

Теоремы Лиувилля, Пикара и Сохоцкого для кольцевых отображений

ЕВГЕНИЙ А. СЕВОСТЬЯНОВ

(Представлена В. Я. Гутлянским)

Аннотация. Доказано, что изолированная особенность $x_0 \in D$ открытого дискретного кольцевого Q -отображения $f : D \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ устранима, если функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание, либо логарифмические особенности порядка не выше, чем $n - 1$ в точке x_0 . Более того, продолженное отображение открыто и дискретно. В качестве приложений, получены аналоги хорошо известных теорем Лиувилля, Пикара и Сохоцкого.

2000 MSC. 30C65, 30C75.

Ключевые слова и фразы. ???.

1. Введение

Как известно, в основу определения квазиконформных отображений, заданных в области D из \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, положено неравенство

$$M(f\Gamma) \leq K M(\Gamma), \quad (1.1)$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D , где M — модуль семейства кривых (внешняя мера, определённая на семействах кривых в \mathbb{R}^n), а $K \geq 1$ — некоторая постоянная. Другими словами, модуль любого семейства кривых искажается не более, чем в K раз. На языке ёмкостей соотношение (1.1) означает, что отображение f искажает ёмкость любого конденсатора в D не более, чем в K раз. Пусть в основе определения класса отображений, вместо соотношения (1.1), лежит неравенство вида

$$M(f\Gamma) \leq \int_D Q(x) \cdot \rho^n(x) dm(x) \quad (1.2)$$

где $dm(x)$ — n -мерная мера Лебега, ρ — произвольная неотрицательная борелевская функция, такая что произвольная кривая γ семейства Γ имеет длину, не меньшую 1 в метрике ρ , а $Q : D \rightarrow [1, \infty]$ — измеримая функция, см. [3], см. также [16]. В случае, когда $Q(x) \leq K$ п.в., мы снова приходим к неравенству (1.1). В общем случае, последнее неравенство означает, что искажение модуля исходного семейства Γ происходит с некоторым весом $Q(x)$, $M(f\Gamma) \leq M_{Q(x)}(\Gamma)$, см., напр., [1, 2, 24]. Более общо, можно предполагать, что контролируемым образом искажаются не все кривые семейства Γ , а только “некоторые”. В данной работе мы рассматриваем преимущественно семейства кривых, которые соединяют концентрические сферы с центром в фиксированной точке области; таким образом, в дальнейшем речь идёт о классах так называемых кольцевых Q -отображений, которые, в случае неограниченной функции $Q(x)$, не совпадают с классом квазирегулярных отображений. В данной статье рассматривается задача следующего характера: поиск условий на функцию $Q(x)$, участвующую в определении отображения f , см. соотношение (1.2), при которых f продолжается по непрерывности в изолированную граничную точку. Отображение f предполагается здесь только открытым и дискретным; для гомеоморфизмов аналогичные теоремы были получены в [11], а для локальных гомеоморфизмов в [4]. Техника исследования отображений с ветвлением во многом отличается, см. работы для дискретных открытых отображений [5, 20, 21]. Из полученных теорем вытекают некоторые интересные, на наш взгляд, следствия: в частности, теоремы типа Лиувилля, Пикара и Сохоцкого. Теория Q -гомеоморфизмов — гомеоморфизмов, для которых выполнено (1.2), а также близких к ним классов, развивалась в основном для случая, когда мажоранта принадлежала известному пространству BMO (функций ограниченного среднего колебания по Джону–Ниренбергу [12]), см., напр., [15]. Возможность непрерывного продолжения в изолированную граничную точку для квазирегулярных отображений была показана в работах О. Мартио, С. Рикмана и Ю. Вяйсяля, см., напр., [14, 18].

2. Предварительные сведения

Всюду далее D — область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subseteq D$ является открытым множеством в \mathbb{R}^n . Запись $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f непрерывно в области задания; $G \Subset D$ означает, что \overline{G} — компактное подмно-

жество области D . Говорят, что отображение f сохраняет ориентацию (анти-сохраняет), если топологический индекс $\mu(y, f, G) > 0$ ($\mu(y, f, G) < 0$) для произвольной области $G \Subset D$ и произвольного $y \in f(G) \setminus f(\partial G)$. В дальнейшем $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$, $B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$, $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $dm(x)$ — n -мерная мера Лебега. Приведённые выше понятия естественным образом распространяются на отображения $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, где область $D \subset \mathbb{R}^n$ и $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ — одноточечная компактификация \mathbb{R}^n . Напомним, что борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в \mathbb{R}^n , если $\int_{\gamma} \rho(x) |dx| \geq 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. В этом случае мы пишем: $\rho \in \text{adm } \Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_D \rho^n(x) dm(x).$$

Пусть D — область в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, $E, F \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ — произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E, F, D)$ семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D , т.е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$. Следующее понятие, мотивированное кольцевым определением квазиконформности по Герингу, см. [6], и представляющее собой обобщение и локализацию понятия Q -отображения, введено В. Рязановым, У. Сребро и Э. Якубовым на плоскости, см., напр., [19]. Пусть $r_0 = \text{dist}(x_0, \partial D)$ и пусть $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Положим $A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$, $S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_i\}$ $i = 1, 2$. Говорят, что гомеоморфизм $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q -гомеоморфизмом в точке $x_0 \in D$* , если соотношение

$$M(f(\Gamma(S_1, S_2, A))) \leq \int_A Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|) dm(x) \quad (2.1)$$

выполнено для любого кольца $A = A(r_1, r_2, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < r_0$ и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1.$$

В случае ограниченной функции $Q(x)$, определения кольцевого Q -гомеоморфизма и Q -гомеоморфизма эквивалентны, и, фактически, генерируют собой определение квазиконформных отображений, см. [6]. В общем случае, каждый Q -гомеоморфизм является кольцевым, но

не наоборот, см. [19]. Пусть D — область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, и $x_0 \in D$. По аналогии, будем говорить, что (не обязательно гомеоморфное) отображение $f : D \setminus \{x_0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ есть *кольцевое Q -отображение в точке x_0* , если соотношение (2.1) выполнено для любого кольца $A = A(r_1, r_2, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < r_0 = \text{dist}(x_0, \partial D)$ и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что $\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1$. При этом само отображение определено лишь в проколотой окрестности точки x_0 ; дальнейшая часть работы посвящена поиску условий на функцию $Q(x)$, которые обеспечивают возможность непрерывного продолжения отображения f в точку x_0 . Все результаты, полученные для кольцевых Q -отображений очевидным образом распространяются на обычные Q -отображения, т.е., непрерывные отображения, удовлетворяющие оценке (1.2).

Конденсатором называют пару $E = (A, C)$, где A — открытое множество в \mathbb{R}^n , а C — компактное подмножество A . Конденсатор E называют *кольцевым*, если $A \setminus C$ является кольцом. *Ёмкостью* конденсатора E называется следующая величина:

$$\text{cap } E = \text{cap } (A, C) = \inf_{u \in W_0(E)} \int_A |\nabla u|^n dm(x),$$

где $W_0(E) = W_0(A, C)$ — семейство неотрицательных непрерывных функций $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ с компактным носителем в A , таких что $u(x) \geq 1$ при $x \in C$ и $u \in ACL$. В формуле выше, как обычно, $|\nabla u| = (\sum_{i=1}^n (\partial_i u)^2)^{1/2}$. В дальнейшем в расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ используется *сферическая (хордальная) метрика* $h(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, где π — стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2})$ в \mathbb{R}^{n+1} :

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}, \quad h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2} \sqrt{1 + |y|^2}}, \quad x \neq \infty \neq y.$$

Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — открытое дискретное отображение, $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — некоторая кривая и пусть $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Кривая $\alpha : [a, c] \rightarrow D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x , если (1) $\alpha(a) = x$; (2) $f \circ \alpha = \beta|_{[a, c]}$; (3) если $c < c' \leq b$, то не существует кривой $\alpha' : [a, c'] \rightarrow D$, такой что $\alpha = \alpha'|_{[a, c]}$ и $f \circ \alpha = \beta|_{[a, c']}$. Пусть f — открытое дискретное отображение и $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Тогда кривая β имеет максимальное поднятие при отображении f с началом в точке x , см. следствие 3.3 главы II в [18].

Лемма 2.1. Пусть $E = (A, C)$ — произвольный конденсатор в \mathbb{R}^n и пусть Γ_E — семейство всех кривых вида $\gamma : [a, b) \rightarrow A$ с $\gamma(a) \in C$ и $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \emptyset$ для произвольного компакта $F \subset A$. Тогда $\text{сар } E = M(\Gamma_E)$, см. [18, предложение 10.2 гл. II].

Замечание 2.1. Понятие конденсатора и ёмкости конденсатора в \mathbb{R}^n можно перенести в $\overline{\mathbb{R}^n}$, см. [14, раздел 2.1]. Лемма 2.1 остаётся справедливой для конденсаторов в $\overline{\mathbb{R}^n}$, см. [18, замечание 10.8, 1 гл. II].

Говорят, что компакт C в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, имеет нулевую ёмкость, пишут $\text{сар } C = 0$, если существует ограниченное открытое множество A с $C \subset A$ такое, что $\text{сар}(A, C) = 0$. Известно, что, см., напр., [17, лемма 3.4 гл. II], в последнем случае и для любого другого ограниченного открытого множества A в \mathbb{R}^n , содержащего C , будет выполнено $\text{сар}(A, C) = 0$. В противном случае, полагаем $\text{сар } C > 0$. Аналогично можно определить понятие множества ёмкости нуль в $\overline{\mathbb{R}^n}$, см., напр., [14, 2.12].

Лемма 2.2. Пусть E — компактное собственное подмножество $\overline{\mathbb{R}^n}$, такое что $\text{сар } E > 0$. Тогда для каждого $a > 0$ существует положительное число $\delta > 0$ такое, что $\text{сар}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus E, C) \geq \delta$ для произвольного континуума $C \subset \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$, удовлетворяющего условию $h(C) \geq a$, см. [14, лемма 3.11] или в [18, лемма 2.6 гл. III].

Замечание 2.2. Если компакт F в $\overline{\mathbb{R}^n}$ имеет ёмкость нуль, то при каждом $\alpha > 0$, α — мерная хаусдорфова мера $\Lambda_\alpha(F)$ множества F равна нулю, см. [14, лемма 2.13]. Следовательно, $\text{mes } F = 0$ и $\text{Int } F = \emptyset$.

3. Основная лемма о продолжении

Лемма 3.1. Пусть $f : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, — открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке $x_0 = 0$, удовлетворяющее условию $\text{сар}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})) > 0$. Предположим, что существует $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < 1$ такое, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x|) \, dm(x) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)), \quad (3.1)$$

где $\psi(t)$ — неотрицательная на $(0, \infty)$ функция, такая что $\psi(t) > 0$ п.в. t и

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon') = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \psi(t) \, dt < \infty$$

для всех (фиксированных) ε' из $(0, \varepsilon_0]$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$. Тогда f имеет непрерывное продолжение $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ в \mathbb{B}^n . Непрерывность понимается в смысле пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$ относительно хордальной метрики h .

Доказательство. Предположим противное, а именно, что отображение f не может быть продолжено по непрерывности в точку $x_0 = 0$. Тогда найдутся две последовательности x_j и x'_j , принадлежащие $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ с $x_j \rightarrow 0$, $x'_j \rightarrow 0$, такие, что $h(f(x_j), f(x'_j)) \geq a > 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что x_j и x'_j лежат внутри шара $B(\varepsilon_0)$. Положим $r_j = \max\{|x_j|, |x'_j|\}$. Соединим точки x_j и x'_j замкнутой кривой, лежащей в $\overline{B(r_j)} \setminus \{0\}$. Обозначим эту кривую через C_j и рассмотрим конденсатор $E_j = (\mathbb{B}^n \setminus \{0\}, C_j)$. В силу открытости и непрерывности отображения f , fE_j также является конденсатором. Рассмотрим семейства кривых Γ_{E_j} и Γ_{fE_j} , см. обозначения леммы 2.1. Пусть Γ_j^* — семейство максимальных поднятий Γ_{fE_j} при отображении f с началом в C_j , лежащих в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Покажем, что $\Gamma_j^* \subset \Gamma_{E_j}$.

Предположим противное. Тогда существует кривая $\beta : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ семейства Γ_{fE_j} , для которой соответствующее максимальное поднятие $\alpha : [a, c) \rightarrow \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ лежит со своим замыканием $\bar{\alpha}$ в некотором компакте внутри $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Следовательно, $\bar{\alpha}$ — компакт в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Заметим, во-первых, что $c \neq b$, поскольку в противном случае $\bar{\beta}$ — компакт в fA , что противоречит условию $\beta \in \Gamma_{fE_j}$. Рассмотрим множество $G = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(t_k)\}$, где $t_k \in [a, c)$ такие, что $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = c : \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(t_k) = x$. Заметим, что, переходя к подпоследовательностям, здесь можно ограничиться монотонными последовательностями t_k . Для $x \in G$, в силу непрерывности f в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, будем иметь $f(\alpha(t_k)) \rightarrow f(x)$ при $k \rightarrow \infty$, где $t_k \in [a, c)$, $t_k \rightarrow c$ при $k \rightarrow \infty$. Однако, $f(\alpha(t_k)) = \beta(t_k) \rightarrow \beta(c)$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда заключаем, что f постоянна на G в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. С другой стороны, по условию Кантора в компакте $\bar{\alpha}$, см. [13, сс. 8,9], $G = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha([t_k, c))} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha([t_k, c)) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \alpha([t_k, c)) \neq \emptyset$ в виду монотонности последовательности множеств $\alpha([t_k, c))$ и, таким образом, G является связным, по [25, I(9.12)]. Таким образом, в силу дискретности f , G не может состоять более чем из одной точки и кривая $\alpha : [a, c) \rightarrow \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ продолжается до замкнутой кривой $\alpha : [a, c] \rightarrow \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Тогда имеем $f(\alpha(c)) = \beta(c)$, т.е., $\alpha(c) \in f^{-1}(\beta(c))$. С другой стороны, можно построить, см. [18, следствие 3.3 гл. II], максимальное поднятие α' кривой $\beta|_{[c, b)}$ с началом в точке $\alpha(c)$. Тогда, объединяя поднятия α и α' , получаем новое поднятие α'' кривой β , которое определено на $[a, c')$, что противоречит

максимальности поднятия α .

Таким образом, $\Gamma_j^* \subset \Gamma_{E_j}$. Имеем $\Gamma_{fE_j} > f\Gamma_j^*$, и, следовательно,

$$M(\Gamma_{fE_j}) \leq M(f\Gamma_j^*) \leq M(f\Gamma_{E_j}). \quad (3.2)$$

Заметим, что семейство Γ_{E_j} разбивается на два подсемейства,

$$\Gamma_{E_j} = \Gamma_{E_{j_1}} \cup \Gamma_{E_{j_2}}, \quad (3.3)$$

где $\Gamma_{E_{j_1}}$ — семейство всех кривых $\alpha(t) : [a, c) \rightarrow \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ с началом в C_j таких, что найдётся $t_k \in [a, c)$ с $\alpha(t_k) \rightarrow 0$ при $t_k \rightarrow c - 0$; $\Gamma_{E_{j_2}}$ — семейство всех кривых $\alpha(t) : [a, c) \rightarrow \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ с началом в C_j таких, что найдётся $t_k \in [a, c)$ с $\text{dist}(\alpha(t_k), \partial\mathbb{B}^n) \rightarrow 0$ при $t_k \rightarrow c - 0$.

В силу соотношений (3.2) и (3.3),

$$M(\Gamma_{fE_j}) \leq M(f\Gamma_{E_{j_1}}) + M(f\Gamma_{E_{j_2}}). \quad (3.4)$$

Покажем, что $M(f\Gamma_{E_{j_1}}) = 0$ для любого фиксированного $j \in \mathbb{N}$. Зафиксируем целое число $j \geq 1$ и положим $l_j = \min\{|x_j|, |x'_j|\}$. Рассмотрим кольцо $A_{\varepsilon, j} = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x| < l_j\}$ и соответствующее семейство функций

$$\eta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(\varepsilon, l_j), & t \in (\varepsilon, l_j), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (\varepsilon, l_j). \end{cases}$$

Имеем $\int_\varepsilon^{l_j} \eta_\varepsilon(t) dt = \frac{1}{I(\varepsilon, l_j)} \int_\varepsilon^{l_j} \psi(t) dt = 1$. Следовательно, по определению кольцевого Q -отображения

$$M(f\Gamma_{E_{j_1}}) \leq \mathcal{F}(\varepsilon) := \frac{1}{I(\varepsilon, l_j)^n} \int_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} Q(x) \psi^n(|x|) dm(x). \quad (3.5)$$

Покажем, что $\mathcal{F}(\varepsilon) \rightarrow 0$. Учитывая (3.1), имеем следующее соотношение:

$$\int_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} Q(x) \psi^n(|x|) dm(x) = G(\varepsilon) \cdot \left(\int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi(t) dt \right)^n,$$

где $G(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Заметим, что

$$\mathcal{F}(\varepsilon) = G(\varepsilon) \cdot \left(1 + \frac{\int_{l_j}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt}{\int_\varepsilon^{l_j} \psi(t) dt} \right)^n,$$

где $\int_{l_j}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty$ — фиксированное число, а $\int_\varepsilon^{l_j} \psi(t) dt \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, поскольку величина интеграла слева в (3.1) увеличивается

при уменьшении ε . Таким образом, $\mathcal{F}(\varepsilon) \rightarrow 0$. Отметим, что левая часть неравенства (3.5) не зависит от ε , а j фиксировано. Отсюда получаем, что $M(f\Gamma_{E_{j_1}}) = 0$. Фиксируем (произвольно) некоторое $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$. Аналогично схеме, приведённой выше, рассмотрим кольцо $A_j = \{x \in \mathbb{R}^n : r_j < |x| < \varepsilon_1\}$ и семейство функций

$$\eta_j(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(r_j, \varepsilon_1), & t \in (r_j, \varepsilon_1), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (r_j, \varepsilon_1) \end{cases}.$$

Имеем $\int_{r_j}^{\varepsilon_1} \eta_j(t) dt = \frac{1}{I(r_j, \varepsilon_1)} \int_{r_j}^{\varepsilon_1} \psi(t) dt = 1$. Таким образом, по определению кольцевого Q -отображения и условию (3.4)

$$M(f\Gamma_{E_j}) \leq \mathcal{S}(r_j) := \frac{1}{I(r_j, \varepsilon_1)^n} \int_{r_j < |x| < \varepsilon_0} Q(x) \psi^n(|x|) dm(x).$$

В силу условия (3.1), $\mathcal{S}(r_j) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Окончательно, по лемме 2.1, $\text{сар } fE_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. С другой стороны, по лемме 2.2, $\text{сар } fE_j \geq \delta > 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Полученное противоречие опровергает предположение, что f не имеет предела при $x \rightarrow 0$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$. \square

4. Формулировка основных результатов

Теорема 4.1. Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке x_0 , удовлетворяющее условию $\text{сар}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D \setminus \{x_0\})) > 0$. Если

$$q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}\right) \tag{4.1}$$

при $r \rightarrow 0$, где $q_{x_0}(r)$ среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $|x - x_0| = r$, то f имеет непрерывное продолжение $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$. В частности, если при некотором $\varepsilon(x_0)$, $Q(x) \leq [\log \frac{1}{|x-x_0|}]^{n-1}$, $\forall x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))$, то выполнено (4.1) и, значит, справедливо заключение теоремы.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$ и $\mathbb{B}^n \subset D$. Фиксируем $\varepsilon_0 < 1$. Положим $\psi(t) = \frac{1}{t \log \frac{1}{t}}$. Заметим, что

$$\int_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} \frac{Q(x) dm(x)}{(|x| \log \frac{1}{|x|})^n} = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \left(\int_{|x|=r} \frac{Q(x) dm(x)}{(|x| \log \frac{1}{|x|})^n} dS \right) dr$$

$$\leq \omega_{n-1} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r \log \frac{1}{r}} = \omega_{n-1} \log \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{\varepsilon_0}} = \omega_{n-1} \cdot I(\varepsilon, \varepsilon_0),$$

где $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt$. Нужное заключение следует теперь прямо из леммы 3.1. \square

Говорят, что функция $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ с $\varphi \in L^1_{loc}(D)$ имеет *ограниченное среднее колебание* в области D , $\varphi \in BMO$, если

$$\|\varphi\|_* = \sup_{B \subset D} \frac{1}{|B|} \int_B |\varphi(x) - \varphi_B| dm(x) < \infty,$$

где точная верхняя грань берётся по всем шарам $B \subset D$ и $\varphi_B = \frac{1}{|B|} \int_B \varphi(x) dm(x)$ — среднее значение функции φ на шаре B , см. [12]. С целью упрощения записи, мы обозначаем в дальнейшем

$$\int_A f(x) dm(x) := \frac{1}{|A|} \int_A f(x) dm(x),$$

где, как обычно, $|A|$ обозначает лебегову меру множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Известно, что $L^\infty(D) \subset BMO(D) \subset L^p_{loc}(D)$, см., напр., [12]. Следуя работе [11], введём следующее определение. Будем говорить, что функция $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$, пишем $\varphi \in FMO$ в x_0 , если

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon| dm(x) < \infty, \quad (4.2)$$

где $\overline{\varphi}_\varepsilon = \int_{B(x_0, \varepsilon)} \varphi(x) dm(x)$. Заметим, что при выполнении условия (4.2) возможна ситуация, когда $\overline{\varphi}_\varepsilon \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Теорема 4.2. Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке x_0 , удовлетворяющее условию $\text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D \setminus \{x_0\})) > 0$. Если функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0 , то f имеет непрерывное продолжение $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$ и $\mathbb{B}^n \subset D$. Пусть $\varepsilon_0 < e^{-1}$. На основании следствия 2.3 в [11] для функции $0 < \psi(t) = \frac{1}{t \log \frac{1}{t}}$ будем иметь, что

$$\int_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x|) dm(x) = O\left(\log \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Заметим также, что

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt = \log \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{\varepsilon_0}}.$$

Оставшаяся часть утверждения следует теперь из леммы 3.1. □

Следствие 4.1. *В частности, если*

$$\int_{|x-x_0|<\varepsilon} Q(x) dm(x) = O(\varepsilon^n) \tag{4.3}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, то f имеет непрерывное продолжение в D .

5. Следствия

Напомним, что изолированная точка x_0 границы ∂D области D называется *устранимой* для отображения f , если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Если $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_0$, точку x_0 будем называть *полусом*. Изолированная точка x_0 границы ∂D называется *существенной особой точкой* отображения $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, если при $x \rightarrow x_0$ нет ни конечного, ни бесконечного предела.

Теорема 5.1. *Пусть x_0 — изолированная точка границы D , $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке $x_0 = 0$, а функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0 , либо удовлетворяет хотя бы одному из условий (4.1), (4.3). Если x_0 — существенная особая точка отображения f , то $\text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(U \setminus \{x_0\})) = 0$ для любой окрестности U точки x_0 .*

Доказательство непосредственно вытекает, соответственно, из теорем 4.2, 4.1 и следствия 4.1.

Теорема 5.2. *Пусть x_0 — изолированная точка границы D , $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке x_0 , а функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0 , либо удовлетворяет хотя бы одному из условий (4.1), (4.3). Тогда точка x_0 является устранимой для отображения f в том и только том случае, когда f ограничено в некоторой окрестности U точки x_0 .*

Доказательство. Предположим, что точка x_0 устранима, т.е. существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A < \infty$. Тогда $|f(x)| \leq |A| + 1$ в достаточно малой окрестности U точки x_0 . Обратно, пусть существует окрестность U точки x_0 такая, что $|f(x)| \leq M$ для некоторого

$M \in (0, \infty)$ и всех $x \in U \setminus \{x_0\}$. Тогда $\text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(U \setminus \{x_0\})) > 0$ и заключение следует из теоремы 5.1. \square

Теорема 5.3. Пусть x_0 — изолированная точка границы D , $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке x_0 , а функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0 , либо удовлетворяет хотя бы одному из условий (4.1), (4.3). Если $\text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(U \setminus \{x_0\})) > 0$ для некоторой окрестности U точки x_0 , то f может быть непрерывным образом продолжено до открытого дискретного кольцевого Q -отображения $f : D \cup \{x_0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$.

Доказательство. Действительно, f продолжается до непрерывного отображения $f : D \cup \{x_0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ в силу, соответственно, теорем 4.2, 4.1 и следствия 4.1. Известно, что дискретные открытые отображения в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, либо сохраняют ориентацию, либо анти-сохраняют, см., напр., [18, разд. 4 гл. I]. Пусть f для определённости сохраняет ориентацию. Покажем, что продолженное отображение сохраняет ориентацию, открыто и дискретно. Обозначим, как обычно, через $B_f(D)$ множество точек ветвления отображения f в области D , а через $B_f(D')$ — множество точек ветвления отображения f в области $D' = D \cup \{x_0\}$. Если x_0 — точка локальной гомеоморфности отображения f , доказывать нечего. Пусть точка $x_0 \in B_f(D')$. По теореме Чернавского $\dim B_f(D) = \dim f(B_f(D)) \leq n - 2$, см., напр., [18, теорему 4.6 гл. I], где \dim обозначает топологическую размерность множества, см. [8]. Тогда получим

$$\dim f(B_f(D')) \leq n - 2, \quad (5.1)$$

т.к. $f(B_f(D')) = f(B_f(D)) \cup \{f(x_0)\}$, множество $\{f(x_0)\}$ замкнуто и топологическая размерность каждого из множеств $f(B_f(D))$ и $\{f(x_0)\}$ не превышает $n - 2$, см. [8, следствие 1 гл. III разд. 3]. Пусть G — область в D' с $G \Subset D'$ и пусть $y \in f(G) \setminus f(\partial G)$. Тогда, в силу (5.1), существует точка $y_0 \notin f(B_f(D'))$, принадлежащая той же компоненте связности множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\partial G)$, что и y . В силу того, что топологический индекс есть величина постоянная на каждой связной компоненте множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\partial G)$, см. в [17, § 2 гл. I], будем иметь

$$\mu(y, f, G) = \mu(y_0, f, G) = \sum_{x \in G \cap f^{-1}(y_0)} i(x, f) > 0.$$

Таким образом, отображение f сохраняет ориентацию в D' . Наконец, для любого $y \in f(D')$, в силу дискретности отображения f в области D , множество $\{f^{-1}(y)\}$ не более чем счётно и потому $\dim \{f^{-1}(y)\} = 0$. Следовательно, по [23, с. 333], отображение f открыто и дискретно, что и требовалось доказать. \square

Теорема 5.4 (Аналог теоремы Сохоцкого). Пусть x_0 — изолированная точка границы D , $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке x_0 , а функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0 , либо удовлетворяет хотя бы одному из условий (4.1), (4.3). Если x_0 — существенная особая точка отображения f , то для любого $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ найдётся последовательность $x_k \rightarrow x_0$ при $k \rightarrow \infty$, такая что $f(x_k) \rightarrow a$ при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Допустим, что заключение теоремы неверно для некоторого $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$. Тогда существуют окрестность U точки x_0 и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что

$$h(f(x), a) \geq \varepsilon_0 \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}$$

и, по неравенству треугольника, $d_0 = h(B(a, \varepsilon_0/2), f(U \setminus \{x_0\})) \geq \varepsilon_0/2$. Следовательно, $\text{сар}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(U \setminus \{x_0\})) > 0$. Отсюда по теореме 5.1 следует существование предела (конечного или бесконечного) отображения f в точке x_0 , что противоречит первоначальному предположению. \square

Теорема 5.5. Пусть x_0 — изолированная точка границы D , $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке x_0 , а функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0 , либо удовлетворяет хотя бы одному из условий (4.1), (4.3). Если x_0 существенно особая точка отображения f , то существует множество $C \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ типа F_σ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ ёмкости нуль такое, что

$$N(y, f, U \setminus \{x_0\}) = \infty$$

для любой окрестности U точки x_0 и для всех $y \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus C$.

Доказательство. Пусть U — произвольная окрестность точки x_0 . Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x_0 = 0$ и $U = \mathbb{B}^n$. Рассмотрим множества $V_k = B(1/k) \setminus \{0\}$, $k = 1, 2, \dots$. Полагаем

$$C = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(V_k). \tag{5.2}$$

По теореме 5.1 каждое из множеств $B_k := \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(V_k)$ в объединении правой части соотношения (5.2) имеет ёмкость нуль. Тогда C также имеет ёмкость нуль, см., напр., [7, с. 126]. Фиксируем $y \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus C$. Тогда

$$y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} f(V_k). \tag{5.3}$$

Из (5.3) вытекает существование подпоследовательности $\{x_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ такой, что $x_{k_i} \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ и $f(x_{k_i}) = y$, $i = 1, 2, \dots$. Теорема 5.5 доказана. \square

Пусть теперь D — область в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$. Будем говорить, что функция $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в точке ∞ , если функция $\varphi^*(x) = \varphi(\frac{x}{|x|^2})$ имеет конечное среднее колебание в точке 0. Заметим, что отображение $\psi(x) = \frac{x}{|x|^2}$ подобно отображает сферу $S(0, r)$ на сферу $S(0, 1/r)$, откуда следует, что $|J(x, \psi)| = (1/|x|)^{2n}$. Согласно сказанному, прибегая к замене переменной в интеграле, мы можем переформулировать определение конечного среднего колебания в точке ∞ в следующем виде. Будем говорить, что функция $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в точке ∞ , пишем $\varphi \in FMO(\infty)$, если при $R \rightarrow \infty$

$$\int_{|x|>R} |\varphi(x) - \varphi_R| \frac{dm(x)}{|x|^{2n}} = O\left(\frac{1}{R^n}\right),$$

где $\varphi_R = \frac{R^n}{\Omega_n} \cdot \int_{|x|>R} \varphi(x) \frac{dm(x)}{|x|^{2n}}$, а Ω_n — объём единичного шара в \mathbb{R}^n . Аналогично для бесконечности можно переформулировать условия вида (4.1), (4.3), соответственно:

$$\int_{S(0, R)} Q(x) dS = O([\log R]^{n-1}), \quad (5.4)$$

$$\int_{|x|>R} Q(x) \frac{dm(x)}{|x|^{2n}} = O\left(\frac{1}{R^n}\right). \quad (5.5)$$

Будем говорить, что отображение $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ есть *кольцевое Q -отображение* в точке $x_0 = \infty$, если отображение $\tilde{f} = f(\frac{x}{|x|^2})$ является кольцевым Q' -отображением в точке $x_0 = 0$ с $Q' = Q(\frac{x}{|x|^2})$. На основании теорем 4.2, 4.1 и следствия 4.1, получаем следующее утверждение.

Теорема 5.6 (Аналог теоремы Лиувилля). Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке $x_0 = \infty$, функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке ∞ , либо удовлетворяет хотя бы одному из условий (5.4), (5.5). Тогда $\text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\mathbb{R}^n)) = 0$. В частности, f не может отображать всё \mathbb{R}^n на ограниченную область.

Рассмотрим отдельно случай $n = 2$. Пусть $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Теорема 5.7. Пусть $f : \Delta \setminus \{0\} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ — открытое дискретное Q -отображение, которое не принимает, по крайней мере, три значения в $\overline{\mathbb{C}}$. Если $Q(z)$ имеет конечное среднее колебание в нуле, либо удовлетворяет одному из условий типа (4.1), (4.3) в точке $z_0 = 0$, то отображение f может быть непрерывным образом продолжено в Δ до открытого дискретного Q -отображения $\bar{f} : \Delta \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$.

Доказательство. Доказательство основано на теореме Стоилова о факторизации, см. [22, разд. 5 гл. V]. Согласно упомянутой теореме, отображение f может быть представлено как композиция $f = \varphi \circ g$, где g — гомеоморфизм, φ — аналитическая функция. В таком случае, отображение g является Q -гомеоморфизмом. По лемме 4.1, теореме 4.1 и следствию 4.2 в [11], отображение g допускает гомеоморфное продолжение \bar{g} в Δ . В таком случае, точка $\bar{g}(0)$ является изолированной точкой границы области $g(\Delta)$ для функции φ . Из условия вытекает, что φ также опускает не менее 3-х значений в $\overline{\mathbb{C}}$. Возможность непрерывного продолжения следует теперь из классической теоремы Пикара для аналитических функций. \square

Теорема 5.8 (Аналог теоремы Пикара при $n = 2$). Пусть $f : \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ — открытое дискретное Q -отображение, а $Q(z)$ имеет конечное среднее колебание в ∞ либо удовлетворяет хотя бы одному из условий (5.4), (5.5). Тогда f принимает все значения в $\overline{\mathbb{C}}$, кроме, может быть, двух.

Практически для всех известных ныне классов отображений установлены оценки вида (1.2). Сформулированные в статье результаты могут быть применены, например, к отображениям с конечным искажением длины, см., напр., [15, теорема 6.10], см. также [16]. Более того, всё вышеизложенное справедливо для так называемых отображений с конечным искажением. Отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется отображением с конечным искажением, если $f \in W_{loc}^{1,n}(D)$ и п.в. $\|f'(x)\|^n \leq K(x) \cdot J(x, f)$ для некоторой функции $K(x) : D \rightarrow [1, \infty)$, см., напр., [9, 10].

Замечание 5.1. Каждое открытое дискретное отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ с конечным искажением такое, что $K(x) \in L_{loc}^{n-1}$ и мера множества B_f точек ветвления отображения f равна нулю, является Q -отображением с $Q = K^{n-1}(x)$, см. замечание 4.10, теорему 6.10 и неравенство (4.14) в [15].

Литература

- [1] C. Andreian Cazacu, *On the length-area dilatation* // Complex Var. Theory Appl., **50** (2005), N 7–11, 765–776.
- [2] C. Andreian Cazacu, *Some formulae on the extremal length in n -dimensional case*, Proc. Rom.-Finn. Sem. on Teichmüller Spaces and Quasiconformal Mappings, Brazov, 1969, pp. 87–102, Publ. House of Acad. Soc. Rep. Romania, Bucharest, 1971.
- [3] C. J. Bishop, V. Ya. Gutlyanskii, O. Martio, M. Vuorinen, *On conformal dilatation in space* // Intern. Journ. Math. and Math. Scie., **22** (2003), 1397–1420.
- [4] M. Cristea, *Local homeomorphisms having local ACL^n inverses* // Compl. Var. and Ellipt. Equat., **53** (2008), N 1, 77–99.
- [5] M. Cristea, *Open discrete mappings having local ACL^n inverses* // 2008, Preprint Ser. Inst. Math. of Romanian Acad., Inst. de Math. "Simion Stoilow" Al Acad. Rom., 2008.6.
- [6] F. W. Gehring, *Rings and quasiconformal mappings in space* // Trans. Amer. Math. Soc., **103** (1962), 353–393.
- [7] В. М. Гольдштейн и Ю. Г. Решетняк, *Введение в теорию функций с обобщёнными производными и квазиконформные отображения*, Новосибирск: Наука, 1983.
- [8] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton: Princeton Univ. Press, 1948.
- [9] T. Iwaniec and G. Martin, *Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis*, Oxford: Clarendon Press, 2001.
- [10] T. Iwaniec and V. Sverák, *On mappings with integrable dilatation* // Proc. Amer. Math. Soc., **118** (1993), 181–188.
- [11] А. Игнатъев и В. Рязанов, *Конечное среднее колебание в теории отображений* // Укр. матем. вестник, **2** (2005), N 3, 395–417.
- [12] F. John and L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation* // Comm. Pure Appl. Math., **14** (1961), 415–426.
- [13] К. Куратовский, *Топология*, т. 2, М.: Мир, 1969, 624 с.
- [14] O. Martio, S. Rickman and J. Vaisala, *Distortion and singularities of quasiregular mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, **465** (1970), 1–13.
- [15] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov, *On Q -homeomorphisms* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, **30** (2005), N 1, 49–69.
- [16] В. М. Миклюков, *Относительное расстояние М. А. Лаврентьева и простые концы на непараметрических поверхностях*, Укр. матем. вестник, **1** (2004), N 3, 349–372.
- [17] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Новосибирск: Наука, 1982.
- [18] S. Rickman, *Quasiregular mappings*, Results in Mathematic and Related Areas (3), 26. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [19] V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov, *On ring solutions of Beltrami equations* // J. d'Anal. Math., **96** (2005), 117–150.
- [20] Е. А. Севостьянов, *Об устранении изолированных особенностей открытым дискретным отображением* // Вестн. Днепро. нац. ун-та, **12** (2007), 124–133.

- [21] Е. А. Севостьянов, *Аналоги теорем Сохоцкого и Пикара для отображений с конечным искажением длины* // Труды ИПММ НАН Украины, **15** (2007), 190–198.
- [22] С. Стойлов, *Лекции о топологических принципах теории аналитических функций*, Москва: Наука, 1964.
- [23] C. J. Titus and G. S. Young, *The extension of interiority, with some applications* // Trans. Amer. Math. Soc., **103** (1962), 329–340.
- [24] П. М. Тамразов, *Модули и экстремальные метрики в неориентированных и скрученных римановых многообразиях* // Укр. матем. ж., **50** (1998), N 10, 1388–1398.
- [25] G. T. Whyburn, *Analytic topology*, American Mathematical Society, Rhode Island, 1942.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Евгений
Александрович
Севостьянов**

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины
Розы Люксембург 74,
Донецк, 83114,
Украина
E-Mail: sevostyanov@skif.net,
e_sevostyanov@rambler.ru,
sevostyanov@iamm.ac.donetsk.ua