Праці Інституту математики НАН України 2004, том 1, 244-253

УДК 517.54

Некоторые экстремальные задачи на классе неналегающих областей

А. К. Бахтин, А. Л. Таргонский

(*Институт математики НАН Украины, Киев*)

abahtin@imath.kiev.ua

В работе изучаются экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами. Изучен аналог задачи Колбиной в случае трех свободных полюсов на единичной окружности. Решена также комбинированная задача с четырьмя полюсами, из которых два полюса фиксированы, а два – не фиксированы. Рассмотрены также две новые задачи.

Введение. Экстремальные задачи о неналегающих областях изучались в работах многих авторов (см., например, [1 – 12]). История развития этого направления, а также большое количество важных результатов в этой области изложены в работах [2 – 4, 6 – 8]. К настоящему времени получили значительное развитие экстремальные задачи со свободными полюсами, впервые рассмотренные в работе [5] в случае свободных полюсов на окружности. В данной работе рассматриваются аналогичные задачи.

Основные результаты. Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Для всякого $n \in \mathbb{N} : n \geq 2$ набор n не равных нулю точек комплексной плоскости $\mathbb{C}$ обозначим через $A_n := \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и обозначим $\tilde{A}_n := \{0, a_1, a_2, ..., a_n, \infty\}$.

Точечным наборам A_n, $\tilde{A}_n$ поставим в соответствие наборы $F_n = \{B_1, ..., B_n\}$, $\tilde{F}_n = \{B_0, B_1, ..., B_n, B_\infty\}$ произвольных попарно непересекающихся областей расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ таких, что $0 \in B_0$, $\infty \in B_\infty$ и $a_k \in B_k$ при всех $k = 1, 2, ..., n$.

Назовем классами Ω_n и $\tilde{\Omega}_n$ соответственно множества всех возможных пар (F_n, A_n) и $(\tilde{F}_n, \tilde{A}_n)$, для которых $0 \in B_0$, $\infty \in B_\infty$ и $a_k \in B_k$ при $k = 1, 2, ..., n$, причем точки a_k не являются фиксированными.

Пусть U_w — единичный круг $|w| < 1$, а $U_w(R)$ — круг $|w| \leq R$ комплексной w-плоскости и $H := \{w : \mathrm{Re}\, w = 0\}$. Обозначим через $\mathrm{cap}\, e$ логарифмическую емкость множества e.

На классе $\tilde{\Omega}_2$ рассмотрим следующий функционал

$$J_4 = (r(B_0, 0)\ r(B_\infty, \infty))^\gamma\ (r(B_1, a_1)\ r(B_2, a_2))^\delta, \tag{1}$$

где δ, $\gamma \geq 0$, $\delta + \gamma > 0$ и $r(B, a)$ – внутренний радиус области B относительно точки a (определение внутреннего радиуса области см., например, в [8]).

На классе Ω_3 рассмотрим функционал

$$\Delta_{3,\alpha} = r^\alpha(B_1, a_1)\ r(B_2, a_2)\ r(B_3, a_3), \tag{2}$$

где $\alpha \geq 0$.

Следующий функционал рассмотрим на классе Ω_4

$$I_4 = \frac{r^\alpha(B_1, a_1)\ r^\beta(B_2, a_2)\ r^\alpha(B_3, a_3)\ r^\beta(B_4, a_4)}{|a_1 - a_3|^{2\alpha - \gamma}\ |a_1 - a_3|^{2\beta - \delta}}, \tag{3}$$

где α, β, γ, $\delta \geq 0$ и $\alpha + \beta > 0$.

На классе $\tilde{\Omega}_{2n}$ рассмотрим функционал

$$\Xi_{2n} = (r(B_0, 0)\ r(B_{2n+1}, \infty))^{n^2/4} \prod_{k=1}^{n} r^\alpha(B_{2k}, a_{2k})\ r(B_{2k-1}, a_{2k-1}), \tag{4}$$

где $\alpha \geq 0$.

Целью данной работы является нахождение максимумов функционалов (1), (2), (3), (4) соответственно на классах $\tilde{\Omega}_2$, Ω_3, Ω_4, $\tilde{\Omega}_{2n}$ при некоторых дополнительных предположениях о расположении точек a_k на плоскости.

Имеют место следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть компонента $\tilde{A}_2$ пары $(\tilde{F}_2, \tilde{A}_2) \in \tilde{\Omega}_2$, такая, что точки a_1, a_2 принадлежат множеству $H \bigcap U_w(R_*)$ и $a_1\, a_2 > 0$. Тогда выполняется неравенство*

$$J_4 \leq J_4^0,$$

в котором J_4^0 – значение функционала J_4 на паре $\left(\left\{B_0^0, B_1^0, B_2^0, B_\infty^0\right\},\right.$ $\left.\{0, iR_*, -iR_*, \infty\}\right)$, где области $B_0^0, B_1^0, B_2^0, B_\infty^0$ являются круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^4 + 2\left(1 - 2\frac{\delta}{\gamma}\right) R_*^2 w^2 + R_*^4}{w^2\left(w^2 + R_*^2\right)^2}\, dw^2.$$

Теорема 2. *Пусть компонента A_3 пары $(F_3, A_3) \in \Omega_3$ такая, что $|a_k| = 1$ при всех $k = 1, 2, 3$ и $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < 2\pi$. Если при этом $0 \leq \alpha < 2$, то справедливо неравенство*

$$\Delta_{3,\alpha} \leq \Delta_{3,\alpha}^0, \tag{5}$$

в котором $\Delta_{3,\alpha}^0$ – значение функционала $\Delta_{3,\alpha}$ на паре $\left(\left\{B_1^0, B_2^0, B_3^0\right\},\right.$ $\left.\left\{1, -e^{-i\phi}, -e^{i\phi}\right\}\right)$, где $\phi = \arccos\frac{\alpha}{2}$ и области B_k^0, $k = 1, 2, 3$, являются круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{2\left(\alpha - 2 + \alpha^2\right) w^2 + \left(8 + \alpha^3\right) w + 2\left(\alpha - 2 + \alpha^2\right)}{(w-1)^2\left(w + e^{-i\phi}\right)^2\left(w + e^{i\phi}\right)^2}\, dw^2. \tag{6}$$

Теорема 3. *Пусть компонента A_4 пары $(F_4, A_4) \in \Omega_4$ такая, что $|a_k| = 1$ при всех $k = 1, 2, 3, 4$ и $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < \arg a_4 <$ $< 2\pi$. Тогда для любых неотрицательных γ, δ и любых неотрицательных α, β таких, что $\alpha + \beta > 0$, выполняется неравенство*

$$I_4 \leq I_4^0, \tag{7}$$

в котором I_4^0 – значение функционала I_4 на паре $\left(\left\{B_1^0, B_2^0, B_3^0, B_4^0\right\},\right.$ $\left.\{1, i, -1, -i\}\right)$, где области B_k^0, $k = 1, 2, 3, 4$, являются круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(\beta - \alpha) w^4 - 2(\beta + \alpha) w^2 + (\beta - \alpha)}{\left(w^4 - 1\right)^2}\, dw^2.$$

При этом равенство в (7) достигается тогда и только тогда, когда $a_1 = 1$, $a_2 = i$, $a_3 = -1$, $a_4 = -i$, $B_k = B_k^0 \setminus e_k$, где $e_k \subset B_k$ и e_k – замкнутое множество в относительной топологии в B_k такое, что $\operatorname{cap} e_k = 0$ и $a_k \overline{\in} e_k$ при $k = 1, 2, 3, 4$.

Теорема 4. *Пусть* $n \in \mathbb{N} : n \geq 3$, $\alpha \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ *и пара* $(\tilde{F}_{2n}, \tilde{A}_{2n}) \in \tilde{\Omega}_{2n}$ *такая, что*

$$B_{2k} \subset \left\{w : \frac{2\pi}{n}(k-1) < \arg w < \frac{2\pi}{n} k\right\}, \quad k = \overline{1, n},$$

$$a_{2k} = \exp\left\{i\frac{\pi}{n}(2k-1)\right\}, \qquad k = \overline{1, n},$$

$$\arg a_{2k-1} = \frac{2\pi}{n}(k-1), \quad k = \overline{1, n},$$

$$\prod_{k=1}^{n} \chi\left(|a_{2k-1}|^{n/2}\right) |a_{2k-1}| \leq 1,$$

где $\chi(t) = \left(t + t^{-1}\right)/2$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\Xi_{2n} \leq \Xi_{2n}^0, \tag{8}$$

в котором Ξ_{2n}^0 – *значение функционала* Ξ_{2n} *на паре* $(\{D_0, D_1, D_2, ..., D_{2n}, D_\infty\}, \{0, d_1, d_2, ..., d_{2n}, \infty\})$, *при этом области* D_0, D_∞, D_k *и точки* d_k, $k = \overline{0, 2n}$, *являются соответственно круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала*

$$Q(w)\ dw^2 =$$

$$= -\frac{\left(\left(w^{\frac{n}{2}} - i\right)^4 h^4 + \left(w^{\frac{n}{2}} + i\right)^4\right)\left(\left(w^{\frac{n}{2}} - i\right)^4 + \left(w^{\frac{n}{2}} + i\right)^4 h^4\right)}{w^2\left(w^{2n} - 1\right)^2}\ dw^2, \tag{9}$$

где h – *корень уравнения* $\chi^2\left(h^2\right) = 4/\alpha$ *из интервала* $(0; 1)$.

Доказательства.

Доказательство теоремы 1. В работе [9] установлено, что функционал

$$\Psi_4 = \left(r(D_0, 0)\, r(D_\infty, \infty)\right)^\gamma \left(\frac{r(D_1, a_1)\, r(D_2, a_2)}{|a_2 - a_4|^2}\right)^\delta$$

достигает своего максимума на парах вида $\left(\left\{D_0^0, D_1^0, D_2^0, D_\infty^0\right\}, \left\{0, i\frac{h}{2}, -i\frac{h}{2}, \infty\right\}\right)$, где h – произвольное положительное число. При этом области D_0^0, D_∞^0, D_1^0, D_2^0 являются круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)\ dw^2 = -\left[\frac{\gamma}{2}\right] \frac{w^4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{\gamma}\right) h^2 w^2 + \frac{h^4}{16}}{w^2\left(w^2 + \frac{h^2}{4}\right)^2}\ dw^2.$$

Обозначая максимум функционала Ψ_4 через Ψ_4^0, получаем неравенство

$$\Big(r(D_0,0)\,r(D_\infty,\infty)\Big)^\gamma \Big(r(D_1,a_1)\,r(D_2,a_2)\Big)^\delta \le |a_2-a_4|^{2\delta}\ \Psi_4^0. \qquad (10)$$

При условиях теоремы максимум правой части неравенства (10) достигается при $|a_2-a_4|=2R_*$. Отсюда очевидным образом следует утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 2. Существование экстремальных пар $\left(\left\{B_1^0,B_2^0,B_3^0\right\},\left\{a_1^0,a_2^0,a_3^0\right\}\right)$ доказывается стандартным способом.

Используя элементарную вариацию $\xi=\frac{w-\varepsilon}{1-w\overline{\varepsilon}}$, где $|\varepsilon|<1$, подобно тому, как это сделано в работах [10, 11], получаем нормирующее условие

$$\alpha a_1^0+a_2^0+a_3^0=0. \qquad (11)$$

Используя условие (11), равенства $|a_k^0|=1$, $k=1,2,3$, а также тот факт, что функционал (2) инвариантен относительно поворота комплексной плоскости вокруг начала координат, получаем

$$a_1^0=1,\quad a_3^0=\overline{a}_2^0,\quad \operatorname{Re}a_2^0=-\frac{\alpha}{2}. \qquad (12)$$

Так же, как и в [11], устанавливается, что области B_k^0, $k=1,2,3$, симметричны относительно единичной окружности ∂U_w.

Для дальнейшего изучения экстремальных пар применим вариационную формулу Дюрена-Шиффера [13]

$$w^*=w+\frac{A\rho^2}{w_0}\,\frac{w}{w-w_0}-\frac{\overline{A}\rho^2}{\overline{w_0}}\,\frac{w^2}{1-w\overline{w_0}}+O(\rho^3), \qquad (13)$$

где $\rho>0$ – достаточно малый параметр, $A=A(\rho)$ – параметр граничной вариации, $\rho^{-3}\left|O\left(\rho^3\right)\right|$ – величина, равномерно ограниченная на любом компакте комплексной плоскости $\mathbb{C}$, не содержащем точек w_0 и $(\overline{w_0}\,)^{-1}$.

Аналогично тому, как это сделано в работах [10, 11], на основании формулы (13) получим значение внутреннего радиуса для варьированных пар $\left(\left\{B_1^*,B_2^*,B_3^*\right\},\left\{a_1^*,a_2^*,a_3^*\right\}\right)$:

$$r\left(B_k^*,a_k^*\right)=r\left(B_k^0,a_k^0\right)\left\{1-\rho^2\operatorname{Re}A\left[\frac{2a_k^0}{w_0\left(a_k^0-w_0\right)^2}\right]+O\left(\rho^3\right)\right\}. \qquad (14)$$

Используя соотношение (14), а также применяя равенство (12), получаем следующее соотношение для варьированных пар $(\{B_1^*, B_2^*, B_3^*\}, \{a_1^*, a_2^*, a_3^*\})$:

$$\Delta_3^* = \Delta_3 \left\{ 1 - \rho^2 \mathrm{Re} A \left[\frac{2\left(\alpha - 2 + \alpha^2\right) w^2 + \left(8 + \alpha^3\right) w}{(w-1)^2 \left(w - e^{i(\pi - \phi)}\right)^2 \left(w - e^{i(\pi+\phi)}\right)^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2\left(\alpha - 2 + \alpha^2\right)}{(w-1)^2 \left(w - e^{i(\pi - \phi)}\right)^2 \left(w - e^{i(\pi+\phi)}\right)^2} \right] + O\left(\rho^3\right) \right\}, \qquad (15)$$

где Δ_3^* – значение Δ_3 на варьированных парах, $\phi = \arccos \frac{\alpha}{2}$. Из соотношения (15) следует неравенство

$$\mathrm{Re} \left[A \frac{2\left(\alpha - 2 + \alpha^2\right) w^2 + \left(8 + \alpha^3\right) w + 2\left(\alpha - 2 + \alpha^2\right)}{(w-1)^2 \left(w - e^{i(\pi - \phi)}\right)^2 \left(w - e^{i(\pi+\phi)}\right)^2} \right] \geq 0 \qquad (16)$$

справедливое для любых допустимых значениях w_0 и $A = A(\rho)$.

Теперь на основании неравенства (16) с учетом основной леммы метода граничной вариации Шиффера [14] приходим к заключению о том, что $\left(\overline{\mathbb{C}} \backslash \bigcup\limits_{k=1}^{3} B_k^0\right)$ есть замыкание объединения конечного числа траекторий квадратичного дифференциала (6). Наконец, используя теорему 1 работы [7], получаем неравенство (5). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3 осуществляется по схеме доказательства теоремы 2. Сначала стандартным способом устанавливается существование экстремальных пар $\left(\left\{B_1^0, B_2^0, B_3^0, B_4^0\right\}, \left\{a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0\right\}\right)$. Далее, используя элементарную вариацию $\xi = \frac{w - \varepsilon}{1 - w\overline{\varepsilon}}$, где $|\varepsilon| < 1$, легко устанавливается, что

$$a_1^0 = 1, \quad a_2^0 = e^{i\varphi}, \quad a_3^0 = -1, \quad a_4^0 = -e^{i\varphi}.$$

Затем устанавливается, что области B_k^0, $k = 1, 2, 3, 4$ симметричны относительно единичной окружности ∂U_w. Наконец, применяя вариационную формулу Дюрена-Шиффера (13) и действуя по схеме доказательства теоремы 2, получаем неравенство (7). Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4 опирается на метод кусочно-разделяющего преобразования, разработанный В.Н. Дубининым [7, 8, 15].

Пусть функция $\pi_k(w) = (-1)^k i w^{n/2}$ конформно отображает область $E_k := \left\{w : \frac{2\pi}{n}(k-1) < \arg w < \frac{2\pi}{n}k\right\}$ на правую полуплоскость $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ для всех $k = \overline{1,n}$.

Функции

$$z_k(w) = \frac{\pi_k(a_{2k}) - \pi_k(w)}{\pi_k(a_{2k}) + \pi_k(w)}, \quad k = \overline{1,n}, \qquad z_0(w) := z_n(w)$$

конформно отображают правую полуплоскость на внутренность единичного круга. Семейство функций $z_k(w)$ осуществляет разделяющее преобразование любой пары $(\tilde{F}_{2n}, \tilde{A}_{2n}) \in \tilde{\Omega}_{2n}$ относительно областей E_k, при этом выполняются равенства $z_k(a_{2k}) = 0$, $k = \overline{1,n}$.

Кроме того, при справедливы соотношения

$$\begin{gathered}
|z_k(w) - 1| \sim 2\,|w|^{n/2}, \qquad w \to 0, \quad k = \overline{1,n}, \\
|z_k(w) + 1| \sim 2\,|w|^{-\frac{n}{2}}, \qquad w \to \infty, \quad k = \overline{1,n}, \\
|z_k(w) - z_k(a_m)| \sim n\,\frac{|a_m|^{\frac{n}{2}-1}}{1 + |a_m|^n}\,|w - a_m|, \qquad w \to a_m, \qquad (17) \\
k = \overline{1,n-1}, \quad m = 2k-1, 2k+1, \\
|z_n(w) - z_n(a_m)| \sim n\,\frac{|a_m|^{\frac{n}{2}-1}}{1 + |a_m|^n}\,|w - a_m|, \qquad w \to a_m, \quad m = 1, 2n-1.
\end{gathered}$$

Результатом разделяющего преобразования областей B_{2k-1} относительно семейства функций $\{z_{k-1}(w), z_k(w)\}$, $k = \overline{1,n}$, являются области $\left\{G_4^{(k-1)}, G_2^{(k)}\right\}$, $k = \overline{1,n}$, где $G_4^{(0)} := G_4^{(n)}$. При этом $z_k(a_{2k-1}) =: \lambda_2^{(k)} \in G_2^{(k)}$, $z_k(a_{2k+1}) =: \lambda_4^{(k)} \in G_4^{(k)}$, $k = \overline{1,n-1}$, $z_n(a_{2n-1}) =: \lambda_2^{(n)} \in G_2^{(n)}$, $z_n(a_1) =: \lambda_4^{(n)} \in G_4^{(n)}$.

Используя теорему 1.9 из [8] и соотношения (17), при $k = \overline{1,n}$ получаем неравенства

$$r(B_{2k-1}, a_{2k-1}) \leq \left[\frac{r\left(G_4^{(k-1)}, \lambda_4^{(k-1)}\right)\, r\left(G_2^{(k)}, \lambda_2^{(k)}\right)}{\frac{n\,|a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}-1}}{1+|a_{2k-1}|^n}\;\frac{n\,|a_{2k-1}|^{\frac{n}{2}-1}}{1+|a_{2k-1}|^n}}\right]^{1/2}, \qquad (18)$$

где $\lambda_4^{(0)} := \lambda_4^{(n)}$.

Для области B_0 в результате применения разделяющего преобразования относительно семейства $\{z_k(w)\}_{k=1}^n$ получаем набор областей

$G_1^{(k)}$ таких, что $z = 1 \in G_1^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$, и при этом справедливо неравенство

$$r(B_0, 0) \leq \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \prod_{k=1}^{n} r\left(G_1^{(k)}, 1\right) \right]^{2/n^2}. \tag{19}$$

Для области B_∞ в результате применения разделяющего преобразования относительно семейства $\{z_k(w)\}_{k=1}^n$ получаем набор областей $G_3^{(k)}$ таких, что $z = -1 \in G_3^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$, и при этом справедливо неравенство

$$r(B_\infty, \infty) \leq \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \prod_{k=1}^{n} r\left(G_3^{(k)}, -1\right) \right]^{2/n^2}. \tag{20}$$

Для областей B_{2k}, $k = \overline{1, n}$, в результате применения разделяющего преобразования относительно семейства $\{z_k(w)\}_{k=1}^n$ получаем набор областей $G_0^{(2k)}$, $G_\infty^{(2k)}$ таких, что $z = 0 \in G_0^{(2k)}$, $z = \infty \in G_\infty^{(2k)}$, $k = \overline{1, n}$, и при этом справедливо неравенство

$$r(B_{2k}, a_{2k}) = \frac{4}{n} \left(r\left(G_0^{(2k)}, 0\right) r\left(G_\infty^{(2k)}, \infty\right) \right)^{1/2}. \tag{21}$$

Таким образом, совокупность областей $\{E_k\}_{k=1}^n$ и любая система пар $(\tilde{F}_{2n}, \tilde{A}_{2n}) \in \tilde{\Omega}_{2n}$ порождают систему пар $\left(\left\{ G_0^{(k)}, G_1^{(k)}, G_2^{(k)}, G_3^{(k)}, G_4^{(k)}, G_\infty^{(k)} \right\}, \left\{ 0, 1, \lambda_2^{(k)}, -1, \lambda_4^{(k)}, \infty \right\} \right) \in \tilde{\Omega}_4$.

Из неравенств (18) – (21) получаем

$$\Xi_{2n} \leq \frac{4^{n\alpha}}{n^{n(\alpha+1)}} \prod_{k=1}^{n} \chi\left(|a_{2k-1}|^{n/2} \right) |a_{2k-1}| \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \left(r(G_0^{(k)}, 0)\, r(G_\infty^{(k)}, \infty) \right)^{\alpha/2} \times$$

$$\times \left[r(G_2^{(k)}, \lambda_2^{(k)})\, r(G_4^{(k)}, \lambda_4^{(k)})\, r(G_1^{(k)}, 1)\, r(G_3^{(k)}, -1) \right]^{1/2}. \tag{22}$$

Теперь при условиях теоремы 4 из (22) следует неравенство

$$\Xi_{2n} \leq \frac{4^{n\alpha}}{n^{n(\alpha+1)}} \prod_{k=1}^{n} \left(r(G_0^{(k)}, 0)\, r(G_\infty^{(k)}, \infty) \right)^{\alpha/2} \times$$

$$\times \left[r(G_2^{(k)}, \lambda_2^{(k)})\, r(G_4^{(k)}, \lambda_4^{(k)})\, r(G_1^{(k)}, 1)\, r(G_3^{(k)}, -1) \right]^{1/2}. \qquad (23)$$

Далее с использованием результатов работы [15] из оценки (23) получаем неравенство

$$\Xi_{2n} \leq \frac{4^{n\alpha}}{n^{n(\alpha+1)}} \left(\left(r\left(B_0^0, 0\right)\, r\left(B_\infty^0, \infty\right) \right)^\alpha \times \right.$$

$$\left. \times\, r\left(B_1^0, 1\right)\, r\left(B_2^0, \lambda_2^0\right)\, r\left(B_3^0, -1\right)\, r\left(B_4^0, \lambda_4^0\right) \right)^{n/2},$$

где области B_0^0, B_∞^0, B_k^0, $k = 1, 2, 3, 4$, и точки λ_2^0, λ_4^0 являются соответственно круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала (9). Наконец, используя свойства разделяющего преобразования, получаем неравенство (8). Теорема доказана.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Государственной программы Украины № 0102U000917.

Литература

[1] Лаврентьев М. А. К теории конформных отображений, *Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР*, 1934, – **5.** – С. 159 – 245.

[2] Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного, – М.: Наука, 1966. – 628 с.

[3] Лебедев Н. А. Принцип площадей в теории однолистных функций, – М.: Наука, 1975. – 336 с.

[4] Дженкинс Дж. А. *Однолистные функции и конформные отображения*. – М: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.

[5] Бахтина Г. П. *Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях:* Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.

[6] Кузьмина Г. В. Методы геометрической теории функций I, II, *Алгебра и анализ*, 1997. – **9,** № 3. – С. 41 – 103, № 5. – С. 1 – 50.

[7] Дубинин В. Н. Метод симметризации в задачах о неналегающих областях, *Мат. сб.*, – 1985. – **128,** № 1. – С. 110 – 123.

[8] Дубинин В. Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного, *Успехи мат. наук.*, 1994. – **49,** № 1 (295). – С. 3 – 76.

[9] Бахтин А. К., Таргонский А. Л. *Некоторые экстремальные задачи теории конформных отображений*, Экстремальные задачи теории однолистных функций. – Киев, 2002. – С. 10 – 14. – (Препр. НАН Украины. Ин-т математики; 2002.6).

[10] Бахтин А. К. О произведении внутренних радиусов симметричных неналегающих областей, *Укр. мат. журн.*, 1997. – **49,** № 11. – С. 1454 – 1464.

[11] Бахтин А. К. Некоторые задачи в теории неналегающих областей, *Укр. мат. журн.*, 1999. – **51,** № 6. – С. 723 – 731.

[12] Колбина Л. И. Конформное отображение единичного круга на неналегающие друг на друга области, *Вест. Ленинградского ун-та*, 1955. – № 5. – С. 37 – 43.

[13] Duren P.L., Schiffer M. A variation method for function schlicht in annulus, *Arch. Ration. Mech. and Anal.*, 1962. – **9.** – P. 260 – 272.

[14] Schiffer M. A method of variation within the family of simple functions, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1938. - **44.** - P. 432 - 449.

[15] Дубинин В.Н. Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении, *Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР*, – 1988. – **168.** – С. 48 – 66.