А. К. Бахтин, А. Л. Таргонский

Некоторые экстремальные задачи теории неналегающих областей со свободными полюсами на лучах[1]

В геометрической теории функций комплексного переменного экстремальные задачи о неналегающих областях представляют бурно развивающееся направление. Возникновение этого направлени связывается с известной работой академика М.А.Лаврентьева [1], где была впервые поставлена и решена задача о произведении конформных радиусов двух взаимно не пересекающихся односвязных областей. В последующем эта задача обобщалась и усиливалась в работах многих авторов (см. напр. [2] - [15]).

В работе [16] была разработана общая теория экстремальных задач со свободными полюсами ассоциированных квадратичных дифференциалов. В работе [5] были найдены новые экстремальные задачи со свободными полюсами в теории неналегающих областей. В частности, известный класс задач со свободными полюсами на окружности (см. [5], [7] - [15]).

В работе [10] была рассмотрена общая комбинированная экстремальная задача в которой часть полюсов ассоциированного квадратичного дифференциала фиксирована, а остальные обладают некоторой степенью свободы.

В данной работе решена новая экстремальная задача для неналегающих областей со свободными полюсами на лучах, обладающих определенной симметрией.

---

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Государственной программы Украины № 0102И000917.

Некоторые из задач исследуемых в данной работе относятся к указанному выше комбинированному типу экстремальных задач [10].

1. Обозначения и определения

Пусть N, R, C - обозначают системы натуральных, вещественных и комплексных чисел соответственно. Пусть $B \subset \overline{C}$ произвольная область комплексной плоскости и $a \in B$. Пару (B, a) назовем областью B с отмеченной точкой $a \in B$ или, кратко, отмеченной областью B.

Будем считать, что $(B_1, a_1) = (B_2, a_2)$ тогда и только тогда, когда $B_1 = B_2$ и $a_1 = a_2$.

Рассмотрим упорядоченный набор отмеченных областей $p_k := \{(B_p, a_p)\}_{p=1}^{k} = \{(B_1, a_1), ..., (B_k, a_k)\}$, $k \in N$. Каждому набору $p_k = \{(B_p, a_p)\}_{p=1}^{k}$ сопоставим следующие упорядоченные наборы $A_k := A_k(p_k) := \{a_p\}_{p=1}^{k}$, $F_k :=$ $= F_k(p_k) := \{B_p\}_{p=1}^{k}$. Для любых $p_k^{(1)} = \left\{\left(B_p^{(1)}, a_p^{(1)}\right)\right\}_{p=1}^{k}$, $p_k^{(2)} = \left\{\left(B_p^{(2)}, a_p^{(2)}\right)\right\}_{p=1}^{k}$, $A_k^{(1)} = A_k\left(p_k^{(1)}\right)$, $A_m^{(2)} = A_m\left(p_m^{(2)}\right)$, $F_k^{(1)} = F_k\left(p_k^{(1)}\right)$, $F_m^{(2)} = F_m\left(p_m^{(2)}\right)$, $k, m \in N$ понятие равенства определим следующими соотношениями:

$$p_k^{(1)} = p_m^{(2)} \Longleftrightarrow k = m, \left(B_p^{(1)}, a_p^{(1)}\right) = \left(B_p^{(2)}, a_p^{(2)}\right),$$

$$A_k^{(1)} = A_m^{(2)} \Longleftrightarrow k = m, a_p^{(1)} = a_p^{(2)} \qquad \forall p = 1, 2, ..., k = m,$$

$$F_k^{(1)} = F_m^{(2)} \Longleftrightarrow k = m, B_p^{(1)} = B_p^{(2)} \qquad \forall p = 1, 2, ..., k = m.$$

Нетрудно заметить, что приведенное определение равенства наборов $p_k^{(1)}$ и $p_m^{(2)}$ эквивалентно следующему

$$p_k^{(1)} = p_m^{(2)} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} k = m \\ A_k^{(1)} = A_m^{(2)} \\ F_k^{(1)} = F_m^{(2)} \end{array} \right. .$$

Систему $A_k = A_k(p_k)$ назовем системой полюсов p_k, а набор $F_k = F_k(p_k)$ - системой или набором областей p_k.

Пусть $\mathbf{P}_n(\mu)$, $n \in N$, $n \geq 2$ обозначает класс всех упорядоченных наборов произвольных отмеченных областей $p_n = \{(B_p, a_p)\}_{p=1}^{n} = \{(B_1, a_1), ..., (B_n, a_n)\}$ таких, что набор $F_n = F_n(p_n) = \{B_p\}_{p=1}^{n}$ удовлетворяет условиям

$$B_p \bigcap B_k = \emptyset \qquad \forall p, k = 1, 2, ..., n,\ p \neq k, \tag{1.1}$$

а для набора $A_n = A_n(p_n) = \{a_p\}_{p=1}^{n}$ выполняются следующие требования

$$A. \quad \arg a_k = \frac{2\pi}{n}(k-1),\ 0 < \mid a_k \mid < \infty, \qquad \forall k = 1, 2, ..., n, \tag{1.2}$$

$$B. \qquad \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \mid a_k \mid^{\frac{n}{2}}\right)^n}{\prod\limits_{k=1}^{n} \mid a_k \mid^{\frac{n}{2}-1}} \leq \mu,$$

где μ - фиксированное число, $0 < \mu < \infty$.

$\forall n \in N$, $n \geq 2$ классом $\mathbf{P}_n^0(\mu)$ назовем множество тех и только тех упорядоченных наборов отмеченных областей $p_{n+2} = \{(B_0, a_0), (B_1, a_1), ..., (B_n, a_n), (B_{n+1}, a_{n+1})\}$, для которых выполнены условия:

1. $B_k \bigcap B_j = \emptyset \qquad \forall k, j = 0, 1, ..., n, n+1,\ k \neq j$, где $\{B_k\}_{k=0}^{n+1} = F_{n+2}(p_{n+2}) = F_{n+2}$ - набор областей элемента p_{n+2}.

2. Система полюсов $A_{n+2} = A_{n+2}\left(p_{n+2}\right) = \{a_k\}_{k=0}^{n+1}$ элемента p_{n+2} такова, что $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \infty$, а набор точек $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ удовлетворяет условиям (1.2).

В дальнейшем будем записывать систему полюсов элемента $p_{n+2} \in \mathbf{P}_n^0\left(\mu\right)$ в виде $A_{n+2} = A_{n+2}\left(p_{n+2}\right) =$
$= \left\{0, \{a_k\}_{k=1}^{n}, \infty\right\} = \left\{0, a_1, a_2, ..., a_n, \infty\right\}.$

Если в определении классов $\mathbf{P}_n\left(\mu\right)$ и $\mathbf{P}_n^0\left(\mu\right)$ пункт B системы условий (1.2) заменить на следующий

$$B. \qquad \frac{\left[\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \mid a_k \mid^{\frac{n}{2}}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \mid a_k \mid\right)\right]^n}{\prod\limits_{k=1}^{n} \mid a_k \mid^{\frac{n}{2}}} \leq \mu,$$

то соответствующие классы обозначим $\breve{\mathbf{P}}_n\left(\mu\right)$, $\breve{\mathbf{P}}_n^0\left(\mu\right)$.

$\forall \alpha, \beta \in R, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta \neq 0$ на классе $\mathbf{P}_n^0(\mu)$ определим функционал

$$J_n^{\alpha,\beta} = J_n^{\alpha,\beta}\left(p_{n+2}\right) = \left(r\left(B_0, 0\right) \cdot r\left(B_{n+1}, \infty\right)\right)^{\alpha} \times$$

$$\times \left(\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)\right)^{\beta}, \qquad p_{n+2} \in \mathbf{P}_n^0(\mu), \tag{1.3}$$

где $r\left(B_k, a_k\right)$ - внутренний радиус отмеченной области B_k, относительно точки a_k (определение внутреннего радиуса области см., например [9], [17]).[2]

[2]Отметим, что принятое в работе [9] определение величины $r\left(B, \infty\right)$ несколько отличается от традиционного (см. [2], [7]), но является, на наш взгляд, более естественным. В данной работе мы придерживаемся определения величины $r\left(B, \infty\right)$ предложенного в [9].

При $\alpha = 0$ функционал (1.3), на классе $\mathbf{P}_n(\mu)$, примет вид

$$I_n = I_n\left(p_n\right) = \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right), \qquad p \in \mathbf{P}_n(\mu). \tag{1.4}$$

Всюду в дальнейшем будем считать числа n, α, β, μ такие, что $n \in N, \alpha, \beta, \mu \in R; \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta \neq 0,$
$0 < \mu < \infty$ - произвольным образом фиксированными.

Сформулируем следующие задачи.

Задача 1. Найти максимум функционала $I_n = I_n(p_n)$ на классе $\mathbf{P}_n(\mu)$ и определить все экстремали $p_n \in \mathbf{P}_n(\mu)$.

Задача 2. Найти максимум функционала $J_n = J_n^{\alpha,\beta}(p_{n+2})$ на классе $\mathbf{P}_n^0(\mu)$ и определить все экстремали $p_{n+2} \in \mathbf{P}_n^0(\mu)$.

Задачу 1, рассмотренную для класса $\check{\mathbf{P}}_n\left(\mu\right)$, назовем задачей $1'$. Аналогично задачу 2, рассмотренную для класса $\check{\mathbf{P}}_n^0\left(\mu\right)$, назовем задачей $2'$.

Задачи 1, 2, $1'$, $2'$ являются экстремальными задачами для классов неналегающих областей, так как классы $\mathbf{P}_n(\mu)$, $\mathbf{P}_n(\mu)$, $\check{\mathbf{P}}_n^0\left(\mu\right)$, $\check{\mathbf{P}}_n\left(\mu\right)$ удовлетворяют условию (1.1).

Вероятно, даже задача 1, сформулированная для функционала (1.4), является новой.

По-видимому, впервые задачи со свободными полюсами на лучах появились в работе [18].

Используемые в данной работе сведения из теории квадратичных дифференциалов можно найти в монографии [4, гл. 3].

Пусть $Q(w)dw^2$ квадратичный дифференциал на $\overline{C}$. Пусть $\prod$ - множество всех нулей и простых полюсов $Q(w)dw^2$. Пусть L - траектория квадратичного дифференциала $Q(w)dw^2$, а $\overline{L}$ - ее замыкание. Если $\overline{L} \bigcap \prod \neq \emptyset$, то траекторию дифференциала назовем особой. Обозначим через Φ - объединение всех особых траекторий. Через $\widehat{E}$ - будем обозначать внутренность замыкания множества E. Известно [4], что, вообще говоря, $\widehat{\Phi} \neq \varnothing$.

$\forall n \in N$, $n \geq 2$ рассмотрим следующий квадратичный дифференциал

$$Q(w)dw^2 = -\left[\frac{\alpha\mu}{n^n}\right] \cdot \frac{\left(\frac{n^n}{\mu}\right) w^{2n} + \left(\frac{\beta}{\alpha} n^2 - 2\right) w^n + \frac{\mu}{n^n}}{w^2 \left(w^n - \frac{\mu}{n^n}\right)^2} dw^2. \quad (1.5)$$

С дифференциалом (1.5) ассоциирована система

$$p^0_{n+2} = \left\{\left(B^0_k, a^0_k\right)\right\}_{k=0}^{n+1} \in \mathbf{P}^0_n(\mu), \quad (1.6)$$

где $F^0_{n+2} = F_{n+2}\left(p^0_{n+2}\right) = \{B^0_k\}_{k=0}^{n+1}$ - систему круговых областей, а $A^0_{n+2} = A_{n+2}\left(p^0_{n+2}\right) = \{a^0_k\}_{k=0}^{n+1} =$
$= \left\{0, \frac{\sqrt[n]{\mu}}{n}, ..., \frac{\sqrt[n]{\mu}}{n} e^{i\frac{2\pi}{n}(n-1)}, \infty\right\}$ - набор полюсов квадратичного дифференциала (1.5).

При $\alpha = 0$ квадратичный дифференциал (1.5) имеет вид

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\mu\beta}{n^{n-2}} \cdot \frac{w^{n-2}}{\left(w^n - \frac{\mu}{n^n}\right)^2} dw^2. \quad (1.7)$$

Аналогичным образом, с дифференциалом (1.7) ассоциирована система

$$p^0_n = \left\{\left(B^0_k, a^0_k\right)\right\}_{k=1}^{n} \in \mathbf{P}_n(\mu), \quad (1.8)$$

где $F^0_n = \{B^0_k\}_{k=1}^n$ - систему круговых областей, а $A^0_n =$
$= \left\{\frac{\sqrt[n]{\mu}}{n} \exp i\frac{2\pi}{n}(k-1)\right\}_{k=1}^{n}$, система полюсов квадратичного дифференциала (1.7).

Ясно, что системы (1.6) и (1.8) принадлежат, соответственно, и классам $\breve{\mathbf{P}}_n\,(\mu)$ и $\breve{\mathbf{P}}^0_n\,(\mu)$.

Наборы p^0_{n+2}, p^0_n обладают n - кратной симметрией вращения относительно начала координат и симметрией относительно окружности радиуса

$$\rho = \frac{\sqrt[n]{\mu}}{n}.$$

Введем обозначение $I^0_n := I_n\left(p^0_n\right), J^{(\alpha,\beta,0)}_n := J^{\alpha,\beta}_n\left(p^0_{n+2}\right)$.

Пусть $H := \{w : Rew = 0\}$ и $l := \{w : |\, w \,|= 1\}$. Пусть T - множество всех конформных автоморфизмов комплексной плоскости,

$$T_0 = \{t \in T : \, t(l) = H\}, \tag{1.9}$$

$$T_1 = \{t \in T : \, t(H) = H, \, t(\Psi_2) = \Psi_2\}, \tag{1.10}$$

где $t(E)$ обозначает образ произвольного множества $E \subset \subset \overline{C}$ при отображении $t \in T$, $\Psi_2 = \{0, \infty\}$ - двухэлементное множество.

Классом $\Delta_4(l)$ назовем множество наборов отмеченных областей $\delta_4 = \{(B_k, a_k)\}^4_{k=1} =$
$= \{(B_1, a_1), (B_2, a_2), (B_3, a_3), (B_4, a_4)\}$, удовлетворяющих следующей системе условий:

1. $a_k = e^{i\theta_k}, \qquad k = 1, 2, 3, 4.$
2. $0 \le \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 \le \theta_1 + 2\pi, \, \theta_1 \in [0, 2\pi)$.
3. $a_k \in B_k \qquad \forall k = 1, 2, 3, 4.$
4. $B_k \bigcap B_j = \varnothing, \qquad k, j = 1, 2, 3, 4, \, k \neq j.$

Положим

$$\Delta_4(H) = \{\sigma_4 = t(\delta_4) : \ t \in T_0, \ \delta_4 \in \Delta_4(l)\}, \tag{1.11}$$

где $\sigma_4 := t(\delta_4) := \{(t(B_k), t(a_k))\}_{k=1}^{4}$, $\delta_4 = \{B_k, a_k\} \in$
$\in \Delta_4(l)$.

Таким образом, каждый элемент $\sigma_4 \in \Delta_4(H)$ есть образ некоторого элемента $\delta_4 \in \Delta_4(l)$ при некотором отображении $t \in T_0$. Отсюда ясно, что с помощью соотношений (1.11) и (1.9) устанавливается взаимно-однозначное соответствие между классами $\Delta_4(l)$ и $\Delta_4(H)$.

Сохраним обозначения $\sigma_4 = \{(B_k, a_k)\}_{k=1}^{4} \in \Delta_4(H)$, $a_k \in H \ \forall k = 1, 2, 3, 4$.

$\forall \tau_1 \geq 0, \tau_1 + \tau_2 > 0$ на классе $\Delta_4(l)$ рассмотрим функционал

$$\Xi_4^{(\tau_1,\tau_2)} = \Xi_4^{(\tau_1,\tau_2)}(\delta_4) = \left(\frac{r(B_1, a_1)\, r(B_3, a_3)}{|\ a_1 - a_3\ |^2}\right)^{\tau_1} \times$$

$$\times \left(\frac{r(B_2, a_2)\, r(B_4, a_4)}{|\ a_2 - a_4\ |^2}\right)^{\tau_2}, \qquad \delta_4 \in \Delta_4(l). \tag{1.12}$$

В силу инвариантности функционала (1.12) при любых отображениях класса T он задан на классе $\Delta_4(H)$ и определяется аналогичным равенством для каждого $\sigma_4 =$
$= \{(B_k, a_k)\}_{k=1}^{4} \in \Delta_4(H)$

$$\Xi_4^{(\tau_1,\tau_2)} = \left(\frac{r(B_1, a_1)\, r(B_3, a_3)}{|\ a_1 - a_3\ |^2}\right)^{\tau_1} \times$$

$$\times \left(\frac{r(B_2, a_2)\, r(B_4, a_4)}{|\ a_2 - a_4\ |^2}\right)^{\tau_2}. \tag{1.13}$$

В классе $\Delta_4(H)$ рассмотрим подкласс $\Delta_4^0(H) \subset \Delta_4(H)$ тех и только тех систем $\sigma_4 = \{(B_k, a_k)\}_{k=1}^4 \in \Delta_4(H)$, которые удовлетворяют равенствам $a_1 = 0$, $a_3 = \infty$. Легко видеть, что любое преобразование (1.10) сохраняет класс $\Delta_4^0(H)$.

На классе $\Delta_4^0(H)$ функционал (1.13) имеет вид

$$\Xi_4^{(\tau_1,\tau_2)} = \left(r(B_1,0)\, r(B_3,\infty)\right)^{\tau_1} \times$$

$$\times \left(\frac{r(B_2,a_2)\, r(B_4,a_4)}{|\, a_2 - a_4\, |^2}\right)^{\tau_2}. \tag{1.14}$$

Рассмотрим следующий квадратичный дифференциал

$$Q(w)dw^2 = -\left[\frac{\tau_1}{2}\right] \cdot \frac{w^4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\tau_2}{\tau_1}\right) h^2 w^2 + \frac{h^4}{16}}{w^2 \left(w^2 + \frac{h^2}{4}\right)^2} dw^2, \tag{1.15}$$

где $\forall h > 0$.

С дифференциалом (1.15) ассоциирована система

$$\sigma_4^0 = \left\{\left(D_k^0, d_k^0\right)\right\}_{k=1}^4 \in \Delta_4^0(H), \tag{1.16}$$

где $F_4^0 = F_4(\sigma_4^0) = \{D_k^0\}_{k=1}^4$ - систему круговых областей, а $A_4^0 = A_4(\sigma_4^0) = \{d_k^0\}_{k=1}^4 = \left\{0, i\frac{h}{2}, \infty, -i\frac{h}{2}\right\}$ - набор полюсов квадратичного дифференциала (1.15).

Введем обозначение $\Xi_4^{(\tau_1,\tau_2,0)} := \Xi_4^{(\tau_1,\tau_2)}(\sigma_4^0)$.

Введем в рассмотрение операцию заполнения несущественных граничных компонент для произвольной системы $\delta_n \in \Delta_n(l)$. Краткое описание этой операции приведено в [14].

Пусть $\delta_n = \{(B_k, a_k)\}_{k=1}^n \in \Delta_n(l)$, $F_n(\delta_n) = \{B_k\}_{k=1}^n$, $B_k \subset \overline{C_w}$, $k = 1, 2, ..., n$, $A_n(\delta_n) = \{a_k\}_{k=1}^n$. Для любой области B_k, $k=1,2,...,n$ набора F_n пусть $\Lambda(B_k)=\{\lambda_\nu\}_{\nu\in\Upsilon}$ обозначает совокупность всех компонент связности множества $\left(\overline{C_w}\backslash B_k\right)$, где Υ - соответствующее множество индексов. Обозначим через $\Lambda^0(B_k)=\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\vartheta\}=\{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^{\vartheta}$, $\vartheta\in N$, $\vartheta\leq(n-1)$ конечный набор тех и только тех элементов совокупности $\Lambda(B_k)$, для которых выполнены условия: $\lambda_\nu\bigcap A_n(\delta_n)\neq\emptyset$, $\nu=1,2,...,\vartheta$. Ясно, что при каждом $p\neq k$, $p=1,2,...,n$ найдется такое $\nu_0=\nu_0(p)$, $\nu_0=1,2,...,\vartheta$, что $B_p\subset\lambda_{\nu_0}$. Элементы совокупности $\Lambda^0(B_k)$ назовем существенными, относительно системы δ_n, компонентами связности $\left(\overline{C_w}\backslash B_k\right)$. Все другие компоненты из множества $\Lambda(B_k)\backslash\Lambda^0(B_k)$ будем называть несущественными относительно системы δ_n. Положим $\widetilde{B_k}=\overline{C_w}\backslash\bigcup\limits_{\nu=1}^{\vartheta}\lambda_\nu$. Ясно, что $\widetilde{B_k}$ - область. Переход от области B_k к области $\widetilde{B_k}$ $\forall k=1,2,...,n$ будем называть операцией заполнения несущественных, относительно системы $\delta_n\in\Delta_n(l)$, граничных компонент области B_k. Нетрудно показать, что система $\widetilde{F_n}=\left\{\widetilde{B_k}\right\}_{k=1}^{n}$ определена однозначно, $\widetilde{B_k}\bigcap\widetilde{B_j}=\emptyset$ $\forall k\neq j$, $k,j=1,2,...,n$ и $a_k\in\widetilde{B_k}$ $\forall k=1,2,...,n$. Систему $\widetilde{\delta_n}=$ $=\left\{\left(\widetilde{B_k},a_k\right)\right\}_{k=1}^{n}\in\Delta_n(l)$ будем называть результатом выполнения операции заполнения несущественных граничных компонент системы $\delta_n=\{(B_k,a_k)\}_{k=1}^{n}\in\Delta_n(l)$. Легко видеть, что данное определение заполнения применимо к любому классу: $\mathbf{P}_n(\mu)$, $\mathbf{P}_n^0(\mu)$, $\breve{\mathbf{P}}_n(\mu)$, $\breve{\mathbf{P}}_n^0(\mu)$, $\Delta_4(H)$. Результат выполнения операции заполнения несущественных граничных компонент будем обозначать с помощью знака "тильды" над символом обозначающим элемент из соответствующего класса. Например, если $p_{n+2}\in\mathbf{P}_n^0(\mu)$, то $\widetilde{p}_{n+2}$ обозначает заполнение системы p_{n+2} и т. д.

2. Основные результаты

Теорема 1. ([19]). *При любых* $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$, $0 < \mu < \infty$, $n \in N$, $n \geq 3$ *на классе* $\mathbf{P}_n^0(\mu)$ *справедливо неравенство*

$$J_n^{\alpha,\beta}\left(p_{n+2}\right) \leq J_n^{\alpha,\beta}\left(p_{n+2}^0\right) = J_n^{(\alpha,\beta,0)}, \quad \forall p_{n+2} \in \mathbf{P}_n^0(\mu), \qquad (2.1)$$

причем знак равенства в неравенстве (2.1) достигается тогда и только тогда, когда $\widetilde{p}_{n+2} = p_{n+2}^0$ *и логарифмическая емкость множества всех несущественных граничных компонент* p_{n+2} *равна нулю.*

Теорема 2. ([19]). *При любых* $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$, $0 < \mu < \infty$, $n \in N$, $n \geq 3$ *на классе* $\mathbf{P}_n(\mu)$ *справедливо неравенство*

$$I_n\left(p_n\right) \leq I_n\left(p_n^0\right) = I_n^0, \quad \forall p_n \in \mathbf{P}_n(\mu), \qquad (2.2)$$

причем знак равенства в неравенстве (2.2) достигается тогда и только тогда, когда $\widetilde{p}_n = p_n^0$ *и логарифмическая емкость множества всех несущественных граничных компонент* p_n *равна нулю.*

Теорема 3. *Для любых* $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$, $0 < \mu < \infty$, $n \in N$, $n \geq 3$ *на классе* $\breve{\mathbf{P}}_n^0(\mu)$ *справедливо неравенство*

$$J_n^{\alpha,\beta}\left(p_{n+2}\right) \leq J_n^{\alpha,\beta}\left(p_{n+2}^0\right) = J_n^{(\alpha,\beta,0)}, \quad \forall p_{n+2} \in \breve{\mathbf{P}}_n^0(\mu), \qquad (2.3)$$

причем знак равенства в неравенстве (2.3) достигается тогда и только тогда, когда $\widetilde{p}_{n+2} = p_{n+2}^0$ *и логарифмическая емкость множества всех несущественных граничных компонент* p_{n+2} *равна нулю.*

Теорема 4. *Для любых* $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$, $0 < \mu < \infty$, $n \in N$, $n \geq 3$ *на классе* $\breve{\mathbf{P}}_n(\mu)$ *справедливо* *неравенство*

$$I_n(p_n) \le I_n\left(p_n^0\right) = I_n^0, \quad \forall p_n \in \breve{\mathbf{P}}_n(\mu), \tag{2.4}$$

причем знак равенства в неравенстве (2.4) достигается тогда и только тогда, когда $\widetilde{p}_n = p_n^0$ и логарифмическая емкость множества всех несущественных граничных компонент p_n равна нулю.

Теоремы 1 и 2 опубликованы в краткой заметке [19] без полного исследования случая равенства в неравенствах (2.1) и (2.2).

3. Доказательства

Доказательство теоремы 1.

При доказательстве теоремы 1 используется метод кусочно-разделяющего преобразования, разработанного В.Н. Дубининым (см. напр., [8] - [10]). Пусть

$$E_k = \{w : \frac{2\pi}{n}(k-1) < \arg w < \frac{2\pi}{n}k\}, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{3.1}$$

Функция

$$\pi_k = (-1)^k \cdot i \cdot w^{\frac{n}{2}} \tag{3.2}$$

однолистно и конформно отображает область E_k на правую полуплоскость, $\forall k = 1, 2, ..., n$.

Положим $a_{n+1} := a_1$.

Из равенств (3.2), легко видеть, что

$$| \pi_k(w) | \sim | w |^{\frac{n}{2}}, \quad w \to 0, \infty;$$
$$| \pi_k(w) - \pi_k(a_m) | \sim \frac{n}{2} | a_m |^{\frac{n}{2}-1} \cdot | w - a_m |, w \to a_m, \qquad (3.3)$$
$$k = 1, 2, ..., n; \ m = k, k+1.$$

Обозначим:

$$\pi_k(a_k) =: \omega_1^{(k)}, \ \pi_k(a_{k+1}) =: \omega_2^{(k)}, \ k = 1, 2, ..., n;$$
$$(3.4)$$
$$\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1) =: \omega_2^{(n)}; \ B_{n+1} =: B_\infty.$$

Результаты разделяющего преобразования [8] - [10] областей B_0 и B_∞ относительно семейства функций $\{\pi_k\}_{k=1}^n$ обозначим соответственно $\left\{G_0^{(k)}\right\}_{k=1}^n$ и $\left\{G_\infty^{(k)}\right\}_{k=1}^n$. Результат разделяющего преобразования области B_k, $k = 2, 3, ..., n$, относительно семейства функций $\{\pi_{k-1}, \pi_k\}$ обозначим $\left\{G_2^{(k-1)}, G_1^{(k)}\right\}$. Для области B_1 результатом разделяющего преобразо-вания относительно семейства функций $\{\pi_1, \pi_n\}$ будет пара областей $\left\{G_1^{(1)}, G_2^{(n)}\right\}$.

Таким образом, совокупность областей $\{E_k\}_{k=1}^n$, определяемая соотношениями (3.1), и любая система $p_{n+2} \in \mathbf{P}_n^0(\mu)$ порождают систему элементов $\sigma_4^{(k)} =$
$= \left\{\left(G_0^{(k)}, 0\right), \left(G_1^{(k)}, \omega_1^{(k)}\right), \left(G_2^{(k)}, \omega_2^{(k)}\right), \left(G_\infty^{(k)}, \infty\right)\right\} \in \Delta_4(H)$,
$\forall k = 1, 2, ..., n$.

Систему $\left\{\sigma_4^{(k)}(p_{n+2})\right\}_{k=1}^n$, $\sigma_4^{(k)} \in \Delta_4(H)$, $k = 1, 2, ..., n$ назовем результатом разделяющего преобразования элемента $p_{n+2} \in \mathbf{P}_n^0(\mu)$ относительно системы углов (3.1). Построенной системе $\left\{\sigma_4^{(k)}\right\}_{k=1}^n$ соответствует система $\left\{\tilde{\sigma}_4^{(k)}\right\}_{k=1}^n$,

$\left\{\widetilde{\sigma}_4^{(k)}\right\}_{k=1}^{n} \in \Delta_4\left(H\right)$, где $\widetilde{\sigma}_4^{(k)}$ - результат операции заполнения элемента $\sigma_4^{(k)}$, $\forall k = 1, 2, ..., n$.

Из теоремы 1.9 [9] (см. также [8], [10]) и соотношений (3.3) и (3.4) получаем следующие неравенства:

$$r\left(B_0, 0\right) \leq \prod_{k=1}^{n} \left(r\left(G_0^{(k)}, 0\right)\right)^{\frac{2}{n^2}},$$

$$r\left(B_\infty, \infty\right) \leq \prod_{k=1}^{n} \left(r\left(G_\infty^{(k)}, \infty\right)\right)^{\frac{2}{n^2}},$$

$$r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{r\left(G_1^{(k)}, \omega_1^{(k)}\right) \cdot r\left(G_2^{(k-1)}, \omega_2^{(k-1)}\right)}{\frac{n^2}{4} \mid a_k \mid^{n-2}}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.5)$$

$$k = 2, 3, ..., n,$$

$$r(B_1, a_1) \leq \left(\frac{r\left(G_1^{(1)}, \omega_1^{(1)}\right) \cdot r\left(G_2^{(n)}, \omega_2^{(n)}\right)}{\frac{n^2}{4} \mid a_1 \mid^{n-2}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

случаи реализации знака равенства в неравенствах (3.5) полностью описаны в теореме 1.9 [9], и работах [8], [10].

Неравенства (3.5) позволяют получить следующую оценку функционала (1.3) на классе $\mathbf{P}_n^0(\mu)$, $0 < \mu < \infty$

$$J_n^{\alpha,\beta}\left(p_{n+2}\right) = J_n^{\alpha,\beta} = \left[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)\right]^{\alpha} \times$$

$$\times \left(\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)\right)^{\beta} \leq \prod_{k=1}^{n} \left\{\left(r\left(G_0^{(k)}, 0\right) \cdot r\left(G_\infty^{(k)}, \infty\right)\right)^{\frac{2\alpha}{n^2}} \times\right.$$

$$\left.\times \left(\frac{r\left(G_1^{(k)}, \omega_1^{(k)}\right) \cdot r\left(G_2^{(k)}, \omega_2^{(k)}\right)}{\frac{n^2}{4}\left(\mid a_k \mid \cdot \mid a_{k+1} \mid\right)^{\frac{n-2}{2}}}\right)^{\frac{\beta}{2}}\right\}, \forall p_{n+2} \in \mathbf{P}_n^0(\mu). \quad (3.6)$$

Выражение (3.6) можно преобразовать следующим образом

$$J_n^{\alpha,\beta} \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{\beta n} \cdot \left[\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\mid a_k \mid^{\frac{n}{2}} + \mid a_{k+1} \mid^{\frac{n}{2}}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n} \mid a_k \mid^{\frac{n}{2}-1}}\right]^{\beta} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \left\{ \left[\frac{r\left(G_1^{(k)}, \omega_1^{(k)}\right) \cdot r\left(G_2^{(k)}, \omega_2^{(k)}\right)}{\left(\mid a_k \mid^{\frac{n}{2}} + \mid a_{k+1} \mid^{\frac{n}{2}}\right)^2}\right]^{\frac{\beta}{2}} \times\right.$$

$$\left.\times \left[r\left(G_0^{(k)}, 0\right) \cdot r\left(G_\infty^{(k)}, \infty\right)\right]^{\frac{2\alpha}{n^2}} \right\}. \qquad (3.7)$$

Известное неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим позволяет получить следующую оценку

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\mid a_k \mid^{\frac{n}{2}} + \mid a_{k+1} \mid^{\frac{n}{2}}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n} \mid a_k \mid^{\frac{n}{2}-1}} \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{n} \cdot \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \mid a_k \mid^{\frac{n}{2}}\right)^{n}}{\prod\limits_{k=1}^{n} \mid a_k \mid^{\frac{n}{2}-1}} = \left(\frac{2}{n}\right)^{n} \mu, \qquad (3.8)$$

причем знак равенства в (3.8) достигается: при n=2k+1, только для $\mid a_1 \mid = \mid a_2 \mid = ... = \mid a_n \mid = \frac{\mu^{\frac{1}{n}}}{n}$; а при n=2k, только для $\mid a_1 \mid = ... = \mid a_{2s+1} \mid = ... = \mid a_{2k-1} \mid$ и $\mid a_2 \mid = ... = \mid a_{2s} \mid = ... = \mid a_{2k} \mid$, где $s = 1, 2, ..., k$.

Неравенство (3.8) имеет место для классов $\mathbf{P}_n(\mu)$ и $\mathbf{P}_n^0(\mu)$, тогда как для классов $\breve{\mathbf{P}}_n(\mu)$ и $\breve{\mathbf{P}}_n^0(\mu)$ получаем следующее

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\mid a_k \mid^{\frac{n}{2}} + \mid a_{k+1} \mid^{\frac{n}{2}}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n} \mid a_k \mid^{\frac{n}{2}-1}} \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n \cdot \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \mid a_k \mid^{\frac{n}{2}}\right)^n}{\prod\limits_{k=1}^{n} \mid a_k \mid^{\frac{n}{2}}} \prod_{k=1}^{n} \mid a_k \mid \leq$$

$$\leq \left(\frac{2}{n^2}\right)^n \cdot \frac{\left[\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \mid a_k \mid^{\frac{n}{2}}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \mid a_k \mid\right)\right]^n}{\prod\limits_{k=1}^{n} \mid a_k \mid^{\frac{n}{2}}} = \left(\frac{2}{n^2}\right)^n \mu. \qquad (3.9)$$

Причем знак равенства в неравенстве (3.9) достигается только при $\mid a_1 \mid = \mid a_2 \mid = ... = \mid a_n \mid = \frac{\mu^{\frac{1}{n}}}{n}$.

Из формулы (3.4) и пункта A системы условий (1.2) получаем следующие выражения

$$\omega_1^{(k)} = (-1)^k i a_k^{\frac{n}{2}} = (-1)^k i \mid a_k \mid^{\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{n}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}(k-1)\, i\right) =$$
$$= (-1)^k i \mid a_k \mid^{\frac{n}{2}} \exp\left(i\pi (k-1)\right) = -i \mid a_k \mid^{\frac{n}{2}},$$
$$(3.10)$$

$$\omega_2^{(k)} = (-1)^k i a_{k+1}^{\frac{n}{2}} = (-1)^k i \mid a_{k+1} \mid^{\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{n}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} k i\right) =$$
$$= (-1)^k i \mid a_{k+1} \mid^{\frac{n}{2}} \exp\left(i\pi k\right) = i \mid a_{k+1} \mid^{\frac{n}{2}}.$$

Согласно формулам (3.10), имеет место равенство

$$\mid a_k \mid^{\frac{n}{2}} + \mid a_{k+1} \mid^{\frac{n}{2}} = \mid \omega_1^{(k)} - \omega_2^{(k)} \mid. \qquad (3.11)$$

С учетом соотношений (3.8) - (3.11), из неравенства (3.7) легко получить, что

$$J_n^{\alpha,\beta} = J_n^{\alpha,\beta}\left(p_{n+2}\right) \leq$$

$$\leq \left(\frac{2}{n}\right)^{2\beta n} \cdot \mu^{\beta} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left\{ \left(\frac{r\left(G_1^{(k)}, \omega_1^{(k)}\right) \cdot r\left(G_2^{(k)}, \omega_2^{(k)}\right)}{\mid \omega_1^{(k)} - \omega_2^{(k)} \mid^2} \right)^{\frac{\beta}{2}} \times \right.$$

$$\left. \times \left[r\left(G_0^{(k)}, 0\right) \cdot r\left(G_\infty^{(k)}, \infty\right) \right]^{\frac{2\alpha}{n^2}} \right\}. \qquad (3.12)$$

Неравенство (3.12) можно представить в следующем виде

$$J_n^{\alpha,\beta} = J_n^{\alpha,\beta}\left(p_{n+2}\right) \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{2\beta n} \cdot \mu^{\beta} \cdot \prod_{k=1}^{n} \Xi_4^{(\tau_1,\tau_2)}\left(\sigma_4^{(k)}\right), \qquad (3.13)$$

где $\left\{\sigma_4^{(k)}\right\}_{k=1}^{n}$ - результат разделяющего преобразования элемента $p_{n+2} \in \mathbf{P}_n^0(\mu)$ относительно набора углов (3.1), функционал $\Xi_4^{(\tau_1,\tau_2)}$ определен формулой (1.14), $\tau_1 = \frac{2\alpha}{n^2}$, $\tau_2 = \frac{\beta}{2}$.

Для дальнейшей оценки выражения (3.13) необходимо доказать следующий вспомогательный результат.

Лемма. *При любых* $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$, $\tau_1 + \tau_2 > 0$ *на классе* $\Delta_4^0(H)$ *справедливо неравенство*

$$\Xi_4^{(\tau_1,\tau_2)}\left(\sigma_4\right) \leq \Xi_4^{(\tau_1,\tau_2)}\left(\sigma_4^0\right) = \Xi_4^{(\tau_1,\tau_2,0)}, \qquad (3.14)$$

причем знак равенства в (3.14) реализуется тогда и только тогда, когда $\widetilde{\sigma}_4 = t\left(\delta_4^0\right)$, $t \in T_1$ *и множество всех несущественных граничных компонент системы* δ_4 *имеет логарифмическую емкость нуль.*

Доказательство леммы непосредственно вытекает из теоремы 1 ([20]) и инвариантности функционала $\Xi_4^{(\tau_1,\tau_2)}$, заданного формулой (1.13).

С учетом (3.13) и (3.14), получаем соотношение

$$J_n^{\alpha,\beta} = J_n^{\alpha,\beta}\left(p_{n+2}\right) \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{2\beta n} \cdot \mu^{\beta} \cdot \prod_{k=1}^{n} \Xi_4^{(\tau_1,\tau_2)}\left(\sigma_4^{(k)}\right) \leq$$

$$\leq \left(\frac{2}{n}\right)^{2\beta n} \cdot \mu^{\beta} \cdot \left[\Xi_4^{(\tau_1,\tau_2,0)}\right]^n, \tag{3.15}$$

где $\tau_1 = \frac{2\alpha}{n^2}$, $\tau_2 = \frac{\beta}{2}$.

Знак равенства в неравенстве (3.15) возможен только тогда, когда выполняется следующая система равенств:

$$1. \qquad \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \mid a_k \mid^{\frac{n}{2}}\right)^n}{\prod\limits_{k=1}^{n} \mid a_k \mid^{\frac{n}{2}-1}} = \mu,$$

$$2. \quad \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\mid a_k \mid^{\frac{n}{2}} + \mid a_{k+1} \mid^{\frac{n}{2}}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n} \mid a_k \mid^{\frac{n}{2}-1}} = \left(\frac{2}{n}\right)^n \cdot \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \mid a_k \mid^{\frac{n}{2}}\right)^n}{\prod\limits_{k=1}^{n} \mid a_k \mid^{\frac{n}{2}-1}}, \tag{3.16}$$

$$3. \qquad \Xi_4^{\left(\frac{2\alpha}{n^2},\frac{\beta}{2}\right)}\left(\sigma_4^{(k)}\right) = \Xi_4^{\left(\frac{2\alpha}{n^2},\frac{\beta}{2}\right)}\left(\sigma_4^{0}\right) \quad \forall k = 1, 2, ..., n,$$

4. *Реализуется знак равенства во всех неравенствах системы (3.5).*

Из пункта 3 системы (3.16) и теоремы 1 ([20]) следует, что $\widetilde{\sigma}_4^{(k)} = t_k\left(\delta_4^0\right); t_k \in T_1$. Отсюда, учитывая (3.10) и (3.11), непосредственно получаем

$$|\ \omega_1^{(k)}\ | = |\ \omega_2^{(k)}\ | \quad \forall k = 1, 2, ..., n. \tag{3.17}$$

Используя выражения (3.4), (3.10), систему (3.17) преобразуем к виду

$$|\ a_k\ |^{\frac{n}{2}} = |\ a_{k+1}\ |^{\frac{n}{2}}, \quad \forall k = 1, 2, ..., n. \tag{3.18}$$

Соотношение (3.18) можно привести к виду

$$|\ a_1\ | = |\ a_2\ | = ... = |\ a_n\ |\,. \tag{3.19}$$

Таким образом, из условия 3 системы (3.16) необходимо следует равенство (3.19).

С учетом условия 1 системы (3.16) и формулы (3.19) получаем, что

$$|\ a_k\ | = \frac{\sqrt[n]{\mu}}{n} \qquad \forall k = 1, 2, ..., n. \tag{3.20}$$

Тогда, в соответствии с формулой (3.20), имеем

$$\widetilde{\sigma}_4^{(k)} = \sigma_4^0 \quad \forall k = 1, 2, ..., n, \tag{3.21}$$

где σ_4^0 определена формулой (1.16).

Как следует из теоремы 1.9 работы [10] соотношения (3.21) обеспечивают выполнение условий пункта 4 системы (3.16).

В результате сопоставления соотношений (3.16) - (3.21) и теоремы 1 [21], приходим к заключению, что знак равенства в неравенстве (3.15) достигается тогда и только тогда, когда $\widetilde{p}_{n+2} = p_{n+2}^0$, где $\widetilde{p}_{n+2}$ - результат заполнения элемента $p_{n+2} \in \mathbf{P}_n(\mu)$, причем логарифмическая емкость множества всех несущественных граничных компонент равна нулю.

Теорема 1 *доказана.*

Теорема 2 следует из теоремы 1 при $\alpha = 0$.

Доказательство теоремы 3 проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 4 следует из теоремы 3 при $\alpha = 0$.

Литература

1 Лаврентьев М. А. К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. - 1934. - **5.** - С. 159 - 245.

2 Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1966. - 628 с.

3 Лебедев Н. А.Принцип площадей в теории однолистных функций. - М.: Наука, 1975. - 336 с.

4 Дженкинс Дж. А. Однолистные функции и конформные отображения. - М.: Изд-во иностр. лит., 1962. - 256 с.

5 Бахтина Г. П. Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. - Киев, 1975. - 11 с.

6 Кузьмина Г. В.Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы. - Л.: Наука, 1980. - 241 с.

7 Кузьмина Г. В. Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. научн. семин. ЛОМИ. - 2001. - **276.** - С. 253 - 275.

8 Дубинин В. Н. Метод симметризации в геометрической теории функций: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. - Владивосток, 1988. - 193 с.

9 Дубинин В. Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. - 1994. - **49,** № 1 (295). - С. 3 - 76.

10 Дубинин В.Н. Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. - 1988. - **168.** - С. 48 - 66.

11 Емельянов Е. Г. О связи двух задач об экстремальном разбиении // Зап. научн. семин. ЛОМИ. - 1987. - **160.** - С. 91 - 98.

12 Ковалев Л.В. О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей // Изв. вузов. Матем. - 2000, № 6. - С. 82 - 87.

13 Ковалев Л.В. О трех непересекающихся областях // Дальневосточный математический журнал. - 2000. - **1,** № 1. - С. 3 - 7.

14 Бахтин А. К., Таргонский А.Л. Некоторые экстремальные задачи теории конформных отображений // Экстремальные задачи теории однолистных функций. - Киев, 2002. - С. 10 - 14. - (Препр. НАН Украины. Ин-т математики; 2002.6).

15 Бахтин А. К. Некоторые задачи в теории неналегающих областей // Укр. мат. журн. - 1999. - **51,** № 6. - С. 723 - 731.

16 Тамразов П. М. Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов // Известия АН СССР, серия мат., 1968. - **32,** № 5. - С. 1033 - 1043.

17 Хейман В. К. Многолистные функции. - М.: Изд-во иностр. лит., 1960. - 180 с.

18 Дубинин В. Н. Асимптотика модуля выраждающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. научн. семин. ЛОМИ. - 1997. - **237.** - С. 56 - 73.

19 Бахтин А. К., Таргонский А. Л. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на лучах // Доп. Нац. Акад. наук України. - 2004. (в печати).

20 Бахтин А. К. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности // Доп. Нац. Акад. наук України. - 2004. (в печати).

21 Дубинин В. Н. Метод симметризации в задачах о неналегающих областях // Мат. сб. - 1985. - **128,** № 1. - С. 110 - 123.