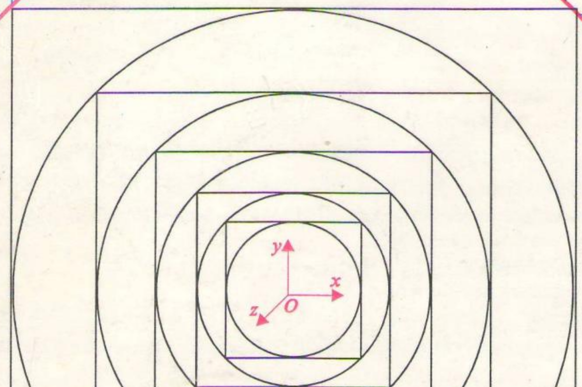
ISSN 1029-4171

2000

том 6
випуск 4

У світі математики



Видавництво
"ТВіМС"

Математичні олімпіади

Зворотні послідовності в олімпіадних задачах

Б. А. Захаров та О. А. Сарана

Пам'яті житомирського математика
Нестерчука Анатолія Васильовича

У цій статті ми робимо спробу ознайомити читача з деякими властивостями зворотних послідовностей та показати, як ці властивості можна використовувати при розв'язуванні деяких задач математичних олімпіад.

Зворотна послідовність k-го порядку задається першими k членами $u_1, u_2, \ldots, u_k$ і рекурентним співвідношенням:

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \cdots + a_k u_n, \quad (n \geq 1). \tag{1}$$

Співвідношення (1) також називають зворотним рівнянням k-го порядку. Набір k чисел $u_1, u_2, \ldots, u_k$ назвемо початковими умовами рівняння (1).

Більшість добре знайомих нам послідовностей можна задати рекурентно.

Приклад 1. Арифметична прогресія — зворотна послідовність другого порядку. Задається першими членами a_1 та a_2 та співвідношенням

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n.$$

Приклад 2. Геометрична прогресія — зворотна послідовність першого порядку. Задається першим членом b_1 та співвідношенням

$$b_{n+1} = q \cdot b_n,$$

де q — деяке число.

Приклад 3. Послідовність квадратів натуральних чисел — зворотна послідовність 3-го порядку. Задається першими членами $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 9$ та співвідношенням

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n.$$

Приклад 4. Послідовність кубів натуральних чисел — зворотна послідовність 4-го порядку. Задається першими членами $u_1 = 1$, $u_2 = 8$, $u_3 = 27$, $u_4 = 64$ та співвідношенням

$$u_{n+4} = 4u_{n+3} - 6u_{n+2} + 4u_{n+1} - u_n.$$

Приклад 5. Послідовність Фібоначчі — зворотна послідовність 2-го порядку. Задається першими членами $u_1 = u_2 = 1$, та співвідношенням

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \quad (n \geq 1).$$

Очевидно, що поведінка членів послідовності із зростанням номера залежить не лише від рекурентного співвідношення, а й від значень перших її k членів.

Приклад 6. Нехай $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$,

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n, \quad n \geq 1.$$

Довести, що $u_n = n$.

Приклад 7. Нехай $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 5$,

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n, \quad n \geq 1.$$

Довести, що $u_n = 2n - 1$.

Приклад 8. Нехай $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 9$, $u_4 = 16$,

$$u_{n+4} = 4u_{n+3} - 6u_{n+2} + 4u_{n+1} - u_n, \quad n \geq 1.$$

Довести, що $u_n = n^2$.

(Справедливість тверджень 3, 4, 6, 7, 8 перевірте самостійно).

Рекурентно задана послідовність характеризується тим, що для обчислення кожного її члена (починаючи з деякого з них), потрібно знати попередні k членів послідовності (а значить, і всі попередні члени, починаючи з u_1).

В порівнянні з обчисленням членів послідовності за допомогою формули загального члена це не дуже зручно (в більшості випадків). Проте в багатьох задачах саме рекурентне співвідношення (1) дозволяє встановити потрібні властивості членів послідовності. Для цього було б добре навчитись, знаючи формулу загального члена послідовності, знаходити її рекурентне задання і навпаки.

Лема 1. *Якщо послідовності x_n та y_n задовільняють рекурентне співвідношення* (1), *то при довільних $C_1, C_2 \in R$ послідовність*

$$z_n = C_1 x_n + C_2 y_n$$

також задовільняє це співвідношення.

(Доведіть це самостійно).

Спробуємо знайти серед геометричних прогресій послідовності, що є розв'язками зворотного рівняння (1). Нехай $u_n = q^{n-1}$. Тоді

$$q^{n+k-1} = a_1 q^{n+k-2} + a_2 q^{n+k-3} + \cdots + a_k q^{n-1}, \quad (n \geq 1),$$

звідки отримуємо, що знаменник q такої геометричної прогресії має задовільняти рівняння

$$q^k = a_1 q^{k-1} + a_2 q^{k-2} + \cdots + a_k. \tag{2}$$

Очевидно, що геометрична прогресія є розв'язком рівняння (1), тоді і тільки тоді, коли її знаменник q задовільняє рівняння (2). Рівняння (2) назвемо характеристичним для зворотного рівняння (1).

Як відомо з курсу вищої алгебри, таке рівняння має точно k коренів (деякі з них можуть бути комплексними, деякі корені можуть бути кратними).

Розглянемо спочатку випадок, коли всі корені $q_1, q_2, \ldots, q_k$ дійсні і різні. Тоді k різних геометричних прогресій $q_1^{n-1}, q_2^{n-2}, \ldots, q_k^{n-1}$ задовільняють рівняння (1), а тому на основі *леми 1* будь-яка послідовність вигляду

$$x_n = C_1 \cdot q_1^{n-1} + C_2 \cdot q_2^{n-1} + \cdots + C_k \cdot q_k^{n-1}$$

(де $C_1, C_2, \ldots, C_k$ — дійсні числа) теж задовільняє рівняння (1). Тепер залишається підібрати коефіцієнти $C_1, C_2, \ldots, C_k$ так, щоб перші k членів послідовності x_n співпадали з першими k членами послідовності u_n. Для цього достатньо розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \cdots + C_k = u_1, \\ C_1 q_1 + C_2 q_2 + \cdots + C_k q_k = u_2, \\ C_1 q_1^2 + C_2 q_2^2 + \cdots + C_k q_k^2 = u_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1 q_1^{k-1} + C_2 q_2^{k-1} + \cdots + C_k q_k^{k-1} = u_k. \end{cases} \tag{3}$$

Оскільки визначник цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ q_1 & q_2 & \ldots & q_k \\ q_1^2 & q_2^2 & \ldots & q_k^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_1^{k-1} & q_2^{k-1} & \ldots & q_k^{k-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

(а точніше, це визначник Ван-дер-Монда, який дорівнює добутку всіх можливих множників вигляду $(q_i - q_j)$, $i \neq j$), то система (3) при будь-якому наборі чисел $u_1, u_2, \ldots, u_k$ (іншими словами, при будь-яких початкових умовах рівняння (1) має єдиний розв'язок. (Для читачів, не знайомих з теорією визначників, пропонуємо прийняти цей факт без доведення).

Отже, у випадку, коли характеристичне рівняння (2) має k різних дійсних коренів $q_1, q_2, \ldots, q_k$, які відмінні від нуля, зворотне рівняння (1) при довільних початкових умовах має розв'язок, який є лінійною комбінацією геометричних прогресій з знаменниками q_1, q_2, $\ldots$, q_k, тобто має вигляд

$$u_n = C_1 q_1^{n-1} + C_2 q_2^{n-1} + \cdots + C_k q_k^{n-1}, \quad n \geq 1,$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_k$ — деякі дійсні числа, які залежать від початкових умов рівняння (1).

Випадок, коли всі корені дійсні, але серед них є кратні, більш складний і потребує громіздких викладок. Наведемо лише без доведення такий факт ([1], с. 39): якщо характеристичне рівняння (2) має кратні корені, а саме q_1 кратності α_1, q_2 кратності α_2, ... , q_j кратності α_j $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_j = k)$, то будь-який розв'язок рівняння (1) є лінійною комбінацією послідовностей, формули загальних членів яких мають вигляд:

$$q_1^{n-1},\ (n-1)q_1^{n-1},\ (n-1)^2q_1^{n-1}, \ldots,\ (n-1)^{\alpha_1-1}q_1^{n-1},$$
$$q_2^{n-1},\ (n-1)q_2^{n-1},\ (n-1)^2q_2^{n-1}, \ldots,\ (n-1)^{\alpha_2-1}q_2^{n-1}, \ldots,$$
$$q_j^{n-1},\ (n-1)q_j^{n-1},\ (n-1)^2q_j^{n-1}, \ldots,\ (n-1)^{\alpha_j-1}q_j^{n-1}.$$

Приклад 9. Нехай характеристичне рівняння (1) деякої послідовності u_n після розкладу на множники має вигляд

$$(q-2)^3 \cdot (q+1)^2 = 0.$$

(тобто $q_1 = 2$, $\alpha_1 = 3$, $q_2 = -1$, $\alpha_2 = 2$). Тоді формула загального члена послідовності u_n має вигляд

$$u_n = C_1 \cdot 2^{n-1} + C_2 \cdot (n-1)2^{n-1} + C_3 \cdot (n-1)^2 2^{n-1} + C_4 \cdot (-1)^{n-1} + C_5(n-1) \cdot (-1)^{n-1},$$

де C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — деякі дійсні числа, або (після тотожніх перетворень цієї формули та перепозначень)

$$u_n = (B_1 + B_2 n + B_3 n^2) \cdot 2^{n-1} + (B_4 n + B_5)(-1)^{n-1},$$

де B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 — деякі дійсні числа.

У випадку, коли деякі корені характеристичного рівняння (2) комплексні, формула загального члена послідовності u_n знаходиться аналогічно.

Виходячи з вищесказаного, стає зрозумілим спосіб розв'язання оберненої задачі, а саме знаходження рекурентного співвідношення, якому задовольняють члени послідовності, за відомою формулою загального члена цієї послідовності.

Приклад 10. Нехай формула загального члена послідовності

$$u_n = n^2 - 2 + (3n+4) \cdot 3^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Записавши цю формулу у вигляді

$$u_n = (n^2 - 2) \cdot 1^{n-1} + (3n+4) \cdot 3^{n-1},$$

бачимо, що число $q_1 = 1$ є коренем кратності 3 характеристичного рівняння, а число $q_2 = 3$ є коренем кратності 2. Тому характеристичне рівняння має вигляд

$$(q-1)^3 \cdot (q-3)^2 = 0,$$

або після розкриття дужок

$$q^5 = 9q^4 - 27q^3 + 46q^2 - 33q + 9,$$

а сама послідовність може бути задана рекурентним співвідношенням

$$u_{n+5} = 9u_{n+4} - 27u_{n+3} + 46u_{n+2} - 33u_{n+1} + 9u_n,$$

з початковими умовами $u_1 = 6$, $u_2 = 32$, $u_3 = 124$, $u_4 = 446$, $u_5 = 1562$.

Розглянемо як перехід від рекурентного задання послідовності до задання за допомогою формули її загального члена (і навпаки) можна використовувати до розв'язування задач.

Задача 1 [2, с. 55]. Довести, що кожний член послідовності

$$a_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}, \qquad (n \in Z)$$

є цілим числом. Знайти всі значення $n \in Z$, при кожному з яких число a_n ділиться на 3.

Розв'язок. Оскільки $2+\sqrt{3} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$, то $a_{-n} = -a_n$, а тому достатньо розв'язати задачу при $n \in Z^+$. Оскільки кожен член послідовності є сумою відповідних членів двох геометричних прогресій з знаменниками $q_1 = 2+\sqrt{3}$ та $q_2 = 2-\sqrt{3}$, то характеристичне рівняння послідовності a_n має вигляд:

$$(k-2-\sqrt{3})(k-2+\sqrt{3}) = 0,$$

або

$$k^2 - 4k + 1 = 0,$$

а члени послідовності задовольняють рекурентну формулу

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$$

з початковими умовами $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$.

З такого задання послідовності випливає, що всі її члени — цілі числа, а залишки від ділення членів послідовності на 3 мають утворювати деяку періодичну послідовність (подумайте, чому?).

Знайдемо перші члени послідовності цих залишків. Маємо таку послідовність: $d_0 = 0$, $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $d_3 = 0$, $d_4 = 2$, $d_5 = 2$, $d_6 = 0$, $d_7 = 1$, $d_8 = 1$, $d_9 = 0, \ldots$, яка є періодичною з періодом $T = 6$, а діляться на 3 тільки члени вигляду a_{3k}, $k \in Z$, (і тільки вони).

Задача 2 [2, с. 55]. Довести, що кожен член послідовності

$$a_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2, \qquad (n \in N),$$

є натуральним числом і представляється у вигляді $5m^2$ або m^2 $(m \in N)$ при парному чи непарному n відповідно.

Розв'язок. Розглянемо допоміжну послідовність $b_n = \sqrt{a_n}$. Легко замітити, що

$$b_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Характеристичне рівняння цієї послідовності

$$\left(k - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(k - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 0,$$

або
$$k^2 - \sqrt{5}k + 1 = 0,$$

а члени послідовності задовільняють рекурентну формулу
$$b_{n+2} = \sqrt{5}b_{n+1} - b_n,$$

з початковими умовами $b_1 = 1$, $b_2 = \sqrt{5}$.

Тепер доведемо методом математичної індукції по $k \in N$, що b_{2k-1} є цілим, а b_{2k} є числом вигляду $m\sqrt{5}$, $m \in N$ (це рівносильно твердженню задачі).

При $k = 1$ твердження вірне: $b_1 = 1$, $b_2 = \sqrt{5}$.

Нехай тепер при деякому $k \in N$ b_{2k-1} — ціле, а $b_{2k} = m\sqrt{5}$. Тоді
$$b_{2k+1} = \sqrt{5}b_{2k} - b_{2k-1} = 5m - b_{2k-1},$$

тобто теж є цілим, та
$$b_{2k+2} = \sqrt{5}b_{2k+1} - b_{2k} = \sqrt{5}b_{2k+1} - m\sqrt{5} = \sqrt{5}(b_{2k+1} - m) = \sqrt{5}(4m - b_{2k-1}),$$

тобто має вигляд $\sqrt{5} \cdot m_1$, де $m_1 = 4m - b_{2k-1}$ є натуральним числом.

Задача 3 [2, с. 23]. Визначити, які цифри в розрядах одиниць і десятих стоять в десятковому записі числа $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1980}$.

Розв'язок. Розглянемо послідовність
$$a_n = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2n} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2n} = (5 + 2\sqrt{6})^n + (5 - 2\sqrt{6})^n.$$

Її характеристичне рівняння $(k - 5 - 2\sqrt{6})(k - 5 + 2\sqrt{6} = 0$, або $k^2 - 10k + 1 = 0$, а члени цієї послідовності задовільняють рекурентне співвідношення
$$a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n,$$

з початковими умовами $a_1 = 10$, $a_2 = 98$.

Тому очевидно, що всі члени цієї послідовності є цілі числа. Крім цього, $a_{n+2} + a_n = 10a_{n+1}$ для всіх $n \in N$, а тому
$$a_{n+4} - a_n = (a_{n+4} + a_{n+2} - (a_{n+2} + a_n) = 10a_{n+3} - 10a_{n+1} = 10(a_{n+3} - a_{n+1}),$$

тобто числа a_{n+4} і a_n мають однакові цифри в розряді одиниць, а тому
$$a_{990} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1980} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1980}$$

закінчується на таку ж цифру, що й a_2, тобто на 8. Враховуючи, що
$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1980} = \frac{1}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1980}} < \frac{1}{3^{1980}} = \frac{1}{81^{495}} < \frac{1}{8^{495} \cdot 10^{495}} =$$
$$\frac{1}{2^{1485} \cdot 10^{495}} = \frac{1}{2^5 \cdot 1024^{148} \cdot 10^{495}} < \frac{1}{32 \cdot (10^3)^{148} \cdot 10^{495}} < \frac{1}{32 \cdot 10^{939}} < 10^{-940},$$

отримуємо, що в розряді одиниць числа $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1980}$ стоїть цифра 7, а після коми стоять підряд хоча б 940 дев'яток.

Задача 4 [2, с. 30]. Для кожного значення $n \in N$ знайти найбільше значення $k \in Z^+$, при якому число $[(3+\sqrt{11})^{2n-1}]$ ділиться на 2^k.

Розв'язок. Позначимо $a_n = (3+\sqrt{11})^n + (3-\sqrt{11})^n$. Характеристичне рівняння цієї послідовності має вигляд: $(k-3-\sqrt{11})(k-3+\sqrt{11}) = 0$ або $k^2-6k-2=0$, а члени цієї послідовності задовільняють рекурентне співвідношення $a_{n+2} = 6a_{n+1} + 2a_n$ з початковими умовами $a1 = 6$, $a_2 = 40$.

Всі члени цієї послідовності є цілими числами, а оскільки

$$-1 < (3-\sqrt{11})^{2n-1} < 0$$

при всіх $n \in N$, то $a_{2n-1} < (3+\sqrt{11})^{2n-1} < a_{2n-1}+1$. Звідси отримуємо $[(3+\sqrt{11})^{2n-1}] = a_{2n-1}$. Знайшовши перші члени послідовності та проаналізувавши їх (зробіть це самостійно), робимо висновок, що при $n \in N$ число a_{2n} ділиться на 2^{n+1}, а число a_{2n-1} ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Доведемо це твердження методом математичної індукції.

При $n=1$ це твердження очевидне ($a_1 = 6$, $a_2 = 40$).

Нехай це твердження вірне для деякого $n \in N$. Тоді $a_{2n+1} = 6a_{2n} + 2a_{2n-1}$ ділиться на 2^{n+1} (оскільки a_{2n} і a_{2n-1} діляться на 2^n), але не ділиться на 2^{n+2} (оскільки a_{2n} ділиться на 2^{n+1}, а a_{2n-1} не ділиться на 2^{n+1}). Крім цього, $a_{2n+2} = 6a_{2n+1} + 2a_n$ ділиться на 2^{n+2} (бо a_{2n+1} і a_{2n} діляться на 2^{n+1}). Твердження доведено. Отже, найбільша степінь двійки, на яку ділиться число a_{2n-1}, дорівнює 2^n, тобто $k = n$.

Задача 5 [2, с. 55]. Послідовність $a_0, a_1, a_2, \ldots$ задовільняє при деякому параметрі $a \in N$ співвідношення $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + (a-1)a_{n-1}$ при $n \in N$. Для фіксованого простого числа $p_0 > 2$ знайти найменше значення a, при якому вірні два твердження: а) якщо p — просте число і $p \le p_0$, то число a_p ділиться на p; б) якщо p — просте число і $p > p_0$, то число a_p не ділиться на p.

Розв'язок. Характеристичне рівняння послідовності a_n має вигляд: $k^2 = 2k + (a-1)$, а його розв'язки $k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{a}$. Тому послідовність a_n можна задати також формулою $a_n = C_1(1+\sqrt{a})^n + C_2(1-\sqrt{a})^n$, де коефіцієнти C_1, C_2 знаходимо з умов $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Маємо

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left((1+\sqrt{a})^n - (1-\sqrt{a})^n\right).$$

Якщо $p_2 = 2$, то $a_p = 2$ ділиться на $p = 2$. Якщо ж просте число $p > 2$ (а значить непарне), використавши біном Ньютона, отримаємо:

$$a_p = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left((1+\sqrt{a})^p - (1-\sqrt{a})^p\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\sum_{i=0}^{p} C_p^i(\sqrt{a})^i - \sum_{i=0}^{p} C_p^i(-\sqrt{a})^i\right) = \sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} C_p^{2i+1}a^i.$$

Оскільки $C_p^{2i+1} = \frac{p!}{(2i+1)!(p-2i-1)!}$, то всі доданки, крім останнього (що відповідає значенню $i = \frac{p-1}{2}$) діляться на p. Тому для подільності a_p на p необхідно і достатньо, щоб на p ділилось число $a^{\frac{p-1}{2}}$. Враховуючи, що p просте число, отримуємо відповідь на запитання задачі: для того, щоб виконувалось твердження а) і б) задачі, необхідно і достатньо, щоб число a ділилось на кожне просте число p, таке, що $2 < p \leq p_0$ та не ділилось на жодне з простих чисел $p > p_0$. Найменше натуральне число a, що задовільняє ці вимоги, дорівнює добутку всіх простих чисел, які задовільняють нерівність $2 < p \leq p_0$.

Пропонуємо для самостійного розв'язку наступні задачі, які в свій час пропонувались на олімпіадах та конкурсах різного рівня.

Задача 6. Довести, що $n + [(\sqrt{2}+1)^n]$ непарне для будь-якого натурального n ($[x]$ — ціла частина x).

Задача 7. Нехай k — натуральне число. Після піднесення до степеня і зведення подібних членів число $(2+\sqrt{3})^{2k+1}$ запишеться у вигляді $n + m\sqrt{3}$, де m і n — деякі натуральні числа. Довести, що число $n-1$ є квадратом непарного числа.

Задача 8. Послідовність $a_1, a_2, a_3, \ldots$ задовільняє співвідношення $a_1 = -2$, $a_2 = 4$, $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n$ при $n \in N$. Чи може якийсь член цієї послідовності бути кубом деякого цілого числа?

$= 4^n - 3\cdot 2^n$

і потім залишки на 7

ЛІТЕРАТУРА

1. А. И. Маркушевич, *Возвратные последовательности*, "Наука", Москва, 1975.
2. С. В. Конягин, Г. А. Тоноян, И. Ф. Шарыгин и др., *Зарубежные математические олимпиады*, "Наука", Москва, 1987.