ОДНА ЕКСТРЕМАЛЬНА ЗАДАЧА У ВИПАДКУ НЕСКІНЧЕННО ВІДДАЛЕНОЇ ТОЧКИ

КОНДРАТЮК Д.С., ТАРГОНСЬКИЙ А.Л.

dashakd.91@rambler.ru, targonsk@zu.edu.ua

Житомирський державний університет імені Івана Франка, Житомир, Україна

Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ – множини натуральних і дійсних чисел, відповідно, $\mathbb{C}$ – площина комплексних чисел, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ – її одноточкова компактифікація и $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Для фіксованого числа $n \in \mathbb{N}$ систему точок $A_n = \{a_k \in \mathbb{C} : k = \overline{1,n}\}$ назвемо n-рівнопроменевою системою точок, якщо при всіх $k = \overline{1,n}$ виконуються відношення:

$$\arg a_k = \frac{2\pi}{n}(k-1), \; k = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Для довільної n-рівнопроменевої системи точок A_n розглянемо наступний "керуючий" функціонал

$$\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) = \left[\prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{n}{4}}\right)\right]^{1-\frac{2\gamma}{n^2}} \cdot \left[\prod_{k=1}^{n} |a_k|\right]^{1+\frac{\gamma}{n}},$$

де $\chi(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Позначимо через $r(B; a)$ внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$. (див. [1, 2]).

Вірний наступний результат.

Теорема. *Нехай $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $\gamma \leq n^2$. Тоді для будь-якої n-рівнопроменевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ і будь-якої системи попарно неперетинних областей $B_\infty, B_k \subset \overline{\mathbb{C}}, k = \overline{1,n}$, $a_k \in B_k, \infty \in B_\infty$, вірна нерівність*

$$r^\gamma(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq r^\gamma\left(B_\infty^{(0)}, \infty\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right),$$

де $\{a_k^{(0)}\}$ і $B_k^{(0)}$,$B_\infty^{(0)}$ є, відповідно, полюсами і відповідними їм круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -w^{n-2}\frac{n^2 + (w^n - 1)\gamma}{(w^n-1)^2}\, dw^2,$$

для $\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) = 1$.

1. Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б. Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці ін-ту мат-ки НАН Укр. – 2008. – Т. 73. – 308 с.
2. Дубинин В. Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49,** № 1 (295). – С. 3 – 76.
3. Дубинин В. Н. Емкости конденсаторов в геометрической теории функций: Учебн. пособие. – Владивосток: Изд-во Дальневосточ. ун-та, 2003. – 116 с.