УДК 517.5

Е.А.Севостьянов

К теории сходимости пространственных гомеоморфизмов класса Соболева

(Представлено академиком НАН Украины И.В.Скрыпником *)*

It is proved that the locally uniform limit f of a sequence of space homeomorphisms f_m in the Sobolev class $W^{1,n}_{loc}$ with the outer dilatations $K_O(x, f_m) \le K(x) \in L^{n-1}_{loc}$ is either a homeomorphism or a constant. If in addition, f is a homeomorphism of the class $W^{1,n}_{loc}$, then $K_O(x, f_m) \le K(x)$ a.e.

Работа посвящена исследованиям отображений с конечным искажением в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, которые интенсивно изучаются в последнее десятилетие в многочисленных работах ведущих специалистов по теории отображений, см., напр., [1–8]. В частности, в статье доказано, что локально равномерный предел f последовательности f_m пространственных гомеоморфизмов класса $W^{1,n}_{loc}$ с внешними дилатациями $K_O(x, f_m) \le K(x) \in L^{n-1}_{loc}$ является гомеоморфизмом или постоянной. Если f – гомеоморфизм класса $W^{1,n}_{loc}$, то также $K_O(x, f) \le K(x)$ почти всюду (п.в.)

Приведём некоторые определения и обозначения, используемые в дальнейшем. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$. Для отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, имеющего в D частные производные п.в., пусть $f'(x)$ – якобиева матрица отображения f в точке x, $J(x, f)$ – якобиан отображения f в точке x, т.е. детерминант $f'(x)$. В дальнейшем

$$|f'(x)| = \max_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|} - \tag{1}$$

матричная норма $f'(x)$. *Внешняя дилатация* отображения f в точке x есть величина

$$K_O(x, f) = \frac{|f'(x)|^n}{|J(x, f)|}, \tag{2}$$

если $J(x, f) \ne 0$, $K_O(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_O(x, f) = \infty$ в остальных точках.

Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *абсолютно непрерывным на линиях,* $f \in ACL$, если в любом n-мерном параллелепипеде P с рёбрами, параллельными осям координат, и таком, что $\overline{P} \subset D$ все координатные функции $f = (f_1, \ldots, f_n)$ абсолютно непрерывны на почти всех (п.в.) прямых, параллельных осям координат. Мы также пишем $f \in W^{1,n}_{loc}(D)$, если все координатные функции $f = (f_1, \ldots, f_n)$ обладают обобщёнными частными производными первого порядка, которые локально интегрируемы в D в степени n.

Теорема. *Пусть $f_m : D \to \mathbb{R}^n$, $n \ge 3$, – последовательность гомеоморфизмов класса $W^{1,n}_{loc}$, такая что $f_m \to f \not\equiv const$ при $m \to \infty$ локально равномерно в D. Если $f \in W^{1,n}_{loc}$ и для п.в. $x \in D$*

$$K_O(x, f_m) \le K(x) \in L^{n-1}_{loc}(D), \tag{3}$$

то f - гомеоморфизм и для п.в. $x \in D$

$$K_O(x,f) \ \leq \ K(x)\,. \tag{4}$$

Лемма. Пусть $f_m : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $m = 1, 2, \ldots,$ – последовательность гомеоморфизмов класса Соболева $W^{1,n}_{loc}(D)$, сходящаяся локально равномерно к некоторому отображению $f : D \to \mathbb{R}^n$. Если условие (3) имеет место, то f – либо гомеоморфизм, либо $f \equiv const$ в D.

Предложение. Пусть $f_m : D \to \mathbb{R}^n$, $m = 1, 2, \ldots,$ – последовательность ACL гомеоморфизмов с $K_O(x, f_m) \leq K(x) \in L^q_{loc}$, $q \geq 1/(n-1)$, которая сходится локально-равномерно в D к отображению f. Тогда $f \in W^{1,s}_{loc}(D)$, где $s = nq/(1+q) \ \leq \ n$.

Замечание. Отметим, что в случае $n = 2$ аналог Теоремы был доказан в работе [8] при более слабых условиях, когда $f_m \in ACL$, $m = 1, 2, \ldots$. Отметим также, что в этом случае, если $K(x) \in L^1_{loc}(D)$, то $f_m \in W^{1,1}_{loc}(D)$, $m = 1, 2, \ldots,$ и $f \in W^{1,1}_{loc}(D)$.

Работа частично поддержана Фондом фундаментальных исследований Украины, проект 01.07/00241

1. *Astala K., Iwaniec T., Koskela P. and Martin G.* Mappings of BMO-bounded distortion // Math. Ann. – 2000.- **317.** – P. 703–726.

2. *Gehring F.W. and Iwaniec T.* The limit of mappings with finite distortion // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.– 1999. – **24.** – P. 253–264.

3. *Heinonen J. and Koskela P.* Sobolev mappings with integrable dilatations // Arch. Rational Mech. Anal. – 1993. – **125.** – P. 81–97.

4. *Игнатьев А.А., Рязанов В.И.* Об устранимых особенностях пространственных отображений //Доклады НАН Украины. – 2003. – **9.** – С. 24–28.

5. *Игнатьев А.А., Рязанов В.И.* К теории граничного поведения пространственных отображений //Доклады НАН Украины. - 2004. – **4.** – С. 12-16.

6. *Iwaniec T. and Martin G.* Geometrical Function Theory and Non–linear Analysis // Clarendon Press, Oxford.- 2001.

7. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* On Q– homeomorphisms // Contemporary Math. – 2004. – **364.** – P.93–103.

8. *Ryazanov V., Srebro U., and Yakubov E.* Plane mappings with dilatation dominated by functions of bounded mean oscillation // Sib. Adv. in Math. – 2001. – **11,** No. 2. – P. 94–130.

Институт прикладной математики и механики
НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 15.11.2004