, яка внаслідок співвідношень (3.82), (3.83) також, задовольняє умові

$$L_4\left(p^{(n)}(\varphi)\right) =: L_4^{(n)}(\varphi) \to L_4^{(0)}, \quad n \to \infty.$$

Внаслідок теореми 2.15 [32, с. 50 – 51] та леми [8, с. 10 – 11] одержимо, що можна вибрати таку послідовність $p^{(n)}(\varphi) \in \widehat{\mathbf{P}}_4^l$ для якої області $B_k^{(n)}(\varphi)$ є однозв'язні та симетричні відносно одиничного кола l.

Далі, враховуючи вищесказане, а також використовуючи властивості нормальних сімейств стандартними міркуваннями легко показати існування набору відмічених областей $p_0 = \left\{\left(B_k^0, a_k^0\right)\right\}_{k=1}^4$, для якого

$$L_4(p_0) = L_4^{(0)},$$

де величина L_4^0 визначена формулою (3.82).

Таким чином, ми довели не тільки існування екстремальних відмічених областей $p_0 = \left\{\left(B_k^0, a_k^0\right)\right\}_{k=1}^4$, які належать класу $\widehat{\mathbf{P}}_4^l$, а також довели існування однозв'язних та симетричних відносно l екстремалей.

Тому для подальшого вивчення екстремальних відмічених областей можна застосувати варіаційну формулу Дюрена-Шиффера (3.51).

При застосуванні формули (3.51) екстремальна система відмічених областей $p_0 = \left\{\left(B_k^0, a_k^0\right)\right\}_{k=1}^4 \in \widehat{\mathbf{P}}_4^l$ перейде у варійовану систему $p^* =$ $= \{(B_k^*, a_k^*)\}_{k=1}^4 \in \widehat{\mathbf{P}}_4^l$.

Як і при доведенні теореми 3.4 справедливі формули (3.52) – (3.58).

Користуючись формулою (3.51) отримаємо рівності

$$\mid a_s^* - a_q^* \mid = \mid a_s^0 - a_q^0 \mid \cdot \left|1 - \frac{A\rho^2}{w_0} \cdot \frac{a_s^0 + a_q^0}{\left(a_s^0 - w_0\right)\left(a_q^0 - w_0\right)} + O\left(\rho^3\right)\right|, \quad (3.84)$$

де пара натуральних індексів (s, q) приймає два значення: $(1, 3)$ або $(2, 4)$.

Із рівностей (3.84), враховуючи тотожність (3.54), слідують наступні співвідношення

$$\mid a_s^* - a_q^* \mid = \mid a_s^0 - a_q^0 \mid \cdot \left\{1 - \rho^2 \mathrm{Re}\, A\left[\frac{a_s^0 + a_q^0}{w_0\left(a_s^0 - w_0\right)\left(a_q^0 - w_0\right)}\right] + O\left(\rho^3\right)\right\}, \quad (3.85)$$

де, як і раніше, пара натуральних індексів (s, q) приймає два значення: $(1, 3)$ або $(2, 4)$.

Враховуючи те, що $a_1^0 + a_3^0 = 0$ та $a_2^0 + a_4^0 = 0$ із співвідношень (3.85) маємо,

$$\mid a_s^* - a_q^* \mid = \mid a_s^0 - a_q^0 \mid \left\{1 + O\left(\rho^3\right)\right\}, \quad (3.86)$$

де пара індексів (s, q) приймає такі ж значення, як і в рівностях (3.84) та (3.85).

Внаслідок виконання співвідношень (3.86) та (3.58) для функціоналу (3.79) отримаємо оцінку

$$L_4\left(p^*\right) = L_4\left(p_0\right)\cdot\left\{1-2\rho^2\mathrm{Re}\,\frac{A}{w_0}\left[\frac{\alpha a_1^0}{\left(a_1^0-w_0\right)^2}+\frac{\beta a_2^0}{\left(a_2^0-w_0\right)^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\alpha a_3^0}{\left(a_3^0-w_0\right)^2}+\frac{\beta a_4^0}{\left(a_4^0-w_0\right)^2}\right]+O\left(\rho^3\right)\right\}. \tag{3.87}$$

Беручи до уваги справедливість рівностей $a_1^0 = 1$, $a_2^0 = i$, $a_3^0 = -1$, $a_4^0 = -i$, вираз (3.87) можна переписати наступним чином

$$L_4\left(p^*\right) = L_4\left(p_0\right)\cdot\left\{1-8\rho^2\times\right.$$

$$\left.\times\mathrm{Re}\,Ae^{2i\varphi}\cdot\frac{\left(\beta+e^{-2i\varphi}\alpha\right)w^4-2\left(\beta+\alpha\right)w^2+\left(\beta+e^{2i\varphi}\alpha\right)}{\left(w^2-1\right)^2\left(w^2-e^{2i\varphi}\right)^2}+O\left(\rho^3\right)\right\}. \tag{3.88}$$

Через те, що система відмічених областей $p_0 \in \widehat{\mathbf{P}}_4^l$ реалізує абсолютний максимум функціоналу (3.79) на класі $\widehat{\mathbf{P}}_4^l$, із рівності (3.88) слідує нерівність

$$\mathrm{Re}\,Ae^{2i\varphi}\cdot\frac{\left(\beta+e^{-2i\varphi}\alpha\right)w^4-2\left(\beta+\alpha\right)w^2+\left(\beta+e^{2i\varphi}\alpha\right)}{\left(w^2-1\right)^2\left(w^2-e^{2i\varphi}\right)^2}+O\left(\rho\right)\geq 0. \tag{3.89}$$

З основної леми метода граничної варіації Шиффера [79], внаслідок нерівності (3.89) приходимо до висновку про те, що $\left(\overline{\mathbb{C}}\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{4}B_k^0\right)$ є замиканням об'єднання скінченого числа траєкторій квадратичного диференціалу

$$Q(w)dw^2 = -e^{2i\varphi}\cdot\frac{\left(\beta+e^{-2i\varphi}\alpha\right)w^4-2\left(\beta+\alpha\right)w^2+\left(\beta+e^{2i\varphi}\alpha\right)}{\left(w^2-1\right)^2\left(w^2-e^{2i\varphi}\right)^2}dw^2. \tag{3.90}$$

Нескладно бачити, що квадратичний диференціал (3.90) задовольняє властивості

$$Q(-w)d\left(-w\right)^2 = Q(w)dw^2.$$

Звідси, та з самого вигляду квадратичного диференціалу (3.90), випливає, що його траєкторії симетричні одиничному колу l і центрально симетричні відносно початку координат.

Завершення доведення теореми 3.6 проводиться аналогічно тому, як це було зроблено у роботах [5, 8].

Просиметризуємо область B_k^0 відносно початку координат і променя $z = he^{\frac{\pi}{2}(k-1)i}$, $k = 1, 2, 3, 4$, $h > 0$. При цьому екстремальна система $p_0 = \left\{\left(B_1^0, 1\right), \left(B_2^0, e^{i\varphi}\right), \left(B_3^0, -1\right), \left(B_4^0, -e^{i\varphi}\right)\right\} \in \widehat{\mathbf{P}}_4^l$, перетвориться в екстремальну систему $p_{00} = \left\{\left(B_1^{00}, 1\right), \left(B_2^{00}, i\right), \left(B_3^{00}, -1\right), \left(B_4^{00}, -i\right)\right\} \in$ $\in \widehat{\mathbf{P}}_4^l$.

З результатів робіт [25, гл. 8], [6, с. 101 – 103] випливає, що для системи відмічених областей p_{00} справедлива властивість

$$r\left(B_k^0, a_k^0\right) \leq r\left(B_k^{00}, i^{k-1}\right), \qquad k = \overline{1, 4}. \tag{3.91}$$

Наступний висновок є безпосереднім наслідком нерівностей (3.92)

$$L_4^{(0)} = L_4\left(p_0\right) \leq L_4\left(p_{00}\right) \leq L_4^{(0)}. \tag{3.92}$$

Нерівності (3.93) дають змогу записати слідуючу систему рівностей

$$L_4\left(p_0\right) = L_4\left(p_{00}\right) = L_4^{(0)}. \tag{3.93}$$

З формул (3.92) та (3.94), у свою чергу, випливає, що

$$r\left(B_k^0, a_k^0\right) = r\left(B_k^{00}, i^{k-1}\right), \quad k = \overline{1, 4}. \tag{3.94}$$

Згідно теорем про одиничність при круговий симетризації Дж. Дженкинса [25, гл. 8], [75, 76] користуючись рівностями (3.95), можна зробити висновок, що області B_k^{00} повинні переходити в області B_k^0 (при тому самому $k = 1, 2, 3, 4$), за допомогою обертання навколо початку координат. Беручи до уваги структуру траєкторій квадратичного диференціалу (3.90), формули (3.94) та (3.95), одержуємо, що останнє твердження буде мати місце, якщо тільки $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Екстремальні відмічені області $p_{00} = \left\{ \left(B_k^{00}, i^{k-1} \right) \right\}_{k=1}^4 \in \widehat{\mathbf{P}}_4^l$ визначаються квадратичним диференціалом (3.90) при $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Отже, області B_k^{00}, $k = 1, 2, 3, 4$ є круговими областями, а точки $a_k^0 = i^{k-1} \in B_k^{00}$, $k = 1, 2, 3, 4,$ — полюси квадратичного диференціалу

$$Q(w)dw^2 = \frac{(\beta - \alpha)\, w^4 - 2\,(\beta + \alpha)\, w^2 + (\beta - \alpha)}{\left(w^4 - 1\right)^2} dw^2. \tag{3.95}$$

Користуючись властивостями екстремальних відмічених областей p^{00}, записаних у формулах (3.94) – (3.96), та з огляду на теорему 1 роботи [29], одержуємо, що на класі $\widehat{\mathbf{P}}_4^l$ справедлива наступна нерівність

$$L_4\,(p) \leq L_4\,(p_{00})\,, \quad p \in \widehat{\mathbf{P}}_4^l. \tag{3.96}$$

Дослідження можливості досягнення знаку рівності в нерівності (3.97) проводиться повністю аналогічно дослідженню цього ж питання в роботі [8, с. 28 – 35]. *Теорема 3.6 доведена.*

Висновки до розділу 3

В цьому розділі розв'язані наступні екстремальні задачі:

1. Для функціоналу, що складається з добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей, що належать одиничному кругу, взятих відносно точок, які вільно рухаються по рівномірний променевій системі, описано розміщення екстремальних областей та точок.

2. Отримано характеристику екстремальної конфігурації для функціоналу, що складається з добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей взятих відносно точок, які належать деякому кільцю та вільно рухаються по рівномірний променевій системі.

3. Знайдено розміщення екстремальних областей та точок для функціоналу, що складається з добутку внутрішніх радіусів трьох і чотирьох взаємно неперетинних областей взятих відносно точок, які вільно рухаються по одиничному колу.

4. Повністю описана екстремальна конфігурація для функціоналу, який складається з добутку внутрішніх радіусів чотирьох взаємно неперетинних областей взятих відносно точок, що вільно рухаються по одиничному колу, а також залежить від відстаней між цими точками.

РОЗДІЛ 4

ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПРОМЕНЕВИХ СИСТЕМ ТОЧОК ТА ДЕЯКІ ОБЧИСЛЕННЯ

В цьому розділі розглядаються екстремальні задачі на класі взаємно неперетинної системи областей з вільними полюсами, які належить деякій, не обов'язково рівномірний, променевій системі. Також в цьому розділі наводяться точні числові оцінки деяких функціоналів, що розглядаються у цій роботі.

4.1. Основні поняття розділу 4

В цьому розділі, як і в розділі 3, будемо користуватися означеннями введеними нами в підрозділах 2.1 та 3.1.

Також наведемо деякі додаткові поняття.

Означення 4.1. Для кожного $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ множину всіх наборів точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{C}$ таких, що $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < ... < \arg a_n < 2\pi$ позначимо Λ_n. В подальшому, набори точок $A_n \in \Lambda_n$ будемо називати променевими системами точок.

Для кожної променевої системи точок $A_n = \{b_k\}_{k=1}^{n} \in \Lambda_n$ розглянемо множину числових параметрів, які геометрично характеризують дану систему. Нехай $\sigma_k := \frac{1}{\pi}\left(\arg a_{k+1} - \arg a_k\right)$, $k = \overline{1, n-1}$, $\sigma_n :=$
$= \frac{1}{\pi}\left(2\pi - \arg a_n\right)$. Очевидно, що $\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k = 2$.

Для променевої системи $A_n = \{b_k\}_{k=1}^{n} \in \Lambda_n$ визначимо функціонал

$$\eta = \eta\left(A_n\right) = \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{b_k}{b_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\sigma_k}}\right)|b_k|,$$

де $b_{n+1} = b_1$, $\chi\left(t\right) = \frac{1}{2}\left(t + t^{-1}\right)$.

Легко бачити, що функціонал $\eta\left(A_n\right)$ є узагальненням функціоналу $\mu\left(A_n\right)$ який введений нами в підрозділі 2.1, на випадок довільної променевої системи точок $A_n \in \Lambda_n$.

Означення 4.2. Нехай $\mathbf{P}_n$ позначає множину всіх впорядкованих наборів відмічених областей $p = \left\{\left(B_k, a_k\right)\right\}_{k=0}^{n+1}$ таких, що $F_{n+2}\left(p\right) = \{B_k\}_{k=0}^{n+1}$ є с. н. о. і $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \infty$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n} \in \Lambda_n$.

Означення 4.3. Нехай $\widehat{\mathbf{P}}_n$ позначає множину всіх впорядкованих наборів $p = \left\{\left(B_k, a_k\right)\right\}_{k=1}^{n}$ таких, що $F_n\left(p\right)$ є с. н. о. та $A_n\left(p\right) \in \Lambda_n$.

Означення 4.4. Для довільного фіксованого числа $\varepsilon_0 > 0$ позначимо через $\mathbf{P}_n\left(\varepsilon_0\right)$ підмножину множини $\mathbf{P}_n$ всіх впорядкованих наборів відмічених областей $p = \left\{\left(B_k, a_k\right)\right\}_{k=0}^{n+1}$ з променевою системою точок $A_n \in \Lambda_n$ такою, що $\sigma_k = \frac{2}{n} + \varepsilon_k$, де $|\varepsilon_k| \leq \varepsilon_0$, $k = \overline{1, n}$.

4.2. Допоміжні результати

Наступний результат є доповненням до леми 2.1.1. Його можна отримати з робіт [37], [50], а також з роботи [29] для значень τ_1, τ_2 з певного інтервалу. Але в вищевказаних роботах доведення дуже коротке, тому для повноти і логічності викладення матеріалу дисертації ми приведемо повне доведення даного результату, яке було отримано нами незалежно і іншим методом по відношенню до робіт [29], [37], [50].

Лема 4.1. *При довільних* $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$, $\tau_1 + \tau_2 > 0$ *на класі* $\mathbf{P}_2^*$ *справедлива нерівність*

$$(r(B_0, 0)\, r(B_3, \infty))^{\tau_1} \cdot \left(\frac{r(B_1, a_1)\, r(B_2, a_2)}{|a_1 - a_2|^2} \right)^{\tau_2} \leq$$

$$\leq \frac{\tau_1^{\tau_1} \tau_2^{\tau_2}}{\left|\sqrt{\tau_1} - \sqrt{\tau_2}\right|^{\left(\sqrt{\tau_1} - \sqrt{\tau_2}\right)^2} \left(\sqrt{\tau_1} + \sqrt{\tau_2}\right)^{\left(\sqrt{\tau_1} + \sqrt{\tau_2}\right)^2}}. \qquad (4.1)$$

Знак рівності в (4.1) реалізується тоді і тільки тоді, коли $\widetilde{p} = p_0$, *де* $p_0 = \left\{ \left(B_0^0, 0\right), \left(B_1^0, i\frac{h}{2}\right), \left(B_2^0, -i\frac{h}{2}\right), \left(B_3^0, \infty\right) \right\}$, *а* B_s^0, $s = 0, 1, 2, 3$ — *система кругових областей квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\left[\frac{\tau_1}{2}\right] \cdot \frac{w^4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\tau_2}{\tau_1}\right) h^2 w^2 + \frac{h^4}{16}}{w^2 \left(w^2 + \frac{h^2}{4}\right)^2} dw^2 \qquad \forall h > 0, \qquad (4.2)$$

і множина всіх несуттєвих граничних компонент системи p *має логарифмічну ємність рівну нулю.*

Доведення леми 4.1. В лемі 2.1 був отриманий квадратичний диференціал 4.2. Також було показано, що одна з екстремалей буде у випадку однозв'язних областей. Тому, не обмежуючи загальності, можна вважати, що екстремальні області є однозв'язні.

В подальшому, будемо діяти, в основному, аналогічно роботі [40].

Запишемо диференціальне рівняння, яке відповідає квадратичному диференціалу (4.2)

$$\frac{w_k^4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\tau_2}{\tau_1}\right) h^2 w_k^2 + \frac{h^4}{16}}{w_k^2 \left(w_k^2 + \frac{h^2}{4}\right)^2} dw_k^2 = \gamma_k^2 \left(\frac{dz}{z}\right)^2, \quad k = \overline{0, 3}, \qquad (4.3)$$

де $w_k(z)$ — функції, які відображають одиничний круг $U = \{z : |z| < 1\}$ на відповідні екстремальні області B_k^0, а γ_k — деяка стала, $k = \overline{0, 3}$.

Проінтегруємо диференціальне рівняння (4.3). Отримаємо,

$$\int \frac{\sqrt{w_k^4+\left(\frac{1}{2}-\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)h^2w_k^2+\frac{h^4}{16}}}{w_k\left(w_k^2+\frac{h^2}{4}\right)}dw_k=\gamma_k\int\frac{dz}{z},\quad k=\overline{0,3}, \tag{4.4}$$

де розглядається така вітка кореня квадратного, при якій $w_k=0$ переходить в $t_k=\frac{h^2}{4}$, $k=\overline{0,3}$. Права частина рівності (4.4) буде дорівнювати

$$\gamma_k\int\frac{dz}{z}=\ln\left(C_k z^{\gamma_k}\right),\quad k=0,1,2,3, \tag{4.5}$$

де C_k, γ_k — деякі сталі, $k=\overline{0,3}$.

Для перетворення лівої частини рівності (4.4) перейдемо від змінної w_k до нової змінної t_k за допомогою заміни

$$t_k=\sqrt{w_k^4+\left(\frac{1}{2}-\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)h^2w_k^2+\frac{h^4}{16}}-w_k^2,\quad k=\overline{0,3}, \tag{4.6}$$

де вітка кореня розглядається така ж, як і в рівності (4.4).

Зробивши заміну (4.6) в лівій частині рівності (4.4), ми отримаємо слідуючи рівності

$$\int \frac{\sqrt{w_k^4+\left(\frac{1}{2}-\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)h^2w_k^2+\frac{h^4}{16}}}{w_k\left(w_k^2+\frac{h^2}{4}\right)}dw_k=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{\left(t_k^2-h^2\left(\frac{1}{2}-\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)t_k+\frac{h^4}{16}\right)^2}{\left(t_k-\frac{h}{4}\right)\left(t_k+\frac{h}{4}\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{dt_k}{\left(t_k-\frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)\right)\left(t_k-\frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\right)\right)\left(t_k-\frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\right)\right)}\right), \tag{4.7}$$

де $k=\overline{0,3}$. Причому вітка кореня береться та ж, що і в рівності (4.4).

Праву частину рівності (4.7) можна перетворити наступним чином

$$-\frac{1}{2}\int\left(\frac{\left(t_k^2-h^2\left(\frac{1}{2}-\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)t_k+\frac{h^4}{16}\right)^2}{\left(t_k-\frac{h}{4}\right)\left(t_k+\frac{h}{4}\right)\left(t_k-\frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)\right)\left(t_k-\frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\right)\right)}\times\right.$$

$$\times \frac{dt_k}{\left(t_k - \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\right)\right)}\Bigg) =$$

$$= \ln\left[\left(\frac{t_k - \frac{h^2}{4}}{\left(t_k + \frac{h^2}{4}\right)\left(t_k - \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau_2}{\tau_1}\right)\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{t_k - \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\right)}{t_k - \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\right)}\right)^{\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}}\right], \tag{4.8}$$

де $k = \overline{0,3}$. В (4.8) розглядаємо будь-яку вітку кореня квадратного та логарифма.

З рівностей (4.5) – (4.8) отримаємо наступне співвідношення рівносильне рівності (4.4)

$$\left(\frac{t_k - \frac{h^2}{4}}{\left(t_k + \frac{h^2}{4}\right)\left(t_k - \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau_2}{\tau_1}\right)\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{t_k - \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\right)}{t_k - \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\right)}\right)^{\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}} =$$

$$= C_k z^{\gamma_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \tag{4.9}$$

де функції t_k задано формулами (4.6), C_k, γ_k, $k = \overline{0,3}$ — деякі сталі, а для кореня можна розглядати будь-яку з його віток.

Знайдемо корені чисельника підінтегрального виразу записаного в правій частині рівності (4.7). Для цього розв'яжемо квадратне рівняння

$$t_k^2 - h^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau_2}{\tau_1}\right)t_k + \frac{h^4}{16} = 0, \quad k = \overline{0,3}. \tag{4.10}$$

Розв'язком рівняння (4.10) буде значення

$$t^{(1)} := \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau_2}{\tau_1} + \sqrt{\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^2 - \frac{\tau_2}{\tau_1}}\right),$$

де розглядається довільна вітка кореня квадратного.

Тепер знайдемо $|C_k|$. Для цього використаємо те, що при складному відображення $t_k\left(w_k\left(z\right)\right)$ прообразом точки $t^{(1)}$ є деяка точка $z_k^{(1)}$, причому $z_k^{(1)} \in l = \{z:\, |z| = 1\}$, $k = \overline{0,3}$.

Враховуючи вищесказане із співвідношення (4.9) слідує наступна рівність

$$|C_k| = \left| \frac{t^{(1)} - \frac{h^2}{4}}{\left(t^{(1)} + \frac{h^2}{4}\right)\left(t^{(1)} - \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau_2}{\tau_1}\right)\right)} \right|^{\frac{1}{2}} \cdot \left| \frac{t^{(1)} - \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\right)}{t^{(1)} - \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\right)} \right|^{\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}}, \tag{4.11}$$

де $k = \overline{0,3}$, а вітка кореня береться така ж, як і в рівності (4.9).

Формулу (4.11), враховуючи означення величини $t^{(1)}$, можна переписати наступним чином

$$|C_k| = \frac{\sqrt{2}}{h} \cdot \frac{\left|\frac{\tau_2}{\tau_1} - 1\right|^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}} - 1\right)}}{\left(\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}} + 1\right)^{\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}}}, \quad k = \overline{0,3}, \tag{4.12}$$

Для знаходження γ_k, $k = \overline{0,3}$, треба визначити лишки функції

$$u(w_k) := \frac{\sqrt{w_k^4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\tau_2}{\tau_1}\right) h^2 w_k^2 + \frac{h^4}{16}}}{w_k\left(w_k^2 + \frac{h^2}{4}\right)}, \quad k = \overline{0,3},$$

в околі, відповідно точок $w_0^{(0)} := 0$, $w_1^{(0)} := i\frac{h}{2}$, $w_2^{(0)} := -i\frac{h}{2}$, $w_3^{(0)} := \infty$, а потім поставити перед ним знак ± 1, враховуючи те, що $w_k\left(0\right) = w_k^{(0)}$, $k = 0, 1, 2$, $w_3\left(\infty\right) = \infty$.

Згідно вищесказаного отримаємо

$$\gamma_0 = \gamma_3 = 1, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = -\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}. \tag{4.13}$$

Користуючись рівностями (4.9), (4.13), можна отримати рівняння екстремальних функцій $w_k(z)$, $k=0,1,2,3$. Маємо,

$$z=\frac{1}{C_k}\cdot\left(\frac{t_k(w_k)-\frac{h^2}{4}}{\left(t_k(w_k)+\frac{h^2}{4}\right)\left(t_k(w_k)-\frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(\frac{t_k(w_k)-\frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\right)}{t_k(w_k)-\frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\right)}\right)^{\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}},\quad k=0,3, \tag{4.14}$$

$$z=C_k^{\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}}\cdot\left(\frac{t_k(w_k)-\frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\right)}{t_k(w_k)-\frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\right)}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\left(t_k(w_k)+\frac{h^2}{4}\right)\left(t_k(w_k)-\frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)\right)}{t_k(w_k)-\frac{h^2}{4}}\right)^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}},\quad k=1,2, \tag{4.15}$$

де функції $t_k(w_k)$, $k=\overline{0,3}$ визначені формулами (4.6).

З формул (4.6) та (4.14), враховуючи рівності (4.11), отримаємо

$$|z'(0)|=\frac{2}{h}\cdot\frac{\left(\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}+1\right)^{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}ght\right)}}{\left|\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}-1\right|^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}-1\right)}}, \tag{4.16}$$

$$|z'(\infty)|=\frac{2}{h}\cdot\frac{\left|\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}-1\right|^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}-1\right)}}{\left(\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}+1\right)^{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\right)}}. \tag{4.17}$$

З рівностей (4.16), (4.17) та з огляду на те, що для однозв'язних областей гіперболічного типу внутрішній радіус збігається з конформним, отримаємо значення внутрішнього радіуса

$$r\left(B_0^0,0\right)=\frac{h\sqrt{\tau_1}\mid\sqrt{\tau_2}-\sqrt{\tau_1}\mid^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}-1\right)}}{2\left(\sqrt{\tau_2}+\sqrt{\tau_1}\right)^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}+1\right)}}, \tag{4.18}$$

$$r\left(B_3^0,\infty\right)=\frac{2\sqrt{\tau_1}\mid\sqrt{\tau_2}-\sqrt{\tau_1}\mid^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}-1\right)}}{h\left(\sqrt{\tau_2}+\sqrt{\tau_1}\right)^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}+1\right)}}. \qquad (4.19)$$

Аналогічно, з формул (4.6) та (4.15), враховуючи рівності (4.11), маємо

$$\left|z'\left(\pm i\frac{h}{2}\right)\right|=\frac{1}{h}\cdot\frac{\left(\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}+1\right)^{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}\right)}}{\left|\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}-1\right|^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}-1\right)}}. \qquad (4.20)$$

З рівності (4.20), враховуючи те, що для однозв'язних областей гіперболічного типу внутрішній радіус збігається з конформним, отримаємо співвідношення

$$r\left(B_k^0,(-1)^{k+1}\cdot i\frac{h}{2}\right)=\frac{h\sqrt{\tau_2}\mid\sqrt{\tau_2}-\sqrt{\tau_1}\mid^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}-1\right)}}{\left(\sqrt{\tau_2}+\sqrt{\tau_1}\right)^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}+1\right)}},\quad k=1,2. \qquad (4.21)$$

Підставляючи рівності (4.18), (4.19) та (4.21) в функціонал

$$W_2\left(p\right)=\left(r\left(B_0,0\right)r\left(B_3,\infty\right)\right)^{\tau_1}\cdot\left(\frac{r\left(B_1,a_1\right)r\left(B_2,a_2\right)}{\left|a_1-a_2\right|^2}\right)^{\tau_2},$$

та враховуючи те, що

$$\left|a_1-a_2\right|^2=h^2,$$

отримаємо нерівність (4.1). *Лема 4.1 доведена.*

Лема 4.2. *При* $\tau\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ *функція*

$$S(\tau)=\ln\Psi\left(\tau\right)=\ln\frac{\tau^{2\tau^2}}{\mid 1-\tau\mid^{(\tau-1)^2}\left(1+\tau\right)^{(\tau+1)^2}} \qquad (4.22)$$

є опуклою.

Доведення леми 4.2. Представимо функцію (4.22) наступним чином

$$S(\tau)=2\tau^2\ln\tau-\left(\tau-1\right)^2\ln\mid 1-\tau\mid-\left(\tau+1\right)^2\ln\left(1+\tau\right). \qquad (4.23)$$

З (4.23), маємо,

$$S'(\tau)=\ln\frac{\tau^{4\tau}}{\mid 1-\tau\mid^{2(\tau-1)}\,(1+\tau)^{2(\tau+1)}}=$$

$$=4\tau\ln\tau-2\,(\tau-1)\ln\mid 1-\tau\mid -2\,(\tau+1)\ln\,(1+\tau)\,.$$

Аналогічно з (4.22), отримаємо,

$$S''(\tau)=4\ln\tau-2\ln\mid 1-\tau\mid -2\ln\,(1+\tau)=2\ln\frac{\tau^2}{\mid 1-\tau\mid\,(1+\tau)}.$$

Знайдемо точки перегину та інтервали опуклості функції (4.22). Для цього прирівнюємо другу похідну до нуля. При цьому отримаємо рівняння

$$\frac{\tau^2}{\mid 1-\tau\mid\,(1+\tau)}=1. \tag{4.24}$$

Вираз (4.24) можна перетворити наступним чином

$$\frac{\tau^2-(\tau+1)\mid 1-\tau\mid}{\mid 1-\tau\mid\,(1+\tau)}=0. \tag{4.25}$$

При розв'язуванні рівняння (4.25) можливі два наступних випадки:

$$1)\quad \tau>1:\quad \frac{\tau^2-(\tau+1)\mid 1-\tau\mid}{\mid 1-\tau\mid\,(1+\tau)}=\frac{1}{(\tau-1)\,(1+\tau)}; \tag{4.26}$$

$$2)\quad 0\le\tau<1:\quad \frac{\tau^2-(\tau+1)\mid 1-\tau\mid}{\mid 1-\tau\mid\,(1+\tau)}=-\frac{2\left(\tau-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\tau+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{(\tau-1)\,(1+\tau)}.$$

У випадку 1) формул (4.26) вираз більший нуля. Отже, з випадків 1) і 2) формул (4.26) видно, що функція (4.22), при $\tau\ge 0$, має єдину точку перегину

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тому з виразів (4.26) слідує, що функція (4.22) буде опуклою, при

$$\tau\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

а проміжок вгнутості буде

$$\tau \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right).$$

Лема 4.2 доведена.

4.3. Деякі оцінки функціоналів для променевих систем точок

На класах $\mathbf{P}_n$ та $\widehat{\mathbf{P}}_n$ розглянемо функціонали 2.1 та 2.2, відповідно.

Введемо у розгляд екстремальну задачу.

Задача 4.1. Для різних променевих систем точок $A_n \in \Lambda_n$ необхідно знайти максимум функціоналу (2.1) і визначити всі екстремальні відмічені області $p \in \mathbf{P}_n$ при умові, що $\eta \le \eta_0$, де η_0 деяке фіксоване додатне дійсне число.

Рішення задачі 4.1 дає наступна теорема.

Теорема 4.1. *Для будь-яких $n \ge 3$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0; 0,125]$ та η_0, $0 < \eta_0 < \infty$, для всіх наборів $p \in \mathbf{P}_n$ з променевою системою $A_n \in \Lambda_n$ такою, що*

$$\eta\left(A_n\right) \le \eta_0,$$

справедлива нерівність

$$J_n\left(p\right) \le J_n\left(p_0\right), \tag{4.27}$$

де $p_0 = \{(D_k, d_k)\}_{k=0}^{n+1} \in \mathbf{P}_n$, D_k и d_k, $k = \overline{0, n+1}$ відповідно кругові області та полюси квадратичного диференціалу

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\alpha w^{2n} + \eta_0\left(n^2 - 2\alpha\right)w^n + \alpha\eta_0^2}{w^2\left(w^n - \eta_0\right)^2}dw^2. \tag{4.28}$$

Доведення теореми 4.1. Як і раніше, наші дослідження будуть базуватися на застосуванні кусочно-поділяючого перетворення В. Н. Дубиніна (див. [28 – 32]).

Функція

$$\zeta_k(w) = -i\left(e^{-i\arg a_k} w\right)^{\frac{1}{\sigma_k}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{4.29}$$

конформно відображає область

$$M_k := \begin{cases} w: \ \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}, \quad k = \overline{1, n-1} \\ w: \ \arg a_n < \arg w < 2\pi, \quad k = n \end{cases}$$

на праву півплощину. Із співвідношень (4.29) легко бачити, що

$$\begin{gathered} |\zeta_k(w) - \zeta_k(a_m)| \sim \frac{1}{\sigma_k} |a_m|^{\frac{1}{\sigma_k}-1} |w - a_m|, \quad w \to a_m, \\ k = 1, 2, ..., n-1, \quad m = k, k+1; \\ |\zeta_n(w) - \zeta_n(a_m)| \sim \frac{1}{\sigma_n} |a_m|^{\frac{1}{\sigma_n}-1} |w - a_m|, \quad w \to a_m, \quad m = 1, n; \\ |\zeta_k(w)| = |w|^{\frac{1}{\sigma_k}}, \qquad w \to 0, \ w \to \infty. \end{gathered} \tag{4.30}$$

Позначимо

$$\begin{gathered} \zeta_k(a_k) =: \omega_k^{(1)}, \ \zeta_k(a_{k+1}) =: \omega_k^{(2)}, \quad k = 1, 2, ..., n-1; \\ \zeta_n(a_n) =: \omega_n^{(1)}, \ \zeta_n(a_1) =: \omega_n^{(2)}. \end{gathered} \tag{4.31}$$

З формул (4.29) і (4.31) отримаємо, що

$$\omega_k^{(1)} = \zeta_k(a_k) = -i\left(\frac{|a_k|}{a_k} a_k\right)^{\frac{1}{\sigma_k}} = -i\,|a_k|^{\frac{1}{\sigma_k}},$$

$$\omega_k^{(2)} = \zeta_k\left(a_{k+1}\right) = -i\left(e^{i(\arg a_{k+1} - \arg a_k)}\left|a_{k+1}\right|\right)^{\frac{1}{\sigma_k}} = i\left|a_{k+1}\right|^{\frac{1}{\sigma_k}},\ k = \overline{1, n-1},$$

$$\omega_n^{(2)} = \zeta_n\left(a_1\right) = -i\left(e^{i(2\pi - \arg a_n)}\left|a_1\right|\right)^{\frac{1}{\sigma_n}} = i\left|a_1\right|^{\frac{1}{\sigma_n}}. \tag{4.32}$$

Згідно формул (4.32) мають місце рівності

$$\mid a_k \mid^{\frac{1}{\sigma_k}} + \mid a_{k+1} \mid^{\frac{1}{\sigma_k}} = \mid \omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)} \mid,\ k = \overline{1, n-1},$$

$$\mid a_n \mid^{\frac{1}{\sigma_n}} + \mid a_1 \mid^{\frac{1}{\sigma_n}} = \mid \omega_n^{(1)} - \omega_n^{(2)} \mid. \tag{4.33}$$

Результати поділяючого перетворення [30 – 32] областей B_0 і $B_\infty :=$ $= B_{n+1}$ щодо сімейства функцій $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$ позначимо відповідно $\left\{G_k^{(0)}\right\}_{k=1}^n$ і $\left\{G_k^{(\infty)}\right\}_{k=1}^n$. Результат поділяючого перетворення області B_k, $k = 2, 3, ...,$ n, щодо сімейства функцій $\{\zeta_{k-1}, \zeta_k\}$ позначимо $\left\{G_{k-1}^{(2)}, G_k^{(1)}\right\}$. Для області B_1 результатом поділяючого перетворення щодо сімейства функцій $\{\zeta_1, \zeta_n\}$ будуть пари областей $\left\{G_1^{(1)}, G_n^{(2)}\right\}$. Таким чином, сукупність областей $\{M_k\}_{k=1}^n$ і будь-яка система $p \in \mathbf{P}_n$ породжують систему відмічених областей $\nu_k := \left\{\left(G_k^{(0)}, 0\right), \left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right), \left(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right), \left(G_k^{(\infty)}, \infty\right)\right\} \in$ $\in \mathbf{P}_2^*$, де клас $\mathbf{P}_2^*$ введений в підрозділі 2.1, $k = \overline{1, n}$.

З теореми 1.9 [32] та співвідношень (4.30) і (4.32) слідують нерівності

$$r\left(B_k, a_k\right) \leq \left[\frac{r\left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right)}{\frac{1}{\sigma_k} \cdot |a_k|^{\frac{1}{\sigma_k} - 1}} \cdot \frac{r\left(G_{k-1}^{(2)}, \omega_{k-1}^{(2)}\right)}{\frac{1}{\sigma_{k-1}} \cdot |a_k|^{\frac{1}{\sigma_{k-1}} - 1}}\right]^{\frac{1}{2}} \quad \forall k = 2, ..., n,$$

$$r\left(B_1, a_1\right) \leq \left[\frac{r\left(G_1^{(1)}, \omega_1^{(1)}\right)}{\frac{1}{\sigma_1} \cdot |a_1|^{\frac{1}{\sigma_1} - 1}} \cdot \frac{r\left(G_n^{(2)}, \omega_n^{(2)}\right)}{\frac{1}{\sigma_n} \cdot |a_1|^{\frac{1}{\sigma_n} - 1}}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{4.34}$$

$$r\left(B_0,0\right) \le \prod_{k=1}^{n}\left[r\left(G_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{\sigma_k^2}{2}},$$

$$r\left(B_\infty,\infty\right) \le \prod_{k=1}^{n}\left[r\left(G_k^{(\infty)},\infty\right)\right]^{\frac{\alpha_k^2}{2}}.$$

Умови реалізації знака рівності в нерівностях (4.34) повністю описані в теоремі 1.9 [32]. На підставі співвідношень (4.34) одержимо нерівність

$$J_n\left(p\right) = \left[r\left(B_0,0\right)\cdot r\left(B_\infty,\infty\right)\right]^{\alpha}\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \le$$

$$\le \left(r\left(G_n^{(0)},0\right)\cdot r\left(G_n^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\frac{\alpha\sigma_n^2}{2}}\cdot\left(\frac{r\left(G_n^{(1)},\omega_n^{(1)}\right)\cdot r\left(G_n^{(2)},\omega_n^{(2)}\right)}{\frac{1}{\sigma_{n-1}\sigma_n}\left(|a_n|\cdot|a_1|\right)^{\frac{1}{\sigma_n}-1}}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n-1}\left\{\left(r\left(G_k^{(0)},0\right)\cdot r\left(G_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\frac{\alpha\sigma_k^2}{2}}\cdot\left(\frac{r\left(G_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(G_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)}{\frac{1}{\sigma_{k-1}\sigma_k}\left(|a_k|\cdot|a_{k+1}|\right)^{\frac{1}{\sigma_k}-1}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{4.35}$$

$$\forall p\in\mathbf{P}_n.$$

Вираз (4.35) можна записати наступним чином

$$J_n \le \prod_{k=1}^{n}\frac{\sigma_k}{|a_k|^{\frac{1}{\sigma_k}-1}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left\{r\left(G_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(G_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)\cdot\left(r\left(G_k^{(0)},0\right)\cdot r\left(G_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\alpha\sigma_k^2}\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{4.36}$$

Помножимо та поділимо праву частину нерівності (4.36) на величину

$$\left(|a_1|^{\frac{1}{\sigma_n}}+|a_n|^{\frac{1}{\sigma_n}}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\left(|a_k|^{\frac{1}{\sigma_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\sigma_k}}\right).$$

Отримаємо,

$$J_n \le \frac{|a_n|^{\frac{1}{\sigma_n}} + |a_1|^{\frac{1}{\sigma_n}}}{|a_n|^{\frac{1}{\sigma_n}-1}} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{|a_k|^{\frac{1}{\sigma_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\sigma_k}}}{|a_k|^{\frac{1}{\sigma_k}-1}} \cdot \prod_{k=1}^{n} \sigma_k \times$$

$$\times \left\{ \left(r\left(G_n^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(G_n^{(\infty)}, \infty\right)\right)^{\alpha\sigma_n^2} \cdot \frac{r\left(G_n^{(1)}, \omega_n^{(1)}\right) \cdot r\left(G_n^{(2)}, \omega_n^{(2)}\right)}{\left(|a_1|^{\frac{1}{\sigma_n}} + |a_n|^{\frac{1}{\sigma_n}}\right)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{r\left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{\left(|a_k|^{\frac{1}{\sigma_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\sigma_k}}\right)^2} \cdot \left(r\left(G_k^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(G_k^{(\infty)}, \infty\right)\right)^{\alpha\sigma_k^2} \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{4.37}$$

Легко бачити, що

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{\sigma_n}} + |a_1|^{\frac{1}{\sigma_n}}}{|a_n|^{\frac{1}{\sigma_n}-1}} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{|a_k|^{\frac{1}{\sigma_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\sigma_k}}}{|a_k|^{\frac{1}{\sigma_k}-1}} =$$

$$= 2\chi\left(\left|\frac{a_n}{a_1}\right|^{\frac{1}{2\sigma_n}}\right)|a_n| \cdot \prod_{k=1}^{n-1}\left[2\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\sigma_k}}\right)|a_k|\right], \tag{4.38}$$

де $\chi(t) = \frac{1}{2}\left(t + t^{-1}\right).$

Нерівність (4.37), враховуючи рівності (4.38), можна переписати наступним чином

$$J_n \le 2^n \cdot \chi\left(\left|\frac{a_n}{a_1}\right|^{\frac{1}{2\sigma_n}}\right)|a_n| \cdot \prod_{k=1}^{n} \sigma_k \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\sigma_k}}\right)|a_k| \times$$

$$\times \left\{ \left(r\left(G_n^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(G_n^{(\infty)}, \infty\right)\right)^{\alpha\sigma_n^2} \cdot \frac{r\left(G_n^{(1)}, \omega_n^{(1)}\right) \cdot r\left(G_n^{(2)}, \omega_n^{(2)}\right)}{\left(|a_1|^{\frac{1}{\sigma_n}} + |a_n|^{\frac{1}{\sigma_n}}\right)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{r\left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{\left(|a_k|^{\frac{1}{\sigma_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\sigma_k}}\right)^2} \cdot \left(r\left(G_k^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(G_k^{(\infty)}, \infty\right)\right)^{\alpha\sigma_k^2} \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{4.39}$$

Очевидно, що
$$\prod_{k=1}^{n}\sigma_k \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n, \tag{4.40}$$
причому знак рівності в нерівності (4.40) досягається тоді і тільки тоді, коли $\sigma_1 = \sigma_2 = ... = \sigma_n = \frac{2}{n}$.

Користуючись співвідношеннями (4.32), (4.33) та (4.40), а також враховуючи умови теореми, із співвідношення (4.39) отримаємо таку нерівність:
$$J_n \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \eta_0 \times$$
$$\times \prod_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{r\left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{\mid \omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)} \mid^2}\cdot\left(r\left(G_k^{(0)}, 0\right)\cdot r\left(G_k^{(\infty)}, \infty\right)\right)^{\alpha\sigma_k^2}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{4.41}$$
$$\forall p \in \mathbf{P}_n.$$

Кожний вираз, який стоїть у фігурних дужках нерівності (4.41), є значення функціоналу
$$W_\tau = \left(r\left(B_0, 0\right)\cdot r\left(B_\infty, \infty\right)\right)^{\tau^2}\cdot\frac{r\left(B_1, a_1\right)\cdot r\left(B_2, a_2\right)}{\left|a_1 - a_2\right|^2},$$
на відмічених областях $\nu_k \in \mathbf{P}_2^*$, $k = \overline{1, n}$. На підставі леми 4.1 одержуємо оцінку
$$W_\tau \leq \Psi\left(\tau\right), \quad \tau \geq 0, \tag{4.42}$$
де
$$\Psi\left(\tau\right) = \frac{\tau^{2\tau^2}}{\left|\tau - 1\right|^{(\tau-1)^2}\cdot\left(\tau + 1\right)^{(\tau+1)^2}}, \quad \tau \geq 0. \tag{4.43}$$
Тоді з (4.41) враховуючи (4.42), отримаємо наступну оцінку
$$J_n \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \eta_0 \cdot \left(\prod_{k=1}^{n}\Psi\left(\sqrt{\alpha}\sigma_k\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.44}$$

З леми 4.2 слідує, що функція $\ln \Psi(\tau)$ опукла на проміжку $\left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Звідси маємо співвідношення

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln \Psi\left(\sqrt{\alpha}\sigma_k\right) \leq \ln \Psi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\alpha}\sigma_k\right), \tag{4.45}$$

для $0 \leq \sqrt{\alpha}\sigma_k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, $k = \overline{1, n}$. Причому знак рівності в нерівності (4.45) досягається тоді і тільки тоді, коли

$$\sigma_1 = \sigma_2 = ... = \sigma_n = \frac{2}{n}.$$

Нерівність (4.45) можна перетворити наступним чином.

$$\prod_{k=1}^{n} \Psi\left(\sqrt{\alpha}\sigma_k\right) \leq \left(\Psi\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{n}\right)\right)^n, \tag{4.46}$$

де $0 \leq \alpha \leq 0,125$. Знак рівності в нерівності (4.46) досягається тоді і тільки тоді, коли

$$\sigma_1 = \sigma_2 = ... = \sigma_n = \frac{2}{n}.$$

З нерівності (4.44), враховуючи (4.46), отримаємо співвідношення

$$J_n \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \eta_0 \cdot \left(\Psi\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{n}\right)\right)^{\frac{n}{2}} \tag{4.47}$$

для $0 \leq \alpha \leq 0,125$. З (4.47) випливає справедливість нерівності (4.27).

Зробивши заміну змінної по формулі $z = iw^{\frac{n}{2}}$ в квадратичному диференціалі (2.4) отримаємо квадратичний диференціал (4.28). *Теорема 4.1 доведена.*

З нерівності (4.47), враховуючи співвідношення (4.43), легко отримати наступний наслідок.

Наслідок 4.1. *Для будь-яких* $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0; 0,125]$ *та* η_0, $0 < \eta_0 < \infty$, *для всіх наборів* $p \in \mathbf{P}_n$ *з променевою системою* $A_n \in \Lambda_n$

такою, що

$$\eta\left(A_n\right) \leq \eta_0,$$

справедлива нерівність

$$J_n\left(p\right) \leq 4^n \cdot \eta_0 \cdot \sqrt[2n]{\frac{\left(4\alpha\right)^{4\alpha}}{\left|2\sqrt{\alpha}-n\right|^{\left(2\sqrt{\alpha}-n\right)^2} \cdot \left(2\sqrt{\alpha}+n\right)^{\left(2\sqrt{\alpha}+n\right)^2}}}. \qquad (4.48)$$

Наслідок 4.1 є досить важливим так, як він дає точну числову оцінку функціоналу (2.1) для задачі 4.1.

В теоремі 4.1 накладено обмеження на степінь α. Виникає питання, чи можна при певних умовах, зменшити це обмеження на степінь. Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 4.2. *Для довільних* $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, α, η_0, $0 \leq \alpha \leq \frac{n^2}{8}$, $0 < \eta_0 < < \infty$ *та всіх наборів відмічених областей* $p \in \mathbf{P}_n$ *з променевою системою* $A_n \in \Lambda_n$ *для якої виконуються умови:*

$$\sigma_k \leq \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \quad \forall k = \overline{1, n}, \qquad (4.49)$$

$$\eta\left(A_n\right) \leq \eta_0,$$

справедлива нерівність

$$J_n\left(p\right) \leq J_n\left(p_0\right),$$

де величина p_0 *визначена в теоремі 4.1. Причому числове значення* $J_n\left(p_0\right)$ *дорівнює правій частині нерівності (4.48).*

Доведення теореми 4.2 проводиться, в основному, аналогічно доведенню теореми 4.1, але відмітимо різницю між доведеннями цих теорем.

Так як $\sigma_k \geq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k = 2$, то умова

$$\sigma_k \leq \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}, \quad k = \overline{1,n}$$

означає, що при довільному $\alpha \in \left[0; \frac{n^2}{8}\right]$ наші променеві системи точок, взагалі кажучи, не є довільними, а є деякими нерівномірними променевими системами точок з певними обмеженнями на σ_k, $k = \overline{1,n}$. При $\alpha \to \frac{n^2}{8}$; $\sigma_k \to \frac{2}{n}$, та при $\alpha = \frac{n^2}{8}$; $\sigma_k = \frac{2}{n}$ $\forall k = \overline{1,n}$. Тобто при $\alpha = \frac{n^2}{8}$ променева система точок є рівномірною. Отже, в теоремі 4.2 отриманий результат, який підсилює результат теореми 4.1 на більш обмеженому класі променевих систем точок.

На класі $\mathbf{P}_n\left(\varepsilon_0\right)$ нерівність (4.49) записується у слідуючому вигляді

$$0 \leq \sqrt{\alpha}\left(\frac{2}{n} + \varepsilon_k\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{4.50}$$

де $|\varepsilon_k| < \varepsilon_0$, $k = \overline{1,n}$, ε_0 — деяке фіксоване додатне число.

Користуючись нерівністю (4.50) з теореми 4.2 слідує наступний наслідок.

Наслідок 4.2. *Для довільних фіксованих чисел* $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, η_0, $0 < \eta_0 < \infty$, ε_0, $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{n}$, α, $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2+\varepsilon_0 n}\right)^2$, *та для всіх наборів відмічених областей* $p \in \mathbf{P}_n\left(\varepsilon_0\right)$ *з променевою системою точок* $A_n \in \Lambda_n$ *такою, що*

$$\eta\left(A_n\right) \leq \eta_0,$$

справедлива нерівність

$$J_n\left(p\right) \leq J_n\left(p_0\right),$$

де величина p_0 *визначена в теоремі 4.1. Причому числове значення* $J_n\left(p_0\right)$ *дорівнює правій частині нерівності (4.48).*

Підносячи нерівність (4.27) до степеня $\beta \geq 0$ і вводячи позначення $\gamma := \alpha\beta$ отримаємо результати, які будуть випливати з теорем 4.1, 4.2 та наслідку 4.2, відповідно.

Наслідок 4.3. *Для будь-яких* $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, γ, $\beta \geq 0$, $\gamma + \beta > 0$, $\frac{\gamma}{\beta} \in [0; 0,125]$ *та* η_0, $0 < \eta_0 < \infty$, *для всіх наборів* $p \in \mathbf{P}_n$ *з променевою системою* $A_n \in \Lambda_n$ *такою, що*

$$\eta\left(A_n\right) \leq \eta_0,$$

справедлива нерівність

$$\left(r\left(B_0, 0\right) \cdot r\left(B_{n+1}, \infty\right)\right)^{\gamma} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)\right)^{\beta} \leq$$

$$\leq \left(r\left(D_0, 0\right) \cdot r\left(D_{n+1}, \infty\right)\right)^{\gamma} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, d_k\right)\right)^{\beta},$$

де області D_k *та точки* d_k, $k = \overline{0, n+1}$ *відповідно кругові області та полюси квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + \eta_0\left(\beta n^2 - 2\gamma\right) w^n + \gamma\eta_0^2}{w^2\left(w^n - \eta_0\right)^2} dw^2.$$

Наслідок 4.4. *Для будь-яких* $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, γ, $\beta \geq 0$, $\gamma + \beta > 0$, $0 \leq \frac{\gamma}{\beta} \leq \frac{n^2}{8}$, η_0, $0 < \eta_0 < \infty$, *і всіх наборів відмічених областей* $p \in \mathbf{P}_n$ *з променевою системою* $A_n \in \Lambda_n$ *для якої виконуються умови:*

$$\sigma_k \leq \sqrt{\frac{\beta}{2\gamma}} \quad \forall k = \overline{1, n},$$

$$\eta\left(A_n\right) \leq \eta_0,$$

справедлива нерівність

$$(r(B_0,0)\cdot r(B_{n+1},\infty))^{\gamma}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\right)^{\beta}\leq$$

$$\leq (r(D_0,0)\cdot r(D_{n+1},\infty))^{\gamma}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n} r(D_k,d_k)\right)^{\beta},$$

де області D_k та точки d_k, $k=\overline{0,n+1}$ визначені в наслідку 4.3.

Наслідок 4.5. *Для будь-яких $n\geq 3$, $n\in\mathbb{N}$, η_0, ε_0, $0<\eta_0<\infty$, $0<\varepsilon_0<\frac{1}{n}$, γ, $\beta\geq 0$, $\gamma+\beta>0$, $0\leq\frac{\gamma}{\beta}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2+\varepsilon_0 n}\right)^2$, та для всіх наборів відмічених областей $p\in\mathbf{P}_n(\varepsilon_0)$ з променевою системою точок $A_n\in\Lambda_n$ такою, що*

$$\eta(A_n)\leq\eta_0,$$

справедлива нерівність

$$(r(B_0,0)\cdot r(B_{n+1},\infty))^{\gamma}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\right)^{\beta}\leq$$

$$\leq (r(D_0,0)\cdot r(D_{n+1},\infty))^{\gamma}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n} r(D_k,d_k)\right)^{\beta},$$

де області D_k та точки d_k, $k=\overline{0,n+1}$ визначені в наслідку 4.3.

Наступний наслідок безпосередньо випливає з теореми 4.1 при $\alpha=0$.

Наслідок 4.6. *Для будь-яких $n\geq 3$, $n\in\mathbb{N}$, η_0, $0<\eta_0<\infty$, для всіх наборів $p\in\widehat{\mathbf{P}}_n$ таких, що*

$$\eta(A_n)\leq\eta_0,$$

справедлива нерівність

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\leq\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^0,a_k^0\right),$$

де відмічені області $\left\{\left(B_k^0, a_k^0\right)\right\}_{k=1}^n = \left\{\left(B_k^0, \sqrt[n]{\eta_0}e^{\frac{2\pi}{n}(k-1)i}\right)\right\}_{k=1}^n$, *а* B_k^0, $k=\overline{1,n}$ *кругові області квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{\left(w^n-\eta_0\right)^2}dw^2.$$

При $\alpha = 0$ з наслідку 4.1 слідує такий результат.

Наслідок 4.7. *Для будь-яких* $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, η_0, $0 < \eta_0 < \infty$, *для всіх наборів* $p \in \widehat{\mathbf{P}}_n$ *таких, що*

$$\eta\left(A_n\right) \leq \eta_0,$$

справедлива нерівність

$$\prod_{k=1}^n r\left(B_k, a_k\right) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \eta_0.$$

Безпосереднім наслідком попереднього результату є наступний класичний результат, який вперше отриманий у роботі О. К. Бахтіна [10].

Наслідок 4.8.([10]) *Для будь-яких* $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, *для всіх наборів* $p \in \widehat{\mathbf{P}}_n$ *таких, що*

$$\eta\left(A_n\right) \leq 1,$$

справедлива нерівність

$$\prod_{k=1}^n r\left(B_k, a_k\right) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n.$$

Для довільної системи попарно різних точок $\{a_k\}_{k=1}^n$, які належать одиничному колу $l = \{w : |w| = 1\}$ значення функції $\eta\left(A_n\right) = 1$. Враховуючи це зауваження з наслідку 4.8 отримаємо наступний результат.

Наслідок 4.9 ([28 – 32]). *Для будь-яких різних точок* a_k, $k = 1, 2, ..., n$, $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, *які належать одиничному колу та довільної с. н. о.* $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $a_k \in B_k$ $\forall k = 1, 2, ..., n$, *справедлива нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^{n}.$$

Наслідок 4.9 був описаний нами теоремою 1.8 у підрозділі 1.3, і він вперше отриманий в роботі [28], у вигляді наслідку більш сильного результату. (див., також [29 – 32]).

Для однозв'язних областей, в працях [36, 45], наслідок 4.9 було отримано іншими методами.

В задачі 4.1 значення η було додатне, але менше деякого фіксованого значення η_0. Тепер, по аналогії з підрозділом 2.2, ми зафіксуємо деяке значення $\eta = \eta_0$ і сформулюємо задачу по визначенню максимуму функціоналу (2.1) по відміченим областям $p \in \mathbf{P}_n$ з фіксованим значенням $\eta = \eta_0$.

Задача 4.2. Для довільного фіксованого значення $\eta = \eta_0$, $0 < \eta_0 <$ $< \infty$ знайти максимум функціоналу (2.1) на класі $\mathbf{P}_n$ і визначити такі відмічені області $p \in \mathbf{P}_n$ на яких цей максимум досягається.

Аналогічно підрозділу 2.2, для задачі 4.2 нескладно сформулювати твердження, які будуть безпосередніми наслідками вищесформульованих результатів, але це ми тут робити не будемо.

Як і в випадку теорем 2.1 та 2.2, для теореми 4.1 сформулюємо очевидний наслідок, який буде новим результатом на класі однолистих функцій.

Нехай $w = f_k\left(z\right)$, $k = \overline{0, n}$ — однолисті функції, які відображають одиничний круг $|z| < 1$ на попарно взаємно-неперетинні однозв'язні області $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, відповідно, а функція $w = f_{n+1}(z)$ однолисто відображає зовнішність одиничного круга $\{z : |z| > 1\}$ на область $B_{n+1} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_{n+1} \bigcap B_k = \varnothing$, $k = \overline{0,n}$, таким чином, що $f_0(0) = 0 \in B_0$, $f_k(0) = a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, $f_{n+1}(\infty) = \infty \in B_{n+1}$. Тоді справедливий наступний результат, який є безпосереднім наслідком теореми 4.1.

Наслідок 4.10. *Для будь-яких $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0; 0,125]$ та η_0, $0 < \eta_0 < \infty$, для всіх наборів $p \in \mathbf{P}_n$ з променевою системою $A_n \in \Lambda_n$ такою, що*

$$\eta(A_n) \leq \eta_0$$

та довільної системи однолистих функцій $w = f_k(z)$, $k = \overline{0,n+1}$, де функції $w = f_k(z)$, $k = \overline{0,n}$ відображають одиничний круг $|z| < < 1$ на попарно взаємно-неперетинні однозв'язні області $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = = \overline{0,n}$, відповідно, а функція $w = f_{n+1}(z)$ однолисто відображає зовнішність одиничного круга $\{z : |z| > 1\}$ на область $B_{n+1} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_{n+1} \bigcap B_k = \varnothing$, $k = \overline{0,n}$, таким чином, що $f_k(0) = a_k \in B_k$, $k = \overline{0,n}$, $f_{n+1}(\infty) = a_{n+1} = \infty \in B_{n+1}$, функціонал

$$\left|\frac{f_0'(0)}{f_{n+1}'(\infty)}\right|^{\alpha} \cdot \prod_{k=1}^{n} |f_k'(0)|$$

досягає свого максимуму на областях B_k^0 та точках a_k^0, $k = 0, 1, 2, ..., n$, $n+1$, які є, відповідно, системами кругових областей та полюсів квадратичного диференціалу

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\alpha w^{2n} + \eta_0\left(n^2 - 2\alpha\right) w^n + \alpha\eta_0^2}{w^2\left(w^n - \eta_0\right)^2} dw^2.$$

Слід звернути увагу на те, що ми сформулювали нові результати на класі однолистих функцій у вигляді наслідків тільки до деяких основних теорем роботи, але це можна зробити до всіх тверджень сформульованих у дисертаційній роботі.

4.4. Деякі точні оцінки функціоналів на класах $\mathbf{P}_n^0$ та $\widehat{\mathbf{P}}_n^0$

В підрозділі 4.3 ми побачили наскільки важливо мати точні числові оцінки функціоналів для відповідних задач. Тому в цьому підрозділі ми отримаємо точні оцінки для функціоналів і задач, які розглядалися в цій роботі. Але, із-за великої кількості різних результатів роботи, ми отримаємо тільки деякі оцінки. Всі інші аналогічні оцінки можна безпосередньо отримати із доведень відповідних теорем і їхнє одержання не становить труднощів.

Наступні твердження безпосередньо слідують з формулювань теореми 2.1 та наслідків 2.3, 2.4, відповідно, а також доповнюють ці результати.

Наслідок 4.11. *Для довільних $\alpha \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, μ_0, $0 < \mu_0 < \infty$ і всіх наборів $p \in \mathbf{P}_n^0$ із значенням $\mu = \mu_0$, справедлива нерівність*

$$J_n(p) = \left(r\left(B_0, 0\right) \cdot r\left(B_{n+1}, \infty\right)\right)^{\alpha} \cdot \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leq$$

$$\leq 4^n \cdot \mu_0 \cdot \sqrt[2n]{\frac{(4\alpha)^{4\alpha}}{|2\sqrt{\alpha}-n|^{(2\sqrt{\alpha}-n)^2} \cdot (2\sqrt{\alpha}+n)^{(2\sqrt{\alpha}+n)^2}}}. \qquad (4.51)$$

Причому знак рівності в нерівності (4.51) досягається на відмічених *областях* $p_0 = \left\{ \left(B_0^0, 0\right), \left(B_1^0, \sqrt[n]{\mu_0}\right), ..., \left(B_n^0, \sqrt[n]{\mu_0} e^{\frac{2\pi}{n}(n-1)}\right), \left(B_{n+1}^0, \infty\right) \right\}$, *а* B_s^0, $s = 0, 1, 2, ..., n, n+1$ *— система кругових областей квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\alpha w^{2n} + \mu_0\left(n^2 - 2\alpha\right) w^n + \alpha\mu_0^2}{w^2\left(w^n - \mu_0\right)^2} dw^2,$$

логарифмічна ємність множини всіх несуттєвих граничних компонент p_0 *рівна нулю, і тільки на них.*

Наслідок 4.12. *Для довільних* $\gamma \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma + \beta > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, μ_0, $0 < \mu_0 < \infty$ *і всіх наборів* $p \in \mathbf{P}_n^0$ *таких, що*

$$\mu\left(A_n\right) \leq \mu_0$$

справедлива нерівність

$$\left(r\left(B_0, 0\right) \cdot r\left(B_{n+1}, \infty\right)\right)^{\gamma} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)\right)^{\beta} \leq$$

$$\leq 4^{\beta n} \cdot \mu_0^{\beta} \cdot \sqrt[2n]{\frac{(4\gamma)^{4\gamma} \cdot \beta^{\beta n^2}}{\left|2\sqrt{\alpha} - n\right|^{\left(2\sqrt{\alpha} - n\right)^2} \cdot \left(2\sqrt{\alpha} + n\right)^{\left(2\sqrt{\alpha} + n\right)^2}}}. \qquad (4.52)$$

Знак рівності в нерівності (4.52) досягається на відмічених областях $p_0 = \left\{ \left(B_0^0, 0\right), \left(B_1^0, \sqrt[n]{\mu_0}\right), ..., \left(B_n^0, \sqrt[n]{\mu_0} e^{\frac{2\pi}{n}(n-1)}\right), \left(B_{n+1}^0, \infty\right) \right\}$, *а* B_s^0, $s = 0, 1, 2, ..., n, n+1$ *— система кругових областей квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + \mu_0\left(\beta n^2 - 2\gamma\right) w^n + \gamma\mu_0^2}{w^2\left(w^n - \mu_0\right)^2} dw^2,$$

логарифмічна ємність множини всіх несуттєвих граничних компонент p_0 *рівна нулю, і тільки на них.*

Наслідок 4.13. *Для довільних* $\alpha \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, μ_0, $0 < \mu_0 < \infty$ *і всіх наборів* $p = \{(B_k, a_k)\}_{k=0}^{n+1} \in \mathbf{P}_n^0$ *із значенням* $\mu = \mu_0$ *та довільної системи однолистих функцій* $w = f_k\left(z\right)$, $k = \overline{0, n+1}$, *де функції* $w = f_k\left(z\right)$, $k = \overline{0, n}$ *відображають одиничний круг* $|z| < 1$ *на попарно взаємно-неперетинні однозв'язні області* $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, *відповідно, а функція* $w = f_{n+1}\left(z\right)$ *однолисто відображає зовнішність одиничного круга* $\{z : |z| > 1\}$ *на область* $B_{n+1} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_{n+1} \bigcap B_k = \emptyset$, $k = \overline{0, n}$, *таким чином, що* $f_k\left(0\right) = a_k \in B_k$, $k = \overline{0, n}$, $f_{n+1}\left(\infty\right) = a_{n+1} = \infty \in B_{n+1}$, *справедлива оцінка*

$$\left|\frac{f_0'\left(0\right)}{f_{n+1}'\left(\infty\right)}\right|^{\alpha} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left|f_k'\left(0\right)\right| \leq 4^n \cdot \mu_0 \cdot \sqrt[2n]{\frac{\left(4\alpha\right)^{4\alpha}}{\left|2\sqrt{\alpha} - n\right|^{\left(2\sqrt{\alpha}-n\right)^2} \cdot \left(2\sqrt{\alpha} + n\right)^{\left(2\sqrt{\alpha}+n\right)^2}}}. \tag{4.53}$$

Причому знак рівності в нерівності (4.53) досягається на відмічених областях p_0 *введених у наслідку 4.11.*

Сформулюємо тепер ряд результатів, які безпосередньо слідують з теореми 3.1, наслідків 3.1 та 3.4 відповідно.

Наслідок 4.14. *Для довільних фіксованих чисел* $\gamma \geq 0$, ρ, $R > 0$ *та для довільного впорядкованого набору відмічених областей* $p = \{(B_k, a_k)\}_{k=0}^{n+1} \in \mathbf{P}_n^0\left(\rho, R\right)$ *справедлива нерівність*

$$\Theta_n = \left(r\left(B_0, 0\right) \cdot r\left(B_{n+1}, \infty\right)\right)^{\gamma} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \cdot |a_k|^{\frac{n}{2}-1}\right) \leq$$

$$\leq \left(4R^{\frac{n}{2}}\right)^n \cdot \sqrt[2n]{\frac{\left(4\gamma\right)^{4\gamma}}{\left|2\sqrt{\gamma} - n\right|^{\left(2\sqrt{\gamma}-n\right)^2} \cdot \left(2\sqrt{\gamma} + n\right)^{\left(2\sqrt{\gamma}+n\right)^2}}}. \tag{4.54}$$

Знак рівності в нерівності (4.54) досягається на відмічених областях виду $\left\{\left(B_0^0, 0\right), \left(B_1^0, R\right), \left(B_2^0, R \cdot e^{\frac{2\pi}{n}i}\right), ..., \left(B_n^0, R \cdot e^{\frac{2\pi}{n}(n-1)i}\right), \left(B_{n+1}^0, \infty\right)\right\}$, *а області* B_0^0, B_{n+1}^0, B_k^0, $k=1,2,...,n$ *є круговими областями квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2=-\frac{\gamma w^{2n}+\left(n^2-2\gamma\right)R^nw^n+\gamma R^{2n}}{w^2\left(w^n-R^n\right)^2}dw^2.$$

Наслідок 4.15. *Для довільних фіксованих чисел* α, $\beta\geq 0$, ρ, $R>0$, $\alpha+\beta>0$ *та для довільного впорядкованого набору відмічених областей* $p=\{(B_k,a_k)\}_{k=0}^{n+1}\in\mathbf{P}_n^0\left(\rho,R\right)$ *справедлива нерівність*

$$\left(r\left(B_0,0\right)\cdot r\left(B_{n+1},\infty\right)\right)^{\alpha}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right)\cdot|a_k|^{\frac{n}{2}-1}\right)^{\beta}\leq$$

$$\leq\left(4R^{\frac{n}{2}}\right)^{\beta n}\cdot\sqrt[2n]{\frac{(4\alpha)^{4\alpha}\cdot\beta^{\beta n^2}}{|2\sqrt{\alpha}-n|^{\left(2\sqrt{\alpha}-n\right)^2}\cdot\left(2\sqrt{\alpha}+n\right)^{\left(2\sqrt{\alpha}+n\right)^2}}}. \tag{4.55}$$

Знак рівності в нерівності (4.55) досягається на відмічених областях виду $\left\{\left(B_0^0,0\right),\left(B_1^0,R\right),\left(B_2^0,R\cdot e^{\frac{2\pi}{n}i}\right),...,\left(B_n^0,R\cdot e^{\frac{2\pi}{n}(n-1)i}\right),\left(B_{n+1}^0,\infty\right)\right\}$, *де області* B_0^0, B_{n+1}^0, B_k^0, $k=1,2,...,n$ *є круговими областями квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2=-\frac{\alpha w^{2n}+\left(\beta n^2-2\alpha\right)R^nw^n+\alpha R^{2n}}{w^2\left(w^n-R^n\right)^2}dw^2.$$

.

Наслідок 4.16. *Для довільних фіксованих чисел* ρ, $R>0$ *та для довільного впорядкованого набору відмічених областей* $p=$ $=\{(B_k,a_k)\}_{k=1}^{n}\in\widehat{\mathbf{P}}_n^0\left(\rho,R\right)$ *справедлива нерівність*

$$\Upsilon_n\left(p\right)=\prod_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right)\cdot|a_k|^{\frac{n}{2}-1}\leq\left(\frac{4R^{\frac{n}{2}}}{n}\right)^{n}. \tag{4.56}$$

Причому знак рівності в нерівності (4.56) досягається на відмічених областях виду $\left\{ \left(B_1^0, R\right), \left(B_2^0, R \cdot e^{\frac{2\pi}{n} i}\right), ..., \left(B_n^0, R \cdot e^{\frac{2\pi}{n}(n-1)i}\right) \right\}$, *а області* B_k^0, $k = 1, 2, ..., n$ *є круговими областями квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{\left(w^n - R^n\right)^2} dw^2.$$

Висновки до розділу 4

1. Повністю описана екстремальна конфігурація для функціоналу, що складається з добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей взятих відносно точок, що вільно рухаються по довільній променевій системі.

2. Знайдено максимальні значення деяких функціоналів, які розглядаються у дисертаційній роботі.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

1. Сформульована та повністю розв'язана досить загальна нова екстремальна задача для попарно взаємно неперетинних областей із вільними полюсами на так званих "рівномірних променевих системах точок". (Теорема 2.1).

2. Повністю розв'язана для рівномірних променевих систем точок екстремальна задача так званого "мішаного типу", тобто для якої деяка система полюсів є вільна, а деяка є фіксована. (Теореми 2.2 – 2.4).

3. Сформульована та повністю розв'язана нова екстремальна задача для попарно взаємно неперетинних областей із вільними полюсами, що рухаються по рівномірний променевій системі у деякому кільці. (Теорема 3.1).

4. Вирішена досить загальна аналогічна задача для добутку внутрішніх радіусів областей, що належать одиничному кругу. (Теореми 3.2, 3.3).

5. Розглянуті екстремальні задачі з вільними полюсами на одиничному колі у випадку трьох та чотирьох попарно взаємно неперетинних областей. (Теореми 3.4 – 3.6).

6. Розв'язана досить загальна екстремальна задача для попарно взаємно неперетинних областей із вільними полюсами на так званих "довільних променевих системах точок". (Теореми 4.1, 4.2).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александров И. А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1976. – 343 с.

2. Аленицын Ю. Е. Об однолистных функциях в многосвязных областях // Мат. сборник. – 1956. – **39** (81), № 2. – С. 315 – 336.

3. Андреев В. А. Экстремальные задачи для одного класса регулярных и ограниченных в круге функций // Доклады Академии Наук СССР, серия мат. – 1976. – **228,** № 4. – С. 769 – 771.

4. Бахтин А. К. О некоторых задачах в теории неналегающих областей // International Conference on Complex Analysis and Potential Theory: Abstracts. – Kiev: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2001. – С. 64.

5. Бахтин А. К. О произведении внутренних радиусов симметричных неналегающих областей // Укр. мат. журн. – 1997. – **49,** № 11. – С. 1454 – 1464.

6. Бахтин А. К. Некоторые задачи в теории неналегающих областей // Укр. мат. журн. – 1999. – **51,** № 6. – С. 723 – 731.

7. Бахтин А. К. О классах функций без общих значений // Экстремальные задачи теории однолистных функций. – Киев, 2002. – С. 3 – 9. – (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 2002.6).

8. Бахтин А. К. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности // Некоторые экстремаль-

ные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами. – Киев, 2003. – С. 1 – 45. – (Препр. НАН Украины. Ин-т математики; 2003.6).

9. Бахтин А. К. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности // Доп. Нац. Акад. наук України. – 2004. – № 8. – С. 7 – 15.

10. Бахтин А. К. Кусочно-разделяющее преобразование и экстремальные задачи со свободными полюсами на лучах // Доп. Нац. Акад. наук України. – 2004. – № 12. – С. 7 – 13.

11. Бахтин А. К. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на лучевых системах // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. – **1,** № 3. – С. 235 – 243.

12. Бахтин А. К. Экстремальные задачи со свободными полюсами на окружности // Доп. Нац. Акад. наук України. – 2005. – № 5. – С. 7 – 10.

13. Бахтин А. К., Таргонский А. Л. Некоторые экстремальные задачи теории конформных отображений // Экстремальные задачи теории однолистных функций. – Киев, 2002. – С. 10 – 14. – (Препр. НАН Украины. Ин-т математики; 2002.6).

14. Бахтин А. К., Таргонский А. Л. Некоторые экстремальные задачи в теории неналегающих областей // Комплексний аналіз і теорія по-

тенціалу: Праці українського математичного конгресу-2001: Секція 4. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. – С. 10 – 16.

15. Бахтин А. К., Таргонский А. Л. Некоторые экстремальные задачи теории неналегающих областей со свободными полюсами на лучах // Некоторые экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами. – Киев, 2003. – С. 46 – 67. – (Препр. НАН Украины. Ин-т математики; 2003.6).

16. Бахтин А. К., Таргонский А. Л. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на лучах // Доп. Нац. Акад. наук України. – 2004. – № 7. – С. 7 – 13.

17. Бахтин А. К., Таргонский А. Л. Некоторые экстремальные задачи на классе неналегающих областей // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. – **1,** № 3. – С. 244 – 253.

18. Бахтин А. К., Таргонский А. Л. Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы // Нелінійні коливання. – 2005. – **8,** № 3. – С. 298 – 303.

19. Бахтина Г. П. Об одной экстремальной задаче конформного отображения единичного круга на неналегающие области // Укр. мат. журн. – 1974. – **26,** № 5. – С. 646 – 648.

20. Бахтина Г. П. Метод граничных вариаций в задачах о неналегающих областях. Препринт ИМ-75-2. – Киев, 1975. – 35 с.

21. Бахтина Г. П. Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.

22. Бахтина Г. П., Бахтин А. К. Об экстремальных задачах для симметричных неналегающих областей // Укр. мат. журн. – 1997. – **49,** № 2. – С. 179 – 185.

23. Васильев А. Ю. Гармонические свойства модуля семейств кривых и инвариантные метрики на пространствах Тейхмюллера // Докл. РАН. – 1995. – **341,** № 5. – С. 583 – 584.

24. Голузин Г. М. Метод вариаций в конформном отображении. I, II, III, IV // Мат. сб. – 1946. – **19** (61), № 2. – С. 203 – 236; 1947. – **21** (63), № 1. – С. 83 – 117; № 2. – С. 119 – 132; 1951. – **29** (71), № 2. – С. 455 – 468.

25. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

26. Гутлянский В. Я. Параметрическое представление однолистных функций // Доклады Академии Наук СССР, серия мат. – 1970. – **194,** № 4. – С. 750 – 753.

27. Дженкинс Дж. А. Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.

28. Дубинин В. Н. О произведении внутренних радиусов "частично

неналегающих"областей // Вопросы метрической теории отображений и ее применение.– Киев: Наук. думка, 1978. – С. 24 – 31.

29. Дубинин В. Н. Метод симметризации в задачах о неналегающих областях // Мат. сб. – 1985. – **128,** № 1. – С. 110 – 123.

30. Дубинин В. Н. Метод симметризации в геометрической теории функций: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Владивосток, 1988. – 193 с.

31. Дубинин В.Н. Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168.** – С. 48 – 66.

32. Дубинин В. Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49** (295), № 1. – С. 3 – 76.

33. Дубинин В. Н. Асимптотика модуля выраждающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – 1997. – **237.** – С. 56 – 73.

34. Дубинин В. Н. Емкости конденсаторов в геометрической теории функций: Учебн. пособие. – Владивосток: Издание Дальневосточного ун-та, 2003. – 116 с.

35. Емельянов Е. Г. К задачам об экстремальном разбиении // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – 1986. – **154.** – С. 76 – 89.

36. Емельянов Е. Г. О связи двух задач об экстремальном разбиении // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – 1987. – **160.** – С. 91 – 98.

37. Емельянов Е. Г. К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2002. – **286.** – С. 103 – 114.

38. Ковалев Л. В. О трех непересекающихся областях // Дальневосточный математический журнал. – 2000. – **1,** № 1. – С. 3 – 7.

39. Ковалев Л. В. О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей // Изв. вузов. Матем. – 2000, № 6. – С. 82 – 87.

40. Колбина Л. И. Некоторые экстремальные задачи в конформном отображении // Доклады Академии Наук СССР, серия мат. – 1952. – **84,** № 5. – С. 865 – 868.

41. Колбина Л. И. Конформное отображение единичного круга на неналегающие области // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1955. – **5.** – С. 37 – 43.

42. Кузьмина Г. В. Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы. – Л.: Наука, 1980. – 241 с.

43. Кузьмина Г. В. К задаче о произведении конформных радиусов неналегающих областей // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – 1980. – **100.** – С. 131 – 145.

44. Кузьмина Г. В. К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей в круге // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – 1983. – **125.** – С. 99 – 113.

45. Кузьмина Г. В. К задаче об экстремальном разбиении n-связной области // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – 1990. – **185.** – С. 96 – 110.

46. Кузьмина Г. В. Методы геометрической теории функций. I, II // Алгебра и анализ. – 1997. – **9,** № 3. – С. 41 – 103; № 5. – С. 1 – 50.

47. Кузьмина Г. В. О связи различных задач об экстремальном разбиении // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 1998. – **254.** – С. 116 – 131.

48. Кузьмина Г. В. Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2001. – **276.** – С. 253 – 275.

49. Кузьмина Г. В. Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы. II, III // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2002. – **286.** – С. 126 – 147; 2004. – **314.** – С. 124 – 141.

50. Кузьмина Г. В. Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2003. – **302.** – С. 52 – 67.

51. Куфарев П. П., Фалес А. Э. Об одной экстремальной задаче для дополнительных областей // Доклады Академии Наук СССР, серия мат. – 1951. – **81,** № 6. – С. 995 – 998.

52. Лаврентьев М. А. К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5.** – С. 159 – 245.

53. Лебедев Н. А. Принцип площадей в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1975. – 336 с.

54. Лебедев Н. А. К теории конформных преобразований круга на неналегающие области // Доклады Академии Наук СССР, серия мат. – 1955. – **103,** № 4. – С. 553 – 555.

55. Лебедев Н. А. Об области значений одного функционала в задаче о неналегающих областях // Доклады Академии Наук СССР, серия мат. – 1957. – **115,** № 6. – С. 1070 – 1073.

56. Митюк И. П. Оценки внутреннего радиуса (емкости) некоторой области (конденсатора) // Изв. Северо-Кавказского науч. центра высш. школы. – 1983. – № 3. – С. 36 – 38.

57. Митюк И. П. Оценка сверху для произведения внутренних радиусов областей и теоремы покрытия // Изв. вузов. Математика. – 1987. – № 8. – С. 39 – 47.

58. Тамразов П. М. Теоремы покрытия линий при конформном отображении // Мат. сборник. – 1965. – **66** (108), № 4. – С. 502 – 524.

59. Тамразов П. М. Некоторые экстремальные задачи теории однолистных конформных отображений // Мат. сборник. – 1965. – **67** (109), № 3. – С. 329 – 337.

60. Тамразов П. М. К общей теореме о коэффициентах // Мат. сборник. – 1967. – **72** (114), № 1. – С. 59 – 71.

61. Тамразов П. М. Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов // Известия АН СССР, серия мат. – 1968. – **32,** № 5. – С. 1033 – 1043.

62. Таргонский А. Л. Об одной экстремальной задаче для трех неналегающих областей // International Conference on Complex Analysis and Potential Theory: Abstracts. – Kiev: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2001. – С. 84.

63. Таргонский А. Л. Оценки некоторых функционалов на классе неналегающих областей // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. – **1,** № 3. – С. 305 – 317.

64. Таргонский А. Л. Некоторые экстремальные задачи о неналегающих областях // International Workshop on Free Boundary Flows and Related Problems of Analysis: Abstracts. – Kiev: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2005. – С. 61 – 62.

65. Федоров С. И. О максимуме одного конформного инварианта в задаче о неналегающих областях // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – 1981. – **112.** – С. 172 – 183.

66. Хейман В. К. Многолистные функции. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.

67. Шиффер М., Спенсер Д. К. Функционалы на конечных римановых поверхностях. – М.: Изд-во иностр. лит., 1957. – 347 с.

68. Ahlfors L. V. Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen // Acta. Soc. Sci. Fenn. – 1930. – № 9. – S. 1 – 40.

69. Ahlfors L. V., Berling A. Conformal invariants and functiontheoretic null-sets // Acta. Math. – 1950. – **83,** № 1 – 2. – P. 101 – 129.

70. Bahtin A. K. Extremal problems for non-overlapping domains with free poles on closed curves // International Workshop on Potential Theory and Free Boundary Flows: Abstracts. – Kiev: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2003. – P. 4.

71. Bakhtin A. K., Targonskii A. L. An extremal problem for non-overlapping domains // International Workshop on Potential Flows and Complex Analysis : Abstracts. – Kiev: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2002. – P. 8 – 9.

72. Duren P.L., Schiffer M. A variation method for function schlicht in annulus // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1962. – **9.** – P. 260 – 272.

73. Grötzsch H. Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung. I, II // Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. – 1928. – **80,** № 6. – S. 367 – 376, 497 – 502.

74. Grötzsch H. Über ein Variationsprobleme der konformen Abbildung // Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. – 1930. – **82,** № 4. – S. 251 – 263.

75. Jenkins J. A. Some uniqueness results in the theory of symmetrization // Ann. Math. – 1955. – **61,** № 1. – P. 106 – 115.

76. Jenkins J. A. Some uniqueness results in the theory of symmetrization II // Ibid. – 1962. – **75,** № 2. – P. 223 – 230.

77. Nehari Z. Some inequalities in the theory of functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1953. – **75,** № 2. – P. 256 – 286.

78. Schaeffer A. C., Spencer D. C. Coefficient regions for schlicht functions. – New York: Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1950. – **35.** – 311 p.

79. Schiffer M. A method of variation within the family of simple functions // Proc. Lond. Math. Soc. – 1938. – **44.** – P. 432 – 449.

80. Schiffer M. On the coefficients of simple functions // Proc. Lond. Math. Soc. – 1938. – **44.** – P. 450 – 452.

81. Schiffer M. Variation of the Green functions and the theory of p-valent functions // Amer. J. Math. – 1943. – **65,** № 2. – P. 341 – 360.

82. Targonskii A. L. Extremal problems for non-overlapping domains with free poles on rays // International Workshop on Potential Theory and Free Boundary Flows: Abstracts. – Kiev: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2003. – P. 34.

83. Tsuji M. Potential theory in modern function theory. – Tokyo, 1959. – 590 p.