Укр. мат. журн. – 2010. – **62***, № 10. – С. 1428 – 1435.*

УДК 517.5

О. Ф. Герус (O. F. Gerus) (Житомирський державний університет, Житомир)

ОЦІНКА МОДУЛЯ НЕПЕРЕРВНОСТІ КВАТЕРНІОННОГО СИНГУЛЯРНОГО ІНТЕГРАЛА КОШІ

AN ESTIMATE FOR THE CONTINUITY MODULE OF A QUATERNION SINGULAR CAUCHY INTEGRAL

Доведено верхню оцінку модуля неперервності кватерніонного сингулярного інтеграла Коші через модуль неперервності підінтегральної функції та метричну характеристику кривої.

An upper estimate for the continuity module of a quaternion singular Cauchy integral is proved in terms of the continuity module of the integrand and a metric characteristic of the curve.

1. Вступ. А. Зигмунд [1] вперше довів оцінку модуля неперервності тригонометрично спряженої функції на прямій, що рівносильна оцінці модуля неперервності сингулярного інтеграла Коші на колі. З цієї оцінки, зокрема, випливає теорема Племеля-Привалова про інваріантність класів Гьольдера відносно сингулярного інтеграла Коші. Оцінка А. Зигмунда узагальнювалась на більш широкі класи кривих в роботах Л. Г. Магнарадзе [2, 3], А. А. Бабаєва та В. В. Салаева [4, 5, 6], П. М. Тамразова [7, 8], О. Ф. Геруса [9, 10, 11], Т. С. Салімова [12], Є. М. Динькіна [13]. Зокрема, з'ясувалось, що найбільш широким класом кривих (див. [6, 9]), для яких вона має такий же вигляд, як і на колі, є клас регулярних кривих (у яких міра частини кривої, що потрапляє в круг, не перевищує сталої, помноженої на радіус круга). На більш загальних кривих (див. [6, 9, 10, 12, 13, 11]) мажоранта погіршується і починає залежати ще і від кривої.

В роботі [14] розглянуто узагальнення інтеграла типу Коші в теорії так званих α-гіперголоморфних функцій, які діють з простору $\mathbb{R}^2$, наділеного певною структурою кватерніонного множення, у алгебру комплексних кватерніонів. Доведено формули для межових значень такого інтеграла на замкнених кусково-ляпуновських кривих та теорему Племеля-Привалова для відповідного сингулярного інтеграла, через який виражаються межові значення. В роботі [15] доведені аналогічні формули для замкнених жорданових спрямлюваних кривих. Метою даної роботи є отримання оцінки модуля неперервності відповідного сингулярного інтеграла.

2. Кватерніони. Кватерніонне узагальнення інтеграла типу Коші. Позначимо через $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\mathbb{R})$ та $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ відповідно алгебри дійсних та комплексних кватерніонів, тобто таких, що подаються у вигляді $a = \sum_{k=0}^{3} a_k \boldsymbol{i_k}$, де $\{a_k\}_{k=0}^{3} \subset \mathbb{R}$ для дійсних кватерніонів і $\{a_k\}_{k=0}^{3} \subset \mathbb{C}$ — для комплексних; $\boldsymbol{i}_0 = 1$, а $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ — уявні одиниці з правилом множення: ${\boldsymbol{i}_1}^2 = {\boldsymbol{i}_2}^2 = {\boldsymbol{i}_3}^2 = \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3 = -1$; комплексну уявну одиницю позначатимемо через i. $\mathbb{H}$ є некомутативною асоціативною алгеброю над полем дійсних чисел і не має дільників нуля. $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ є некомутативною асоціативною алгеброю над полем комплексних чисел, яка має дільники нуля.

Під модулем комплексного кватерніона розумітимемо його евклідову норму $|a| = \|a\|_{\mathbb{R}^8}$. Для дійсних кватерніонів a, b виконуються рівності $|ab| = |a|\,|b|$, $|a|^2 = a\,\overline{a} = \overline{a}\,a$, де $\overline{a} := a_0 - \sum\limits_{k=1}^{3} a_k \boldsymbol{i}_k$ — спряжений кватерніон. Для комплексних кватерніонів справедливі співвідношення $|a|^2 \neq a\overline{a}$ та

$$|ab| \leqslant \sqrt{2}\,|a|\,|b| \tag{1}$$

(див. лему 2.1 роботи [15]).

Нехай $\alpha \in \mathbb{C}$, $z := x\boldsymbol{i}_1 + y\boldsymbol{i}_2$, $\zeta := \xi\boldsymbol{i}_1 + \eta\boldsymbol{i}_2$ — дійсні кватерніони, які містяться в евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$, наділеному додатковою структурою кватерніонного множення, $H_n^{(p)}$ — функції Ганкеля роду $p \in \{1;2\}$ і порядку $n \in \{0;1;2\}$ (див. [16]). Позначимо:

$$\mathcal{E}_\alpha(z) := \begin{cases} (-1)^p \dfrac{i}{4} H_0^{(p)}(\alpha|z|) & \text{при } \alpha \neq 0, \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln|z| & \text{при } \alpha = 0, \end{cases}$$

де

$$p = \begin{cases} 1 & \text{при } Im(\alpha) > 0 \text{ або } \alpha > 0, \\ 2 & \text{при } Im(\alpha) < 0 \text{ або } \alpha < 0. \end{cases}$$

Відомо (див., напр., [17]), що функція $\mathcal{E}_\alpha$ є фундаментальним розвязком оператора Гельмгольца $\Delta_{\alpha^2} := \Delta_{\mathbb{R}^2} + M^{\alpha^2}$, де $\Delta_{\mathbb{R}^2} = \partial_1^2 + \partial_2^2$, $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$, і M^a — оператор множення на $a \in \mathbb{C}$.

Кватерніонним ядром Коші K_α називається фундаментальний розв'язок оператора ${}_\alpha\partial := \partial_1 \circ M^{\boldsymbol{i}_1} + \partial_2 \circ M^{\boldsymbol{i}_2} + M^\alpha$ подібно до того, як класичне ядро Коші є фундаментальним розв'язком оператора Коші-Рімана $\overline{\partial} := \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$. Завдяки факторизації оператора Гельмгольца (див. [18], [15])

$$\Delta_{\alpha^2} = -{}_\alpha\partial \circ {}_{-\alpha}\partial$$

маємо

$$K_\alpha(z) = -\partial_{-\alpha}[\mathcal{E}_\alpha](z),$$

звідки отримуємо

$$K_\alpha(z) = \begin{cases} (-1)^p \dfrac{i\alpha}{4}\left(H_1^{(p)}(\alpha|z|)\dfrac{z}{|z|} + H_0^{(p)}(\alpha|z|)\right) & \text{при } \alpha \neq 0, \\ -\dfrac{z}{2\pi|z|^2} & \text{при } \alpha = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Функції Ганкеля $H_0^{(p)}(t)$, $H_1^{(p)}(t)$ наступним чином розкладаються в ряди (див. [16]):

$$H_0^{(p)}(t) = \left(1 - (-1)^p \frac{2i}{\pi}(\ln\frac{t}{2} + \boldsymbol{C})\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} + \frac{2i}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+p}t^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}, \tag{3}$$

$$H_1^{(p)}(t) = \left(1 - (-1)^p \frac{2i}{\pi}(\ln\frac{t}{2} + \boldsymbol{C})\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{2^{2k+1}k!(k+1)!} +$$
$$+ (-1)^p\left(\frac{2i}{\pi t} + \frac{it}{2\pi}\right) + \frac{i}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+p}t^{2k+1}}{2^{2k+1}k!(k+1)!}\left(\sum_{m=1}^{k+1}\frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}\right), \tag{4}$$

де $\boldsymbol{C}$ — стала Ейлера.

Для замкненої жорданової спрямлюваної кривої $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ і неперервної функції $f : \Gamma \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ кватерніонний інтеграл типу Коші визначається формулою (див. [15])

$$\Phi_\alpha[f](z) := \int_\Gamma K_\alpha(\zeta - z)\,\sigma\, f(\zeta), \qquad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma,$$

де $\sigma := d\eta \boldsymbol{i}_1 - d\xi \boldsymbol{i}_2$.

3. Кватерніонний сингулярний інтеграл Коші. Нехай $\delta > 0$,

$$\omega_\Gamma(f,\delta) := \sup_{\substack{|z_1 - z_2| \leqslant \delta \\ \{z_1; z_2\} \subset \Gamma}} |f(z_1) - f(z_2)|$$

— модуль неперервності функції f на Γ,

$$\Omega_\Gamma(f,a,b) := \begin{cases} \sup\limits_{a \leqslant t \leqslant b} \dfrac{\omega_\Gamma(f,t)}{t} & \text{при } 0 < a \leqslant b, \\ \Omega_\Gamma(f,b,b) & \text{при } 0 < b < a, \end{cases}$$

$\Gamma_{z,\delta} := \{\zeta{\in}\Gamma : |\zeta - z| \leqslant \delta\}$, $\theta_z(\delta) := \mathrm{mes}\,\Gamma_{z,\delta}$ — криволінійна міра Лебега множини $\Gamma_{z,\delta}$ (див. [6]),

$$\Theta(z,\delta) := \frac{\delta^2}{\theta_z(4\delta) - \theta_z(\delta)}\,.$$

Об'єктом дослідження в даній роботі є сингулярний інтеграл

$$F_\alpha[f](t) := \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_{t,\delta}} K_\alpha(\zeta - t)\,\sigma\,(f(\zeta) - f(t)), \qquad t\in\Gamma,$$

з яким пов'язане існування межових значень інтеграла типу Коші Φ_α і в термінах якого виражаються ці значення (див. теорему 3.3 роботи [15]).

Надалі позначатимемо через $c\,(\cdot), \ldots, c\,(\cdot, \ldots, \cdot)$ додатні сталі (можливо різні), які залежать лише від аргументів у дужках. Символом c без аргументів позначатимемо абсолютні сталі.

Теорема. *Нехай функція $f : \Gamma \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ задовольняє умови*

$$\sup_{z\in\Gamma} \int\limits_0^d \Omega_\Gamma(f, \Theta(z,x), x)\,dx < +\infty, \tag{5}$$

$$\sup_{z\in\Gamma} \int\limits_0^d |\ln x|\,\omega_\Gamma(f,x)\,d\theta_z(x) < +\infty. \tag{6}$$

Тоді інтеграл $F_\alpha[f]$ існує в кожній точці кривої Γ і справедлива оцінка

$$\begin{aligned}\omega_\Gamma(F_\alpha[f],\delta) \leqslant{} & c \sup_{z\in\Gamma} \int\limits_0^{2d} \Omega_\Gamma(f,\Theta(z,x),x) \frac{dx}{1+\dfrac{x}{\delta}} + \\ & + c(\alpha) \sup_{z\in\Gamma} \int\limits_0^d \frac{|\ln x|\,\omega_\Gamma(f,x)}{1+\dfrac{\omega_\Gamma(f,x)}{\omega_\Gamma(f,4\delta)}}\,d\theta_z(x) + \\ & + c(\alpha)\,\delta \sup_{z\in\Gamma} \int\limits_{3\delta}^d \frac{\omega_\Gamma(f,x)}{x}\,d\theta_z(x),\end{aligned} \tag{7}$$

де d — діаметр кривої Γ.

Доведення. Завдяки формулам (2) — (4) ядро Коші K_α подається у вигляді

$$K_\alpha(z) = -\frac{z}{2\pi|z|^2} + \frac{\alpha}{2\pi}\ln|z| + \widetilde{K}_\alpha(z), \tag{8}$$

де $\widetilde{K}_\alpha$ — неперервна функція, рівна нулю при $\alpha = 0$. Тому $F_\alpha = F + L_\alpha + \widetilde{F}_\alpha$, де

$$F[f](t) := -\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma \frac{\zeta - t}{|\zeta - t|^2}\,\sigma\,(f(\zeta) - f(t)), \qquad t \in \Gamma,$$

$$L_\alpha[f](t) := \frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_\Gamma \ln|\zeta - t|\,\sigma\,(f(\zeta) - f(t)), \qquad t \in \Gamma,$$

$$\widetilde{F}_\alpha[f](t) := \int\limits_\Gamma \widetilde{K}_\alpha(\zeta - t)\,\sigma\,(f(\zeta) - f(t)), \qquad t \in \Gamma.$$

Згідно означення модуля неперервності маємо

$$\omega_\Gamma(F_\alpha[f],\delta) \leqslant \omega_\Gamma(F[f],\delta) + \omega_\Gamma(L_\alpha[f],\delta) + \omega_\Gamma(\widetilde{F}_\alpha[f],\delta).$$

Інтеграл $F[f]$ зводиться до вигляду

$$F[f](t) = \frac{\boldsymbol{i_1}}{2\pi}\int\limits_\Gamma \frac{d\tilde{\zeta}}{\tilde{\zeta} - \tilde{t}}\,\boldsymbol{i_2}\,(f(\tilde{\zeta}) - f(\tilde{t})), \tag{9}$$

де $\tilde{\zeta} = \xi + \eta\boldsymbol{i_3}$, $\tilde{t} = \nu + \tau\boldsymbol{i_3}$. Розщепивши функцію f на компоненти, отримаємо чотири комплексні інтеграли, в яких $\boldsymbol{i_3}$ виступає в ролі уявної одиниці. Існування цих інтегралів випливає з умови (5) за теоремою 1 роботи [11]. Застосувавши до них оцінку (2) роботи [11], отримаємо

$$\omega_\Gamma(F[f],\delta) \leqslant c\sup_{z\in\Gamma}\int\limits_0^{2d} \Omega_\Gamma(f,\Theta(z,x),x)\frac{dx}{1 + \dfrac{x}{\delta}}. \tag{10}$$

Існування інтеграла $L_\alpha[f]$ випливає з умови (6) аналогічно існуванню інтеграла виду (9), доведеному в роботі [11]. Оцінимо $\omega_\Gamma(L_\alpha[f],\delta)$. Нехай

$\{t_1;t_2\}\subset\Gamma\,,\ |t_1-t_2|\leqslant\delta\,.$ Тоді

$$
\begin{aligned}
|L_\alpha[f](t_1)-L_\alpha[f](t_2)|\,\frac{2\pi}{|\alpha|}\leqslant{}&\left|\,\int\limits_{\Gamma_{t_1,3\delta}}\ln|\zeta-t_1|\,\sigma\left(f(\zeta)-f(t_1)\right)\right|+\\
&+\left|\,\int\limits_{\Gamma_{t_1,3\delta}}\ln|\zeta-t_2|\,\sigma\left(f(\zeta)-f(t_2)\right)\right|+\\
&+\left|\,\int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_{t_1,3\delta}}\ln\frac{|\zeta-t_1|}{|\zeta-t_2|}\,\sigma\left(f(\zeta)-f(t_1)\right)\right|+\\
&+\left|\,\int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_{t_1,3\delta}}\ln|\zeta-t_2|\,\sigma\left(f(t_2)-f(t_1)\right)\right|=:I_1+I_2+I_3+I_4.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Враховуючи оцінку (1), маємо

$$
\begin{aligned}
I_1\leqslant{}&\sqrt{2}\int\limits_{\Gamma_{t_1,3\delta}}|\ln|\zeta-t_1||\;|f(\zeta)-f(t_1)|\,|d\zeta|\leqslant\\
&\leqslant\sqrt{2}\int\limits_0^{\min\{3\delta;d\}}|\ln x|\,\omega_\Gamma(f,x)\,d\theta_{t_1}(x),
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
I_2\leqslant\sqrt{2}\int\limits_0^{\min\{4\delta;d\}}|\ln x|\,\omega_\Gamma(f,x)\,d\theta_{t_2}(x).
\tag{13}
$$

Завдяки нерівності

$$
\left|\ln\frac{|\zeta-t_1|}{|\zeta-t_2|}\right|\leqslant\frac{3\delta}{|\zeta-t_1|},
$$

яка виконується для $\zeta\in\Gamma\setminus\Gamma_{t_1,3\delta}$, отримуємо

$$
I_3\leqslant 3\sqrt{2}\,\delta\int\limits_{3\delta}^{d}\frac{\omega_\Gamma(f,x)}{x}\,d\theta_{t_1}(x),
\tag{14}
$$

$$
I_4\leqslant\sqrt{2}\,\omega_\Gamma(f,\delta)\int\limits_{2\delta}^{d}|\ln x|\,d\theta_{t_2}(x).
\tag{15}
$$

З нерівностей (11) — (15) випливає

$$\omega_\Gamma(L_\alpha[f],\delta)\leqslant\frac{3\sqrt{2}\,|\alpha|}{\pi}\sup_{z\in\Gamma}\int\limits_0^d\frac{|\ln x|\,\omega_\Gamma(f,x)}{1+\dfrac{\omega_\Gamma(f,x)}{\omega_\Gamma(f,4\delta)}}\,d\theta_z(x)+ \\ \frac{3\sqrt{2}\,|\alpha|}{2\pi}\delta\sup_{z\in\Gamma}\int\limits_{3\delta}^d\frac{\omega_\Gamma(f,x)}{x}\,d\theta_z(x). \tag{16}$$

Інтеграл $\widetilde{F}_\alpha[f]$ існує завдяки неперервності підінтегральної функції. З формул (2) — (4), (8) випливає подання $\widetilde{K}_\alpha(\zeta-t)=c(\alpha)+\ln|\zeta-t|\,\varphi(|\zeta-t|)$, де функція φ — неперервна на всій площині (після доозначення $\varphi(0)=0$). Тому $\omega_\Gamma(\widetilde{F}_\alpha[f],\delta)$ оцінюється тією ж мажорантою, що і $\omega_\Gamma(L_\alpha[f],\delta)$. Таким чином, нерівність (7) випливає з оцінок (10), (16). Теорема доведена.

Означення. *Замкнена жорданова спрямлювана крива Γ називається регулярною або K-регулярною, якщо існує така додатня стала K, що для всіх $z\in\Gamma$ і всіх $\delta>0$ виконується умова $\theta_z(\delta)\leqslant K\delta$.*

Наслідок 1. *Нехай Γ — K-регулярна крива і функція $f:\Gamma\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ задовольняє умову*

$$\int\limits_0^d\frac{\omega_\Gamma(f,x)}{x}\,dx<\infty.$$

Тоді інтеграл $F_\alpha[f]$ існує в кожній точці кривої Γ і справедлива оцінка

$$\omega_\Gamma(F_\alpha,\delta)\leqslant c(K,d,\alpha)\int\limits_0^{2d}\frac{\omega_\Gamma(f,x)}{x\left(1+\dfrac{x}{\delta}\right)}dx. \tag{17}$$

Доведення. З монотонності модуля неперервності та означення K-регулярної кривої випливає

$$\Omega_\Gamma(f,\Theta(z,x),x)\leqslant\frac{\theta_z(4x)-\theta_z(x)}{x^2}\omega_\Gamma(f,x)\leqslant 4K\frac{\omega_\Gamma(f,x)}{x}. \tag{18}$$

Використовуючи інтегрування частинами та монотонність функцій

$\omega_\Gamma(f,x)$, $\theta_z(x)$, отримаємо

$$\begin{aligned}\delta\int\limits_{3\delta}^{d}\frac{\omega_\Gamma(f,x)}{x}\,d\theta_z(x)\leqslant 2\delta\int\limits_{3\delta}^{d}\int\limits_{x}^{2x}\frac{\omega_\Gamma(f,t)}{t}\,dt\,d\theta_z(x)\leqslant\\ \leqslant 2\delta\int\limits_{3\delta}^{2d}\frac{\theta_z(x)\,\omega_\Gamma(f,x)}{x^2}\,dx\leqslant 8Kd\int\limits_{0}^{2d}\frac{\omega_\Gamma(f,x)}{x\left(1+\dfrac{x}{\delta}\right)}dx.\end{aligned}\tag{19}$$

Оцінимо інтеграл (13) (інтеграл (12) оцінюється аналогічно). Знову застосувавши інтегрування частинами та монотонність функцій $\omega_\Gamma(f,x)$, $\theta_z(x)$, при умові $4\delta<1\leqslant 2d$ маємо

$$\begin{aligned}\int\limits_{0}^{\min\{4\delta;d\}}|\ln x|\,\omega_\Gamma(f,x)\,d\theta_{t_2}(x)\leqslant\int\limits_{0}^{4\delta}\int\limits_{x}^{1}\frac{\omega_\Gamma(f,t)}{t}\,dt\,d\theta_{t_2}(x)\leqslant\\ \leqslant\int\limits_{0}^{4\delta}\frac{\theta_{t_2}(x)\,\omega_\Gamma(f,x)}{x}\,dx+\theta_{t_2}(4\delta)\int\limits_{4\delta}^{1}\frac{\omega_\Gamma(f,x)}{x}\,dx\leqslant\\ \leqslant 8K\int\limits_{0}^{2d}\frac{\omega_\Gamma(f,x)}{x\left(1+\dfrac{x}{\delta}\right)}dx.\end{aligned}\tag{20}$$

А якщо $4\delta<2d\leqslant 1$, то

$$\begin{aligned}\int\limits_{0}^{\min\{4\delta;d\}}|\ln x|\,\omega_\Gamma(f,x)\,d\theta_{t_2}(x)\leqslant\\ \leqslant\int\limits_{0}^{4\delta}\int\limits_{x}^{2d}\frac{\omega_\Gamma(f,t)}{t}\,dt\,d\theta_{t_2}(x)+|\ln 2d|\int\limits_{0}^{4\delta}\omega_\Gamma(f,x)\,d\theta_{t_2}(x)\leqslant\\ \leqslant 8K\int\limits_{0}^{2d}\frac{\omega_\Gamma(f,x)}{x\left(1+\dfrac{x}{\delta}\right)}dx+16K|\ln 2d|\delta^2\omega_\Gamma(f,4\delta)\leqslant\\ \leqslant c(K,d)\int\limits_{0}^{2d}\frac{\omega_\Gamma(f,x)}{x\left(1+\dfrac{x}{\delta}\right)}dx.\end{aligned}\tag{21}$$

Оцінимо другий доданок в нерівності (14). Нехай $2\delta<1<d$. Застосо-

вуючи інтегрування частинами, отримаємо

$$\omega_\Gamma(f,\delta)\int\limits_{2\delta}^{d}|\ln x|\,d\theta_{t_2}(x)=$$

$$=\omega_\Gamma(f,\delta)\left(\int\limits_{2\delta}^{1}\int\limits_{x}^{1}\frac{dt}{t}\,d\theta_{t_2}(x)+\int\limits_{1}^{d}\int\limits_{1}^{x}\frac{dt}{t}\,d\theta_{t_2}(x)\right)\leqslant \tag{22}$$

$$\leqslant(2K+Kd\ln d)\omega_\Gamma(f,\delta)\leqslant 4K(2+d\ln d)\int\limits_{0}^{2d}\frac{\omega_\Gamma(f,x)}{x\left(1+\dfrac{x}{\delta}\right)}dx.$$

У випадку $2\delta<d<1$ міркування аналогічні і мажоранта міститиме перед знаком інтеграла лише множник $8K$.

Оцінка (17) випливає з нерівностей (10) — (14), (18) — (22). Наслідок доведений.

Позначимо

$$H_\mu(\Gamma):=\{f:\Gamma\to\mathbb{H}(\mathbb{C}):\omega_\Gamma(f,\delta)=O(\delta^\mu),\delta\to 0\}.$$

З попереднього наслідку очевидним чином випливає наступне твердження, відоме як теорема Племеля-Привалова (у випадку, коли Γ — кусково-ляпуновська крива, див. [14]).

Наслідок 2. *Нехай* Γ — K*-регулярна крива,* $0<\mu<1$ *і* $f\in H_\mu(\Gamma)$. *Тоді інтеграл* $F_\alpha[f]$ *існує в кожній точці кривої* Γ *і* $F_\alpha[f]\in H_\mu(\Gamma)$.

Література

[1] Zygmund A. *Sur le module de continuité de la somme de la série conjuguée de la s'erie de Fourier*// Prace Matematyczno-Fizyczne. – 1924. – **33**. – P. 125 – 132.

[2] Магнарадзе Л. Г. *Об одном обобщении теоремы Племеля-Привалова*// Сообщ. АН Груз. ССР. – 1947. – **8**, № 8. – С. 509 – 516.

[3] Магнарадзе Л. Г. *Об одном обобщении теоремы И. И. Привалова и его применение к некоторым граничным задачам теории функций и к сингулярным интегральным уравнениям*// ДАН СССР. – 1949. – **68**, № 4. – С. 657 – 660.

[4] Бабаев А. А. *Об особом интеграле с непрерывной плотностью*// Уч. зап. Азерб. ун-та. Серия физ.-мат. и хим. наук. – 1965. – № 5. – С. 11 – 28.

[5] Бабаев А. А., Салаев В. В. *Одномерный сингулярный оператор с непрерывной плотностью по замкнутой кривой*// ДАН СССР. – 1973. **209**, № 6. – С. 1257 – 1260.

[6] Салаев В. В. *Прямые и обратные оценки для особого интеграла Коши по замкнутой кривой*// Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 3. – С. 365 – 380.

[7] Тамразов П. М. *Об ограниченных голоморфных функциях в комплексной области*// 3-й съезд болг. матем. Резюмета на докладите III конгрес на Болгарските математици, ч. 1. Варна, 1972. – С. 186 – 187.

[8] Тамразов П. М. *Гладкости и полиномиальные приближения.* – Киев: Наукова думка, 1975. – 272 с.

[9] Герус О. Ф. *Конечноразностные гладкости интегралов типа Коши*// Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 5. – С. 642 – 646.

[10] Герус О. Ф. *Некоторые оценки модулей гладкости интегралов типа Коши*// Укр. мат. журн. – 1978. – **30**, № 5. – С. 594 – 601.

[11] Герус О. Ф. *Оценка модуля непрерывности интеграла типа Коши в области и на её границе*// Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 10. – С. 1321 – 1328.

[12] Салимов Т. С. *Прямая оценка для сингулярного интеграла Коши по замкнутой кривой*// Науч. труды МВ и ССО Азерб. ССР. Серия физ.-мат. наук. – 1979, № 5. – С. 59 – 75.

[13] Дынькин Е. М. *Гладкость интегралов типа Коши*// Зап. науч. семин. ЛОМИ. – 1979. – **92**. – С. 115 – 133.

[14] Gerus O., Schneider B., Shapiro M. *On boundary properties of α-hyperholomorphic functions in domains of $\mathbb{R}^2$ with the piece-wise Liapunov boundary*// Progress in Analysis. Proceedings of 3rd International ISAAC Congress, Volume 1, Berlin, Germany, 20 – 25 August 2001, World Scientific, 2003. – P. 375 – 382.

[15] Gerus O. F., Shapiro M. V. *On a Cauchy-type integral related to the Helmholtz operator in the plane*// Boletin de la Sociedad Matemática Mexicana. – 2004. – **10**, № 1. – P. 63 – 82.

[16] Градштейн И. С., Рыжик И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* – Москва: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

[17] Владимиров В. С. *Уравнения математической физики.* – Москва: Наука, 1981. – 512 с.

[18] Rocha-Chávez R., Shapiro M. V., Tovar L. M. *On the Hilbert operator for α-hyperholomorphic function theory in $\mathbb{R}^2$*// Complex Variables Theory Appl. – 2000. – **43**, № 1. – P. 1 – 28.