НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Д.А. КОВТОНЮК, Р.Р. САЛИМОВ, Е.А. СЕВОСТЬЯНОВ

# К ТЕОРИИ ОТОБРАЖЕНИЙ КЛАССОВ СОБОЛЕВА И ОРЛИЧА-СОБОЛЕВА

Под общей редакцией
д.ф.-м.н., профессора
В.И. Рязанова

КИЕВ
НАУКОВА ДУМКА
2013

УДК 517.54

В монографии подведены итоги исследований Донецкой школы по теории отображений, которые проводились в последние годы под руководством член-корреспондента НАН Украины В.Я. Гутлянского и заведующего отделом теории функции Института прикладной математики и механики НАН Украины В.И. Рязанова. Книга написана на основе работ молодых ученых. В книге рассмотрен широкий круг проблем, относящихся к традиционным задачам теории отображений, которые связаны с локальным и граничным поведением, для класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ на плоскости и классов Орлича-Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ при условии типа Кальдерона на функцию $\varphi$ в пространствах $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 3$, в частности, классов Соболева $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$. Исследования основаны на модульной и емкостной технике. Приведены приложения к краевым задачам для уравнений Бельтрами с вырождением и римановым многообразиям.

Для научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области теории функций и отображений.

У монографії підведено підсумки досліджень донецької школи з теорії відображень, що проводилися в останні роки під керівництвом член-кореспондента НАН України В.Я. Гутлянського і завідувача відділом теорії функцій ІПММ НАН України В.І. Рязанова. Книгу написано на основі праць молодих вчених. У книзі розглянуто широке коло проблем, що відносяться до традиційних завдань теорії відображень, пов'язаних з локальною і граничною поведінкою, для класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ на площині і класів Орлича-Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ за умови типу Кальдерона на функцію $\varphi$ у просторах $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 3$, зокрема, класів Соболєва $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$. Дослідження засновано на модульній і ємнісний техніці. Наведено застосування до крайових задач для рівнянь Бельтрамі з виродженням та рімановим багатовидам.

Для науковців, аспірантів і студентів, що спеціалізуються в галузі теорії функцій і відображень.

Под общей редакцией доктора физ.-мат. наук,
профессора В.И. Рязанова

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, профессор Ю.Б. Зелинский,
доктор физ.-мат. наук А.Ф. Тедеев

*Утверждено к печати ученым советом*
*Института прикладной математики и механики НАН Украины*

***Видання здійснене за державним контрактом***
***на випуск наукової друкованої продукції***

Научно-издательский отдел физико-математической и технической литературы
Редактор *В.В. Вероцкая*

**ISBN 978-966-00-1325-4**

НПП "Издательство
“Наукова думка”
НАН Украины
дизайн, 2013

# Оглавление

**Оглавление** **3**

**Предисловие** **7**

**Часть I. К теории классов отображений с модульными условиями** **11**

**Глава 1. О сходимости и компактности пространственных гомеоморфизмов** **11**

1.1. Введение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12
1.2. Функции классов BMO, VMO и FMO . . . . . . . . . . . 15
1.3. О некоторых интегральных неравенствах . . . . . . . . . . 17
1.4. Сходимость общих гомеоморфизмов . . . . . . . . . . . . . 24
1.5. Сходимость гомеоморфизмов с модульными условиями . . 27
1.6. Полнота кольцевых $Q$-гомеоморфизмов . . . . . . . . . . 35
1.7. Нормальные семейства кольцевых $Q$-гомеоморфизмов . . . 36
1.8. Компактность семейств кольцевых $Q$-гомеоморфизмов . . 40
1.9. Точность условий сходимости, нормальности, компактности 42

**Глава 2. Продолжение кольцевых $Q$-гомеоморфизмов на границу в $\mathbb{R}^n$** **47**

2.1. Предварительные сведения . . . . . . . . . . . . . . . . . 47
2.2. Лемма о непрерывном продолжении на границу . . . . . . 48
2.3. Основные следствия . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50
2.4. Продолжение на границу обратных отображений . . . . . . 52
2.5. Устранение изолированных особенностей . . . . . . . . . . 53

**Глава 3. О нижних и кольцевых $Q$-гомеоморфизмах относительно $p$-модуля** **55**

3.1. Кольцевые $Q$-гомеоморфизмы относительно $p$-модуля . . . 55
3.2. Характеризация кольцевых $Q$-гомеоморфизмов относительно $p$-модуля . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58
3.3. Искажение объема . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61
3.4. Поведение в точке . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 66

3.5. Конечная липшицевость кольцевых $Q$-гомеоморфизмов относительно $p$-модуля . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 68
3.6. Модули семейств поверхностей . . . . . . . . . . . . . . . . 72
3.7. Нижние $Q$-гомеоморфизмы относительно $p$-модуля . . . . 75
3.8. Взаимосвязь нижних и верхних модульных неравенств . . 77

**Глава 4. Граничное поведение кольцевых $Q$-гомеоморфизмов в метрических пространствах 79**
4.1. Введение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 79
4.2. Непрерывное продолжение на границу . . . . . . . . . . . . 85
4.3. Дальнейшие следствия и приложения . . . . . . . . . . . . 88
4.4. Гомеоморфное продолжение на границу . . . . . . . . . . . 90

**Часть II. К теории отображений классов Соболева на плоскости 91**

**Глава 5. Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами 91**
5.1. Введение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 91
5.2. Связь класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ с нижними $Q$-гомеоморфизмами . . . . 93
5.3. Связь $W^{1,1}_{\rm loc}$ с кольцевыми $Q$-гомеоморфизмами . . . . . . . 96
5.4. Об областях с регулярными границами . . . . . . . . . . . 100
5.5. Граничное поведение гомеоморфных решений . . . . . . . 103
5.6. Регулярные решения задачи Дирихле в односвязных областях . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 106
5.7. Псевдорегулярные решения в многосвязных областях . . . 111
5.8. Многозначные решения в многосвязных областях . . . . . 113

**Глава 6. К теории отображений с ограничениями интегрального типа 115**
6.1. Введение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 115
6.2. Теоремы сходимости . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 117
6.3. Теоремы нормальности . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 122
6.4. Теоремы компактности . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 125

**Глава 7. К теории отображений с ограничениями теоретико-множественного типа 126**
7.1. Введение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 126
7.2. Теоремы сходимости . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 127
7.3. Теоремы нормальности . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 131
7.4. Теоремы компактности . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 137

**Часть III. К теории отображений классов Орлича–Соболева в пространстве 139**

**Глава 8. К общей теории классов Орлича–Соболева 139**

8.1. Введение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 139
8.2. Предварительные сведения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 143
8.3. Дифференцируемость открытых отображений . . . . . . . 148
8.4. Условие Лузина и свойство Сарда на поверхностях . . . . 150
8.5. О компактных классах Орлича–Соболева . . . . . . . . . . 155
8.6. Нижние и кольцевые $Q$-гомеоморфизмы . . . . . . . . . . . 159
8.7. Нижние $Q$-гомеоморфизмы и классы Орлича–Соболева . . 162

**Глава 9. Локальное и граничное поведение классов Орлича–Соболева 166**

9.1. Равностепенно непрерывные семейства гомеоморфизмов . 166
9.2. Об областях с регулярными границами . . . . . . . . . . . 171
9.3. Непрерывное продолжение на границу . . . . . . . . . . . . 174
9.4. Продолжение на границу обратных отображений . . . . . . 177
9.5. Гомеоморфное продолжение на границу . . . . . . . . . . . 179
9.6. Устранение изолированных особенностей . . . . . . . . . . 181
9.7. Устранение NED-множеств . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 185

**Глава 10. Сходимость и компактность отображений классов Соболева 187**

10.1. Введение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 187
10.2. Сходимости гомеоморфизмов классов Орлича–Соболева . 188
10.3. Нормальные семейства гомеоморфизмов . . . . . . . . . . . 193
10.4. Классы Орлича–Соболева и интеграл Дирихле . . . . . . . 195
10.5. Основная лемма . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 201
10.6. Полунепрерывность дилатаций в среднем . . . . . . . . . . 205
10.7. Компактность гомеоморфизмов классов Соболева . . . . . 217
10.8. Точность условий . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 224

**Часть IV. Граничное поведение отображений на многообразиях 229**

**Глава 11. Граничное поведение кольцевых $Q$-гомеоморфизмов 229**

11.1. Введение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 229
11.2. Предварительные замечания . . . . . . . . . . . . . . . . . . 230
11.3. О непрерывном продолжении на границу . . . . . . . . . . 236
11.4. О продолжении на границу обратных отображений . . . . 240
11.5. О гомеоморфном продолжении на границу . . . . . . . . . 240

**Глава 12. Об отображениях классов Орлича–Соболева на римановых многообразиях 242**

12.1. Введение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 242
12.2. Связь $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с нижними $Q$-гомеоморфизмами . . . . . . . . 244
12.3. Связь нижних $Q$-гомеоморфизмов с кольцевыми . . . . . . 249
12.4. Граничное поведение нижних $Q$-гомеоморфизмов . . . . . 252
12.5. Следствия для классов Орлича–Соболева . . . . . . . . . . 256

**Приложение А.**

О дифференцируемости абсолютно непрерывных функций по Кальдерону . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 259

**Приложение Б.**

Об оценках емкости конденсаторов в пространственных областях по В.И. Кругликову . . . . . . . . . . . . . . . . . . 271

**Список литературы 276**

**Предметный указатель 286**

*Посвящается 95-летию Нацинальной академии наук* Украины

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория отображений является высокоразвитой частью современного математического анализа. Эта теория берет свое начало со знаменитых работ Бельтрами, Гаусса, Гильберта, Лиувилля, Пуанкаре, Римана, Шварца и других известных математиков. Теория аналитических функций давно уже стала образцом наиболее развитых и тщательных разработанных ветвей математики. В этой теории особое внимание уделялось конформным отображениям, которые нашли многочисленные важные приложения в теории потенциала, математической физике, униформизаации, гидро- и аэродинамике, электро- и магнитостатике.

В конце 20-х – начале 30-х годов прошлого столетия Грёч, Лаврентьев и Морри ввели более общий класс отображений, впоследствии названных квазиконформными. Вскоре они были применены к классическим проблемам о накрывающих римановых поверхностей (Альфорс), модулях римановых поверхностей (Тейхмюллер) и классификации односвязных римановых поверхностей (Волковыский). Впоследствии квазиконформные отображения были определены в высших размерностях (Лаврентьев, Геринг, Вяйсяля), а затем обобщены до отображений с ограниченным искажением (Решетняк), именуемых также квазирегулярными отображениями (Мартио, Рикман, Вяйсяля). Отметим, что квазирегулярные отображения могут иметь точки ветвления и являются пространственным аналогом аналитических функций. Квазиконформные и квазирегулярные отображения оказались полезными при изучении клейновых групп, комплексной динамики, мероморфных функций, в топологии, теории упругости, в гидродинамике, электро- и магнитостатике в неоднородных средах. В работах Альфорса Л., Андреян Казаку К., Белинского П.П., Боярского Б.В., Векуа И.Н., Водопьянова С.К., Виртанена К., Волковыского Л.И., Вуоринена М., Вяйсяля Ю., Геринга Ф., Гольдштейна В.М., Гутлянского В.Я., Карамана П., Крушкаля С.Л., Лаврентьева М., Лехто О., Мартио О., Миклюкова В.М., Песина И.Н., Решетняка Ю.Г., Рикмана С., Шабата Б.В. и других были изучены основные свойства таких отображений.

В конце 20 – начале 21 столетия произошел переход от отображений с ограниченным искажением по Решетняку к изучению так называемых отображений с конечным искажением по Иванцу, характеристики которых уже не являются ограниченными в области задания, а лишь конечными почти всюду. Отметим, что этому на самом деле предшествовало изучение нашими отечественными математиками так называемых отображений квазиконформных в среднем, берущих свое начало с работ Крушкаля С.Л., упомянем также работы Гольберга А., Гутлянского В.Я., Зорича В., Кругликова В.И., Кудьявина В.С., Кюнау Р., Миклюкова В.М., Перовича М., Песина И.Н., Рязанова В.И. и других авторов. В этой же связи необходимо также упомянуть отображения с ограниченным интегралом Дирихле, в развитие теории которых большой вклад внесла донецкая школа по теории отображений во главе с членом-корреспондентом НАН Украины Суворовым Г.Д. В частности, Суворов Г.Д. внес большой личный вклад в теорию граничного поведения, а также теорию сходимости таких отображений.

В статье Бишопа-Гутлянского-Мартио-Вуоринена (2000) для пространственных квазиконформных отображений было получено модульное неравенство, которое впоследствии легло в основу определения новых классов так называемых $Q$-гомеоморфизмов (термин предложен профессором Олли Мартио). По существу это были также отображения с конечным искажением, поскольку функция $Q$ не предполагалась ограниченной, но определение носило геометрический характер и было аналогично определению Вяйсяля для квазиконформных отображений. Изучение этих классов отображений начиналось с работ Мартио-Рязанова-Сребро-Якубова (2004-2005). В работе Рязанова-Салимова (2007) эти классы были распространены и изучались ими в произвольных метрических пространствах с мерами. Упомянем также статьи румынских математиков Андреян Казаку К. и ее ученика Кристеа М., которые также изучают отображения с конечным искажением методом модулей.

Вслед за этим в работе Рязанова-Сребро-Якубова (2005) начали изучаться более широкие классы отображений так называемых кольцевых Q-гомеоморфизмов, которые были мотивированы кольцевым определением квазиконформности по Герингу и оказались более важными для приложений. Первоначально эти отображения рассматривались ими в связи с исследованиями уравнений Бельтрами на плоскости и только для внутренних точек. Впоследствии понятие кольцевых $Q$-гомеоморфизма было распространено ими в граничные точки областей, что превратило их в мощный инструмент исследования граничного поведения решений. Затем в работах Рязанова-Севостьянова, а также Афанасьевой Е.С. и

Ломако Т.В., эти классы были распространены и изучались ими в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, а затем и в произвольных метрических пространствах с мерами.

Весьма полезным инструментом при исследовании плоских и пространственных отображений оказались также так называемые нижние Q-гомеоморфизмы, которые были впервые введены и изучались в работе Ковтонюка-Рязанова (2008). Их определение также носит геометрический характер и мотивировано кольцевым определением Геринга для квазиконформных отображений. Отметим, что многие результаты упомянутых исследований уже были отражены в монографиях [188] и [252]. Однако, недавно в работах Гольберга А. и Салимова Р.Р. помимо кольцевых и нижних $Q$-гомеоморфизмы относительно конформного модуля стали изучаться кольцевые и нижние $Q$-гомеоморфизмов относительно произвольного $p$-модуля. Кроме того, в последнее время все эти классы отображений нашли важные приложения как в теории краевых задач для уравнений Бельтрами на плоскости, так и в теории пространственных гомеоморфизмов классов Соболева и более общих классов Орлича-Соболева. Этим приложениям и посвящена данная книга.

Первая часть книги посвящена развитию теории кольцевых и нижних $Q$-гомеоморфизмов как относительно конформного модуля, так и относительно более общих $p$-модулей. Здесь получен широкий круг результатов, касающихся различных проблем сходимости, компактности, локального и граничного поведения указанных отображений. Эта часть составляет методологическую базу всей книги.

Вторая часть содержит теорию гомеоморфизмов класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ на плоскости. По существу это эквивалентно изучению гомеоморфных решений уравнений Бельтрами с обобщенными производными. Здесь установлен ряд теорем о граничном поведении таких решений и на этой основе получены теоремы существования регулярных решений задачи Дирихле в односвязных областях и псевдорегулярных и многозначных решений в конечносвязных областях. Кроме того, здесь установлен ряд теорем сходимости и компактности для классов решений уравнений Бельтрами с ограничениями интегрального и теоретико-множественного характера на комплексный коэффициент.Последние результаты важны как для теории экстремальных задач в целом, так и для теории вариаций в различных классах решений уравнений Бельтрами.

Третья часть книги посвящена теории отображений в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, классов Соболева $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$, а также классов Орлича-Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ при условиях типа Кальдерона на функцию $\varphi$. Для таких классов отображений установлен целый ряд теорем сходимости и компактности и теоремы о продолжении таких отображений на границу.

Наконец, в четвертой части книги представлена теория граничного поведения отображений на римановых многообразиях $M^n$, $n \geq 3$, классов Орлича-Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условиями типа Кальдерона на $\varphi$ и, в частности, классов Соболева $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$.

Заметим, что, как это было впервые обнаружено ещё в работах Б.В. Боярского и Ф. Геринга, квазиконформные отображения в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, принадлежат классу $W^{1,p}_{\rm loc}$ при некотором $p > n$. Однако, как это стало понятно, например, уже из работы Ги Давида (1988), при неограниченных дилатациях отображения принадлежат, вообще говоря, лишь классам Соболева $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p < n$, даже если дилатации интегрируемы в любой сколь угодно большой степени.

Таким образом, развитая нами теория позволяет распространить основную часть теории квазиконформных отображений на значительно более широкие классы отображений на плоскости, в пространстве, на римановых многообразиях и метрических пространствах с мерами.

Авторы хотели бы выразить искреннюю благодарность члену-корреспонденту НАН Украины В.Я. Гутлянскому за его постоянное внимание к нашей работе, профессору В.И. Рязанову за общее научное руководство и редактирование текстов, а также к.ф.-м.н. Е.С. Афанасьевой (Смоловой) и Т.В. Ломако за любезно предоставленные материалы их статей и диссертаций и помощь при подготовке монографии. Наконец, авторы признательны Оле Ткаченко за большую техническую работу, выполненную в процессе подготовки монографии к публикации.

# Часть I.
# К теории классов отображений с модульными условиями

Основной целью данной части монографии являются результаты по локальному и граничному поведению отображений, удовлетворяющих определенным модульным и емкостным условиям, что составляет методологическую базу всей книги. Модули семейств кривых и поверхностей являются основным геометрическим инструментом в теории отображений. Развитие метода модулей, происходившее в последнее время, тесно связано с современными классами отображений, см., напр., монографию [252], и уравнениями в частных производных, см., напр., монографию [188]. Смотри также недавние книги по теории модулей и ёмкостей [7, 20] и [321], а также следующие статьи и монографии [4, 31, 48, 77, 99, 105, 112, 115, 119–123, 146, 153–158, 169, 169, 174, 204, 225, 248, 320, 323, 327] и дальнейшие ссылки в них.

## Глава 1. О сходимости и компактности пространственных гомеоморфизмов

В данной главе мы приводим некоторые сведения по теории сходимости общих гомеоморфизмов и развиваем теорию компактности для так называемых кольцевых $Q$-гомеоморфизмов. Кольцевые $Q$-гомеоморфизмы были введены сначала на плоскости в связи с изучением вырожденных уравнений Бельтрами, см., напр., работы [286, 288] и [292] и монографии [188] и [252]. Теория кольцевых $Q$-гомеоморфизмов имеет также приложения к различным классам отображений с конечным искажением, интенсивно изучаемым в последнее время, см., напр., [252] и дальнейшие ссылки в этой монографии. Изучение пространственных кольцевых $Q$-гомеоморфизмов начиналось в работах [86], [87] и [282]. Результаты данной главы были впервые опубликованы в препринте [283], см. также некоторые из этих результатов в журнальной статье [285].

## 1.1. Введение

В дальнейшем, в расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n\bigcup\{\infty\}$ мы используем **сферическую (хордальную) метрику** $h(x,y):=|\pi(x)-$ $-\pi(y)|$, где $\pi$ – стереографическая проекция пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1},\frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, т.е.

$$h(x,y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}},\quad x\neq\infty\neq y,\quad h(x,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}.$$

Отметим, что $h(x,y)\leq 1$, и $h(x,y)\leq|x-y|$. **Сферический (хордальный) диаметр** множества $E\subset\overline{\mathbb{R}^n}$ есть величина

$$h(E)=\sup_{x,y\in E}h(x,y)\,.$$

Для точки $z\in\overline{\mathbb{R}^n}$ и множества $E\subseteq\overline{\mathbb{R}^n}$ мы также определим расстояние $h(z,E)$ как точную нижнюю грань $h(z,y)$ по всем $y\in E$, а для множеств $F\subseteq\overline{\mathbb{R}^n}$ и $E\subseteq\overline{\mathbb{R}^n}$ – расстояние $h(F,E)$ как точную нижнюю грань $h(z,y)$ по всем $z\in F$ и $y\in E$.

Напомним, что борелева функция $\rho:\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$, $n\geqslant 2$, называется **допустимой** для семейства $\Gamma$ кривых $\gamma$ в $\mathbb{R}^n$, пишут $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma}\rho(x)|dx|\geqslant 1\qquad\forall\,\gamma\in\Gamma\,.$$

**Конформным модулем** или просто **модулем** семейства кривых $\Gamma$ называется величина

$$M(\Gamma)=\inf_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\rho^n(x)\,dm(x)\,.$$

Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $E$, $F\subset\mathbb{R}^n$ – произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E,F,D)$ семейство всех кривых $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, которые соединяют $E$ и $F$ в $D$, т.е. $\gamma(a)\in E$, $\gamma(b)\in F$ и $\gamma(t)\in D$ при $a<t<b$. Полагаем $\Gamma(E,F)=\Gamma(E,F,\mathbb{R}^n)$, если $D=\mathbb{R}^n$.

Напомним также, что топологическое пространство $X$ **связно**, если его нельзя разбить на два непустых открытых множества, см. [47], с. 136. Компактные связные пространства называются **континуумами**, см. [47], с. 176.

**Кольцевой областью**, или **кольцом** в $\mathbb{R}^n$ будем называть область $R$ в $\mathbb{R}^n$, дополнение которой имеет ровно две компоненты связности. Пусть $R$ – кольцо в $\mathbb{R}^n$. Тогда, если $C_1$ и $C_2$ – связные компоненты множества $\mathbb{R}^n \setminus R$, то будем записывать это в виде: $R = R(C_1, C_2)$. **Ёмкостью** кольца $R$ называется величина

$$\operatorname{cap} R(C_1, C_2) \ : \ = \ M(\Gamma(C_1, C_2, R))\,,$$

см., напр., разд. 5.49 в [323]. Заметим также, что

$$M(\Gamma(C_1, C_2, R)) \ = \ M(\Gamma(C_1, C_2))\,,$$

см. теорему 11.3 в [320]. **Конформный модуль** кольца $R(C_1, C_2)$ определяется соотношением

$$\operatorname{mod} R(C_1, C_2) = \left(\frac{\omega_{n-1}}{M(\Gamma(C_1, C_2))}\right)^{1/(n-1)}\,,$$

где $\omega_{n-1}$ – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, см., напр., формулу (5.50) в [323].

Следующие факты будут в дальнейшем полезны, см. [174] или 7.37 в [323].

**Предложение 1.1.** Пусть $R(E\,,F)$ — произвольное кольцо. Тогда

$$cap\, R(E\,,F) \ \geq \ cap\, R_T\left(\frac{1}{h\,(E)\ h\,(F)}\right)\,, \tag{1.1}$$

где

$$R_T(t) \ = \ R([-1,0]\,,[t,\infty])\ , \qquad t \ > \ 1\,, \tag{1.2}$$

- кольцо Тейхмюллера в $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Хорошо известно, что

$$cap\ R_T(t) = \frac{\omega_{n-1}}{[\log\Phi(t)]^{n-1}}\,, \tag{1.3}$$

где $\omega_{n-1}$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, а функция $\Phi$ удовлетворяет условиям:

$$t+1 \leq \Phi(t) \leq \lambda_n^2\cdot(t+1) < 2\lambda_n^2\cdot t, \quad t>1\ ,$$

$$\lambda_n \in [4, 2e^{n-1})\,,\ \ \lambda_2 \ = \ 4\,,\ \ \lambda_n^{1/n} \ \to \ e \ \ \textit{при} \ \ n \ \to \ \infty\,,$$

см., напр., [174], с. 225–226, (7.19) и (7.22) в [323].

Следовательно, из соотношения (1.1) имеем следующее утверждение.

**Предложение 1.2.** Для любых континуумов $E$ и $F$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$,

$$cap\, R(E,F) \ \geq \ \frac{\omega_{n-1}}{\left[\log \frac{2\lambda_n^2}{h(E)h(F)}\right]^{n-1}}\,, \tag{1.4}$$

где $\omega_{n-1}$ – площадь сферы $S^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, $\lambda_n \in [4, 2e^{n-1})$, $\lambda_2 = 4$ и $\lambda_n^{1/n} \to e$ при $n \to \infty$.

**Лемма 1.1.** Пусть $D$ — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ – гомеоморфизм с $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \geq \Delta > 0$ и пусть $x_0 \in D$, $y \in B(x_0, r_0)$, $r_0 \leq \rho\,(x_0, \partial D)$, $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_0\}$ и $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = |y - x_0|\}$. Тогда

$$h(f(y), f(x_0)) \ \leq \ \frac{\alpha_n}{\Delta} \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\omega_{n-1}}{M\left(\Gamma\left(fS_0,\ fS\,, fD\right)\right)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right\} \tag{1.5}$$

где $\omega_{n-1}$ — площадь единичной сферы $S^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, $\alpha_n = 2\lambda_n^2$ с $\lambda_n \in [4, 2e^{n-1})$, $\lambda_2 = 4$ и $\lambda_n^{1/n} \to e$ при $n \to \infty$.

**Доказательство.** Пусть $E$ обозначает компоненту множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus fA$, содержащую $f(x_0)$, и $F$ – компоненту, содержащую $\infty$, где

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : |y - x_0| < |x - x_0| < r_0\}\,.$$

Согласно предложению 1.2, будем иметь:

$$cap\ R(E,F) \ \geq \ \frac{\omega_{n-1}}{\left\{\ \log \frac{2\,\lambda_n^2}{h(E)h(F)}\right\}^{n-1}} \tag{1.6}$$

и, следовательно,

$$h(E) \ \leq \ \frac{2\lambda_n^2}{h(F)}\ \exp\left\{-\left(\frac{\omega_{n-1}}{cap\ \ R(E,F)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right\}\,, \tag{1.7}$$

откуда и следует соотношение (1.5). Лемма доказана. □

Следующее определение мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу, см., напр., [171]. Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $Q : D \to (0, \infty)$ – измеримая функция. Положим

$$A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}\,,$$

$$S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_i\}\,, \quad i = 1, 2.$$

Говорим (см. [86]), что гомеоморфизм $f$ области $D$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ является **кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в точке** $x_0 \in D$, если

$$M\left(\Gamma\left(f(S_1),\, f(S_2)\right)\right) \leqslant \int\limits_A Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{1.8}$$

для любого кольца $A = A(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < r_0 = \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$, $S_i = S(x_0, r_i)$, $i = 1, 2$, и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to$ $\to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1\,.$$

Если условие (1.8) имеет место в каждой точке $x_0 \in D$, то также говорим, что $f$ является **кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в области** $D$.

Характеризация кольцевых $Q$-гомеоморфизмов была дана в работе [86], см. ниже в разделе 3.2.

## 1.2. Функции классов BMO, VMO и FMO

Говорят, что вещественная функция $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ имеет **ограниченное среднее колебание** в области $D \subset \mathbb{R}^n$, пишут $\varphi \in \mathrm{BMO}(D)$, либо просто $\varphi \in \mathrm{BMO}$, если

$$\|\varphi\|_* = \sup_{B \subset D} \frac{1}{|B|} \int\limits_B |\varphi(x) - \varphi_B|\, dm(x) < \infty, \tag{1.9}$$

где точная нижняя грань в (1.9) берётся по всем шарам $B$, лежащим в области $D$, а

$$\varphi_B = \fint_B \varphi(x)\, dm(x) :\; = \frac{1}{|B|} \int\limits_B \varphi(x)\, dm(x) \tag{1.10}$$

обозначает среднее интегральное значение функции $\varphi$ над шаром $B$.

Пространство BMO, введенное Джоном и Ниренбергом в работе [214], на сегодняшний день является одним из важнейших понятий гармонического анализа, комплексного анализа, теории уравнений с частными производными и смежных областей, см. монографии [199] и [276]. В частности, BMO тесно связано с теорией квазиконформных отображений, см., напр., [124–126, 175, 215, 275] и [276].

Функция $\varphi$ класса BMO называется функцией **исчезающего среднего колебания**, сокр. $\varphi \in \mathrm{VMO}$, если супремум в (1.9) по всем шарам $B$ в области $D$, таким что $|B| < \varepsilon$, стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Пространство VMO введено Сарасоном в статье [297]. Отметим, что значительное число работ посвящено изучению уравнений в частных производных, имеющих коэффициенты класса VMO, см., напр., [150, 211, 253, 267] и [271].

Следуя работе [35], будем говорить, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет **конечное среднее колебание** в точке $x_0 \in D$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \ \fint_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \widetilde{\varphi}_\varepsilon| \, dm(x) < \infty, \tag{1.11}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_\varepsilon = \fint_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x) \, dm(x) \tag{1.12}$$

обозначает среднее интегральное значение функции $\varphi$ над шаром $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \varepsilon\}$. Как известно, с условием (1.11) совместима ситуация, когда $\widetilde{\varphi_\varepsilon} \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Говорим также, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет **конечное среднее колебание** в области $D$, пишем $\varphi \in \mathrm{FMO}(D)$, либо просто $\varphi \in \mathrm{FMO}$, когда недоразумение невозможно, если $\varphi$ имеет конечное среднее колебание в каждой точке $x_0 \in D$.

Известно, что при всех $1 \leqslant p < \infty$ имеют место включения $\mathrm{L}^\infty(D) \subset \mathrm{BMO}(D) \subset \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(D)$, см., напр., [214] и [276]. Однако, $\mathrm{FMO}(D)$ не является подклассом $L^p_{\mathrm{loc}}(D)$ ни для какого $p > 1$, хотя $\mathrm{FMO}(D) \subset\subset L^1_{\mathrm{loc}}(D)$, см. соответствующий пример в разд. 11.2 в [252]. Таким образом, FMO существенно шире $\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}$.

Приведем еще некоторые факты о функциях конечного среднего колебания из работы [35], см. также раздел 6.2 в [252].

**Предложение 1.3.** *Если для некоторых чисел $\varphi_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$,*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \ \fint_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon| \, dm(x) < \infty\,, \tag{1.13}$$

*то функция $\varphi$ имеет конечное среднее колебание в точке $x_0$.*

**Следствие 1.1.** *В частности, если в точке $x_0 \in D$ выполнено условие*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \ \fint_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(z)| \, dm(x) < \infty\,, \tag{1.14}$$

*то функция $\varphi$ имеет конечное среднее колебание в $x_0$.*

Напомним, что точка $x_0 \in D$ называется **точкой Лебега** функции $\varphi : D \to \mathbb{R}$, если $\varphi$ интегрируема в окрестности $x_0$ и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \fint_{B(x_0,\,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \, dm(x) = 0\,. \tag{1.15}$$

**Следствие 1.2.** Пусть $x_0$ — точка Лебега для функции $\varphi$. Тогда функция $\varphi$ имеет конечное среднее колебание в точке $x_0$.

Известно, что для функции $\varphi \in L^1_{\rm loc}(D)$ почти все точки $D$ являются ее точками Лебега и, таким образом, конечного среднего колебания.

**Следствие 1.3.** Любая локально интегрируемая функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание почти во всех точках $D$.

Ключевое значение для наших дальнейших приложений имеет следующая лемма.

**Лемма 1.2.** *Пусть $D$ область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $\varphi : D \to \mathbb{R}$ – неотрицательная функция, имеющая конечное среднее колебание в точке $0 \in D$. Тогда*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} \frac{\varphi(x)\, dm(x)}{\left(|x| \log \frac{1}{|x|}\right)^n} = O\left(\log\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{1.16}$$

*при $\varepsilon \to 0$ для некоторого положительного числа $\varepsilon_0 < {\rm dist}\,(0, \partial D)$.*

Приведенная выше лемма играет важную роль в теории вырожденных уравнений Бельтрами, равно как и в современной теории отображений, см. по этому поводу монографии [188] и [252].

## 1.3. О некоторых интегральных неравенствах

**Обратная функция** $\Phi^{-1}$ может быть корректно определена для любой неубывающей функции $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ :

$$\Phi^{-1}(\tau) \ = \ \inf_{\Phi(t) \geq \tau} \ t\ . \tag{1.17}$$

Как обычно, inf в (1.17) равен $\infty$, если множество $t \in [0, \infty]$, таких что $\Phi(t) \geq \tau$, пусто. Заметим, что функция $\Phi^{-1}$ также является неубывающей. Кроме того, заметим, что если $h : [0, \infty] \to [0, \infty]$ - сохраняющий ориентацию гомеоморфизм и $\varphi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ - неубывающая функция, то

$$(\varphi \circ h)^{-1} \ = \ h^{-1} \circ \varphi^{-1}\ . \tag{1.18}$$

**Замечание 1.1.** Из определения очевидно, что

$$\Phi^{-1}(\Phi(t)) \ \leq \ t \qquad \forall\, t \in [0,\infty] \tag{1.19}$$

с равенством в (1.19), исключая интервалы постоянства функции $\Phi(t)$.

Поскольку отображение $t \mapsto t^p$ для каждого положительного $p$ является сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом $[0,\infty]$ на $[0,\infty]$, теорема 2.1 из статьи [291], см. также теорему 2.3 в монографии [188], может быть переписана в следующем виде, более удобном для дальнейших приложений. Здесь, в (1.21) и (1.22), мы дополняем определения интегралов $\infty$ при $\Phi_p(t) = \infty$, соответственно, $H_p(t) = \infty$, для всех $t \geq T \in [0,\infty)$. Интеграл в (1.22) понимается в смысле Лебега – Стильтьеса, а интегралы в (1.21) и (1.23)–(1.26) – как обычные интегралы Лебега.

**Предложение 1.4.** *Пусть* $\Phi\ :\ [0,\infty] \ \to\ [0,\infty]$ *– неубывающая функция. Полагаем*

$$H_p(t) \ = \ \log \Phi_p(t)\ , \qquad \Phi_p(t) = \Phi\left(t^p\right)\ , \quad p \in (0,\infty)\,. \tag{1.20}$$

*Тогда равенство*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} H_p'(t)\ \frac{dt}{t} \ = \ \infty \tag{1.21}$$

*влечёт*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{dH_p(t)}{t} \ = \ \infty \tag{1.22}$$

*и (1.22) эквивалентно соотношению*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} H_p(t)\ \frac{dt}{t^2} \ = \ \infty \tag{1.23}$$

*для некоторого* $\delta > 0$ *и (1.23) эквивалентно каждому из равенств:*

$$\int\limits_{0}^{\delta} H_p\left(\frac{1}{t}\right)\ dt \ = \ \infty \tag{1.24}$$

*при некотором* $\delta > 0$,

$$\int\limits_{\delta_*}^{\infty} \frac{d\eta}{H_p^{-1}(\eta)} \ = \ \infty \tag{1.25}$$

*при некотором* $\delta_* > H(+0)$,

$$\int\limits_{\delta_*}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\Phi_p^{-1}(\tau)} \ = \ \infty \tag{1.26}$$

*при некотором* $\delta_* > \Phi(+0)$.

*Более того, (1.21) эквивалентно соотношению (1.22) и, следовательно, (1.21)–(1.26) эквивалентны друг другу при дополнительном условии, что* $\Phi$ *абсолютно непрерывна. В частности, все условия (1.21)–(1.26) эквивалентны друг другу при условии, что функция* $\Phi$ *является выпуклой и неубывающей.*

Легко видеть, что условия (1.21)–(1.26) являются более слабыми при больших $p$, см., напр., (1.23). Необходимо дать ещё одно пояснение. В правых частях условий (1.21)–(1.26) подразумевается символ $+\infty$. При $\Phi_p(t) = 0$ для $t \in [0, t_*]$, $H_p(t) = -\infty$ для $t \in [0, t_*]$, и мы полагаем $H_p'(t) := 0$ для $t \in [0, t_*]$. Заметим, что условия (1.22) и (1.23) исключают случай, когда $t_*$ принадлежит интервалу интегрирования в указанных выше соотношениях. В противном случае, левые части в (1.22) и (1.23) либо одновременно равны $-\infty$, либо не определены. Следовательно, мы можем предполагать в (1.21)–(1.24), что $\Delta > t_0$ и, соответственно, $\delta < 1/t_0$, где $t_0 \colon = \sup\limits_{\Phi_p(t)=0} t$, $t_0 = 0$ если $\Phi_p(0) > 0$.

Напомним, что функция $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ называется **выпуклой,** если

$$\Phi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \ \leq \ \lambda\, \Phi(t_1) \ + \ (1-\lambda)\ \Phi(t_2)$$

при всех $t_1$, $t_2 \in [0, \infty]$ и $\lambda \in [0, 1]$.

В дальнейшем, $\mathbb{R}^n(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, 1)$ обозначает сферическое кольцо в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$,

$$\mathbb{R}^n(\varepsilon) \ = \ \{\ x \in \mathbb{R}^n :\ \varepsilon < |x| \ < \ 1\ \}\ . \tag{1.27}$$

Следующее утверждение, см. лемму 3.1 в статье [87], является обобщением и усилением леммы 3.1 из статьи [291], см. также лемму 2.19 из монографии [188].

**Лемма 1.3.** *Пусть* $Q : \mathbb{B}^n \to [0, \infty]$ *– измеримая функция,* $\Phi : [0, \infty] \to (0, \infty]$ *– неубывающая выпуклая функция, и пусть среднее ин-*

*тегральное значение* $M(\varepsilon)$ *функции* $\Phi\circ Q$ *в кольце* $\mathbb{R}^n(\varepsilon)$ *конечно. Тогда*

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dr}{rq^{\frac{1}{p}}(r)}\ \geq\ \frac{1}{n}\int\limits_{eM(\varepsilon)}^{\frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^n}}\frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{p}}}\qquad\forall\quad p\in(0,\infty),\qquad\varepsilon\in(0,1)\,,\tag{1.28}$$

*где* $q(r)$ *– среднее интегральное значение функции* $Q(x)$ *над сферой* $|x|=r$.

**Замечание 1.2.** Отметим, что при каждом $p\in(0,\infty)$ и $\varepsilon\in(0,1)$ соотношение (1.28) эквивалентно неравенству:

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dr}{rq^{\frac{1}{p}}(r)}\geq\frac{1}{n}\int\limits_{eM(\varepsilon)}^{\frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^n}}\frac{d\tau}{\tau\Phi_p^{-1}(\tau)}\,,\qquad\Phi_p(t):=\Phi(t^p)\,.\tag{1.29}$$

**Доказательство леммы 1.3.** Обозначим $t_*=\sup\limits_{\Phi_p(t)=\tau_0}t$, $\tau_0=\Phi(0)>0$. Полагая $H_p(t):\ =\log\Phi_p(t)$, видим, что $H_p^{-1}(\eta)=\Phi_p^{-1}(e^\eta)$, $\Phi_p^{-1}(\tau)=H_p^{-1}(\log\ \tau)$. Следовательно, получаем, что

$$q^{\frac{1}{p}}(r)=H_p^{-1}\left(\log\frac{h(r)}{r^n}\right)=H_p^{-1}\left(n\log\frac{1}{r}+\log\ h(r)\right)\qquad\forall\, r\ \in R_*\tag{1.30}$$

где $h(r):\ =\ r^n\Phi\left(q(r)\right)\ =\ r^n\Phi_p\left(q^{\frac{1}{p}}(r)\right)$ и $R_*=\{\ r\in(\varepsilon,1):\ q^{\frac{1}{p}}(r)\ >\ t_*\}$. Тогда

$$q^{\frac{1}{p}}(e^{-s})\ =\ H_p^{-1}\left(ns\ +\ \log\ h(e^{-s})\right)\qquad\forall\ s\ \in S_*\tag{1.31}$$

где $S_*\ =\ \{s\in(0,\log\frac{1}{\varepsilon}):\ q^{\frac{1}{p}}\left(e^{-s}\right)\ >\ t_*\}$.

Теперь, в силу неравенства Иенсена и выпуклости функции $\Phi$, мы имеем, что

$$\int\limits_{0}^{\log\frac{1}{\varepsilon}}h(e^{-s})\ ds\ =\ \int\limits_{\varepsilon}^{1}h(r)\ \frac{dr}{r}\ =\ \int\limits_{\varepsilon}^{1}\Phi(q(r))\ r^{n-1}dr\tag{1.32}$$

$$\leq\ \int\limits_{\varepsilon}^{1}\left(⨍_{S(r)}\Phi(Q(x))\ d\mathcal{A}\right)\ r^{n-1}dr\ \leq\frac{\Omega_n}{\omega_{n-1}}\cdot M(\varepsilon)=\frac{1}{n}\cdot M(\varepsilon)\,,$$

где мы используем среднее значение функции $\Phi\circ Q$ на сфере $S(r)=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|=r\}$ относительно меры площади. Как обычно, $\Omega_n$ и $\omega_{n-1}$ здесь

– объём единичного шара и площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, соответственно. Тогда, рассуждая от противного, легко видеть, что

$$|T| \;=\; \int\limits_T ds \;\le\; \frac{1}{n} \tag{1.33}$$

где $T \;=\; \{\, s\in(0,\log\frac{1}{\varepsilon}):\quad h(e^{-s})\; > M(\varepsilon)\}$. Следующим шагом покажем, что

$$q^{\frac{1}{p}}\left(e^{-s}\right)\;\le\; H_p^{-1}\left(ns\;+\;\log\;M(\varepsilon)\right) \qquad \forall\; s\in\left(0,\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\setminus T_*\,, \tag{1.34}$$

где $T_* \;:=\; T\cap S_*$. Заметим, что $\left(0,\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\setminus T_* \;=\; \left[\left(0,\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\setminus S_*\right]\cup \left[\left(0,\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\setminus T\right] = \left[\left(0,\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\setminus S_*\right]\cup[S_*\setminus T]$. Неравенство (1.34) имеет место для $s\in S_*\setminus T$ по (1.31), поскольку функция $H_p^{-1}$ – неубывающая. Заметим также, что

$$e^{ns}M(\varepsilon) > \Phi(0)=\tau_0 \qquad \forall\; s\in\left(0,\;\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\,, \tag{1.35}$$

а тогда

$$t_* < \Phi_p^{-1}\left(e^{ns}M(\varepsilon)\right) = H_p^{-1}\left(ns\;+\;\log\;M(\varepsilon)\right) \qquad \forall\; s\in\left(0,\;\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\,. \tag{1.36}$$

Следовательно, (1.34) имеет место также для $s\in(0,\log\frac{1}{\varepsilon})\setminus S_*$.

Поскольку функция $H_p^{-1}$ не убывает, ввиду (1.33) и (1.34), получаем, что

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dr}{rq^{\frac{1}{p}}(r)} \;=\; \int\limits_{0}^{\log\frac{1}{\varepsilon}}\frac{ds}{q^{\frac{1}{p}}(e^{-s})} \;\ge\; \int\limits_{\left(0,\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\setminus T_*}\frac{ds}{H_p^{-1}(ns+\Delta)} \;\ge \tag{1.37}$$

$$\ge\; \int\limits_{|T_*|}^{\log\frac{1}{\varepsilon}}\frac{ds}{H_p^{-1}(ns+\Delta)} \;\ge\; \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\log\frac{1}{\varepsilon}}\frac{ds}{H_p^{-1}(ns+\Delta)} \;=\; \frac{1}{n}\int\limits_{1+\Delta}^{n\log\frac{1}{\varepsilon}+\Delta}\frac{d\eta}{H_p^{-1}(\eta)}\,,$$

где $\Delta=\log M(\varepsilon)$. Заметим, что $1+\Delta=\log\;eM(\varepsilon)$. Таким образом,

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dr}{rq^{\frac{1}{p}}(r)} \;\ge\; \frac{1}{n}\int\limits_{\log eM(\varepsilon)}^{\log\frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^n}}\frac{d\eta}{H_p^{-1}(\eta)}\,, \tag{1.38}$$

и, после замены переменной $\eta = \log\,\tau$, получаем (1.29), а потому и (1.28). $\Box$

**Следствие 1.4.** *Пусть $\Phi : [0,\infty] \to (0,\infty]$ – неубывающая выпуклая функция, $Q : \mathbb{B}^n \to [0,\infty]$ – измеримая по Лебегу функция, $Q_*(x) = 1$ при $Q(x) < 1$ и $Q_*(x) = Q(x)$ при $Q(x) \geq 1$. Предположим, что среднее значение $M_*(\varepsilon)$ функции $\Phi \circ Q_*$ над кольцом $\mathbb{R}^n(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0,1)$, конечно. Тогда*

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dr}{rq^{\frac{\lambda}{p}}(r)} \ \geq\ \frac{1}{n} \int\limits_{eM_*(\varepsilon)}^{\frac{M_*(\varepsilon)}{\varepsilon^n}} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{p}}} \qquad \forall\ \lambda\ \in\ (0,1), \qquad p \in (0,\infty)\,, \tag{1.39}$$

*где $q(r)$ – среднее интегральное значение функции $Q(x)$ на сфере $|x| = r$.*

Действительно, пусть $q_*(r)$ – среднее интегральное значение функции $Q_*(x)$ на сфере $|x| = r$. Тогда $q(r) \leq q_*(r)$ и, кроме того, $q_*(r) \geq 1$ для всех $r \in (0,1)$. Таким образом, $q^{\frac{\lambda}{p}}(r) \leq q_*^{\frac{\lambda}{p}}(r) \leq q_*^{\frac{1}{p}}(r)$ для всех $\lambda \in (0,1)$ и по лемме 1.3, применённой к функции $Q_*(x)$, получаем (1.39).

**Теорема 1.1.** *Пусть $Q : \mathbb{B}^n \to [0,\infty]$ – измеримая функция, такая что*

$$\int\limits_{\mathbb{B}^n} \Phi(Q(x))\ dm(x)\ <\ \infty\,, \tag{1.40}$$

*где $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ – неубывающая выпуклая функция, такая что*

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{p}}}\ =\ \infty\,, \qquad p \in (0,\infty)\,, \tag{1.41}$$

*при некотором $\delta_0\ >\ \tau_0\ :\ =\ \Phi(0)$. Тогда*

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dr}{rq^{\frac{1}{p}}(r)}\ =\ \infty\,, \tag{1.42}$$

*где $q(r)$ – среднее интегральное значение функции $Q(x)$ на сфере $|x| = r$.*

**Доказательство.** Если $\Phi(0) \neq 0$, то теорема 1.1 является прямым следствием леммы 1.3. В случае $\Phi(0) = 0$, фиксируем произвольное число $\delta \in (0,\delta_0)$, и полагаем $\Phi_*(t) = \Phi(t)$, если $\Phi(t) > \delta$, и $\Phi_*(t) = \delta$, если $\Phi(t) \leq \delta$. Тогда по (1.40) имеем $\int\limits_{\mathbb{B}^n} \Phi_*(Q(x))dm(x) < \infty$, поскольку $|\Phi_*(t) - \Phi(t)| \leq$

$\delta$, а мера $\mathbb{B}^n$ конечна. Кроме того, $\Phi_*(\tau) = \Phi^{-1}(\tau)$ при $\tau \geq \delta$, а тогда по (1.41) $\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi_*^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{p}}} = \infty$. Таким образом, (1.42) имеет место снова по лемме 1.3. $\Box$

**Замечание 1.3.** Т.к. $[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{p}} = \Phi_p^{-1}(\tau)$, где $\Phi_p(t) = \Phi(t^p)$, соотношение (1.41) влечёт, что

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\Phi_p^{-1}(\tau)} \ = \ \infty \qquad\qquad \forall\ \delta \ \in \ [0,\infty)\,. \tag{1.43}$$

С другой стороны, соотношение вида (1.43), выполненное при некотором $\delta \in [0,\infty)$, вообще говоря, не влечёт (1.41). Действительно, (1.41), очевидно, влечёт (1.43) для $\delta \in [0,\delta_0)$, а для $\delta \in (\delta_0,\infty)$, имеем, что

$$0 \ \leq \ \int\limits_{\delta_0}^{\delta} \frac{d\tau}{\tau\Phi_p^{-1}(\tau)} \ \leq \ \frac{1}{\Phi_p^{-1}(\delta_0)}\ \log\,\frac{\delta}{\delta_0} \ < \ \infty \tag{1.44}$$

поскольку функция $\Phi_p^{-1}$ не убывает и $\Phi_p^{-1}(\delta_0) > 0$. Кроме того, по определению обратной функции, $\Phi_p^{-1}(\tau) \equiv 0$ для всех $\tau \in [0,\tau_0]$, $\tau_0 = \Phi_p(0)$, следовательно, (1.43) при $\delta \in [0,\tau_0)$, вообще говоря, не влечёт (1.41). Если $\tau_0 > 0$, то

$$\int\limits_{\delta}^{\tau_0} \frac{d\tau}{\tau\Phi_p^{-1}(\tau)} \ = \ \infty \qquad\qquad \forall\ \delta \ \in \ [0,\tau_0) \tag{1.45}$$

Однако, соотношение (1.45) не несёт никакой информации собственно о функции $Q(x)$ и, следовательно, (1.43) при $\delta < \Phi(0)$ вообще не может влечь (1.42).

В силу соотношения (1.43), доказательство теоремы 1.1 сводится к лемме 1.3.

**Следствие 1.5.** *Если $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ неубывающая выпуклая функция, а $Q$ удовлетворяет условию (1.40), то каждое из условий (1.21)–(1.26) при $p \in (0,\infty)$ влечёт (1.42).*

*Если, кроме того, $\Phi(1) < \infty$ либо $q(r) \geq 1$ на подмножестве интервала $(0,1)$, имеющем положительную меру, каждое из условий (1.21)–(1.26) при $p \in (0,\infty)$ влечёт, что*

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dr}{rq^{\frac{\lambda}{p}}(r)} \ = \ \infty \qquad\qquad \forall\ \lambda \ \in \ (0,1)\,, \tag{1.46}$$

*а также*

$$\int\limits_0^1 \frac{dr}{r^{\alpha}q^{\frac{\beta}{p}}(r)} = \infty \qquad \forall\, \alpha \geq 1,\ \beta \in (0,\alpha]\,. \tag{1.47}$$

## 1.4. Сходимость общих гомеоморфизмов

Начнём с простого следствия из теоремы Брауэра об инвариантности областей в расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}^n}$, которое топологически эквивалентно единичной сфере $\mathbb{S}^n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$. В дальнейшем $B^*(x_0,\rho)$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$, $\rho \in (0,1)$, обозначает шар $\{x \in \overline{\mathbb{R}^n} : h(x,x_0) < \rho\}$ относительно сферической метрики.

**Следствие 1.6.** *Пусть $U$ – открытое множество в $\overline{\mathbb{R}^n}$ и $f : U \to \to \overline{\mathbb{R}^n}$ – непрерывное инъективное отображение. Тогда $f$ – гомеоморфизм множества $U$ на множество $V = f(U)$.*

**Доказательство.** Пусть $y_0$ - произвольная точка в $f(U)$, $x_0 := f^{-1}(y_0)$ и $B = B^*(x_0,\varepsilon_0)$, где $0 < \varepsilon_0 < h(x_0,\partial U)$. Тогда $\overline{B}$ - компакт в $U$ и $f_0 := f|_{\overline{B}}$ отображает этот компакт инъективно и непрерывно в хаусдорфово топологическое пространство $\overline{\mathbb{R}^n}$. Следовательно, $f_0$ является гомеоморфизмом $\overline{B}$ на $f(\overline{B})$ относительно индуцированных топологий (см. теорему 41.III.3 в [47]). Поэтому $f_* := f|_B$ - также гомеоморфизм $B$ на $f(B)$ относительно индуцированных топологий. Однако, тогда $f(B)$ - открытое множество в $\overline{\mathbb{R}^n}$ по теореме Брауэра (см. теорему 4.7.16 в [100]). Поскольку указанные множества $B$ образуют базу топологии в $U$, то и любое открытое подмножество $U$ переходит в открытое множество в $\overline{\mathbb{R}^n}$. Таким образом, $f : U \to \overline{\mathbb{R}^n}$ гомеоморфизм $U$ на $V$. $\Box$

**Ядром последовательности открытых множеств** $\Omega_l \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, $l = = 1,2,\ldots$, называется открытое множество

$$\Omega_0 = \mathrm{Kern}\ \Omega_l\ :\ = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\ \mathrm{Int}\left(\bigcap\limits_{l=m}^{\infty}\ \Omega_l\right),$$

где $\mathrm{Int}\,A$ обозначает множество, состоящее из всех внутренних точек $A$; другими словами, $\mathrm{Int}\,A$ есть объединение всех открытых шаров внутри $A$ относительно сферической метрики.

Следующее предложение для случая плоскости было доказано в работе [139], см. также предложение 2.7 в монографии [188].

**Предложение 1.5.** *Пусть $g_l : D \to D_l'$, $D_l' := g_l(D)$, – последовательность гомеоморфизмов, заданных в области $D \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$. Предположим, что последовательность $g_l$ сходится локально равномерно при $l \to \infty$ к инъективному отображению $g : D \to D' := g(D) \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ относительно сферической метрики. Тогда отображение $g$ является гомеоморфизмом и, кроме того, $D' \subset \operatorname{Kern} D_l'$.*

**Доказательство.** Заметим, прежде всего, что отображение $g$ непрерывно как локально равномерный предел непрерывных отображений, см. теорему 13.VI.3 в [46]. Тогда $g$ является гомеоморфизмом по следствию 1.6.

Пусть $y_0 \in D'$. Рассмотрим сферический шар $B^*(z_0, \rho)$, где $z_0 := g^{-1}(y_0) \in D$ и $\rho < h(z_0, \partial D)$. Тогда, ввиду компактности сферы $\partial B^*(z_0, \rho)$,

$$r_0 : = \min_{z \in \partial B^*(z_0,\rho)} h(y_0, g(z)) > 0\,.$$

Далее, найдётся достаточно большое целое число $N$ такое, что $g_l(z_0) \in$ $\in B^*(y_0, r_0/2)$ для всех $l \geqslant N$ и, кроме того,

$$B^*(y_0, r_0/2) \cap g_l(\partial B^*(z_0, \rho)) = B^*(y_0, r_0/2) \cap \partial g_l(B^*(z_0, \rho)) = \varnothing,$$

поскольку $g_l \to g$ на компактном множестве $\partial B^*(z_0, \rho)$. Следовательно, в силу связности шаров,

$$B^*(y_0, r_0/2) \subset g_l(B^*(z_0, \rho)) \qquad \forall\, l \geqslant N\,,$$

см., напр., теорему 46.I.1 в [47]. Следовательно, $y_0 \in \operatorname{Kern} D_l'$, т.е., $D' \subset$ $\subset \operatorname{Kern} D_l'$ в силу произвольности $y_0$. □

**Замечание 1.4.** В частности, из предложения 1.5 следует, что $D' :=$ $= g(D) \subseteq \mathbb{R}^n$, если $D_l' := g_l(D) \subseteq \mathbb{R}^n$ при всех $l = 1, 2, \ldots$.

Следующее утверждение для плоского случая может быть найдено в работе [220], см. также лемму 2.16 в монографии [188].

**Лемма 1.4.** *Пусть $D$ – область в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $l = 1, 2, \ldots$, и пусть $f_l$ – последовательность гомеоморфизмов $D$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ такая, что $f_l$ сходится при $l \to \infty$ локально равномерно к гомеоморфизму $f$ из $D$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ относительно сферической метрики. Тогда также $f_l^{-1} \to f^{-1}$ локально равномерно в области $f(D)$.*

**Доказательство.** В силу предложения 1.5, для фиксированного компакта $C \subset f(D)$, имеем, что $C \subset f_l(D)$ для всех $l \geqslant l_0 = l_0(C)$.

Полагаем $g_l = f_l^{-1}$, $g = f^{-1}$. Заметим, что локально равномерная сходимость $g_l \to g$ эквивалентна так называемой непрерывной сходимости, означающей, что $g_l(u_l) \to g(u_0)$ для каждой сходящейся последовательности $u_l \to u_0$ в $f(D)$; см., напр., теоремы 20.VIII.2 и 21.X.4 в [46]. Итак, пусть $u_l \in f(D)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ и $u_l \to u_0$ при $l \to \infty$. Покажем, что $z_l := g(u_l) \to z_0 := g(u_0)$ при $l \to \infty$.

Хорошо известно, что каждое метрическое пространство является $\mathcal{L}^*$-пространством, т.е., пространством со сходимостью (см. теорему 21.II.1 в [46]); в частности, аксиома Урысона в компактных пространствах утверждает, что $z_l \to z_0$ при $l \to \infty$ тогда и только тогда, когда для каждой сходящейся подпоследовательности $z_{l_k} \to z_*$ имеет место равенство $z_* = z_0$ (см., напр., определение 20.I.3 в [46]). Следовательно, достаточно доказать равенство $z_* = z_0$ для каждой сходящейся подпоследовательности $z_{l_k} \to z_*$ при $k \to \infty$. Пусть $D_0$ – подобласть области $D$ такая, что $z_0 \in D_0$ и $\overline{D_0}$ – компактное подмножество $D$. По предложению 1.5, $f(D_0) \subset \mathrm{Kern} f_l(D_0)$ и, следовательно, $u_0$ вместе с некоторой своей окрестностью принадлежит $f_{l_k}(D_0)$ при всех $k \geqslant K$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $u_{l_k} \in f_{l_k}(D_0)$, т.е., $z_{l_k} \in D_0$ при всех $k = 1, 2, \ldots$ и, следовательно, $z_* \in D$. В силу непрерывной сходимости $f_l \to f$, мы получим, что $f_{l_k}(z_{l_k}) \to f(z_*)$, т.е. $f_{l_k}(g_{l_k}(u_{l_k})) = u_{l_k} \to f(z_*)$. Из последнего соотношения вытекает, что $u_0 = f(z_*)$, т.е., $f(z_0) = f(z_*)$ и, значит, $z_* = z_0$. Доказательство завершено. $\Box$

Следующее утверждение на плоскости было доказано в работе [292], см. предложение 2.6 в монографии [188].

**Теорема 1.2.** *Пусть $D$ – область в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, $f_m$, $m = 1, 2, \ldots$, – последовательность гомеоморфизмов $D$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$, сходящаяся локально равномерно к дискретному отображению $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ относительно сферической метрики. Тогда $f$ – гомеоморфизм $D$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$.*

**Доказательство.** Прежде всего, докажем от противного, что $f$ – инъективно. Действительно, предположим, что существуют $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$, такие что $f(x_1) = f(x_2)$ и $x_1 \neq \infty$. Полагаем $B_t = B(x_1, t)$. Пусть $t_0$ – некоторое число, такое что $\overline{B_t} \subset D$ и $x_2 \notin \overline{B_t}$ при каждом $t \in (0, t_0]$. По теореме Жордана–Брауэра, см. теорему 4.8.15 в [100], $\gamma_m :=$ $= f_m(\partial B_t) = \partial f_m(B_t)$ разбивает $\overline{\mathbb{R}^n}$ на две компоненты:

$$C_m := f_m(B_t), \qquad C_m^* = \overline{\mathbb{R}^n} \setminus \overline{C_m}\ ,$$

для которых $\gamma_m$ является общей границей. По построению $y_m := f_m(x_1) \in$ $\in C_m$ и $z_m := f_m(x_2) \in C_m^*$. Заметим, что шар $B^*(y_m, h(y_m, \partial C_m))$ содержится внутри множества $C_m$ и, следовательно, его замыкание лежит в $\overline{C_m}$. Следовательно,

$$h(y_m, \partial C_m) < h(y_m, z_m), \qquad m = 1, 2, \ldots . \tag{1.48}$$

В силу компактности множества $\partial C_m = f_m(\partial B_t)$, найдётся последовательность $x_{m,t} \in \partial B_t$ такая, что

$$h(y_m, \partial C_m) = h(y_m, f_m(x_{m,t}))\,, \qquad m = 1, 2, \ldots . \tag{1.49}$$

В силу компактности множества $\partial B_t$, для каждого $t \in (0, t_0]$ найдётся элемент $x_t \in \partial B_t$ такой, что $h(x_{m_k,t}, x_t) \to 0$ при $k \to \infty$ для некоторой подпоследовательности $m_k$. Поскольку локально равномерная сходимость непрерывных функций в метрическом пространстве влечёт непрерывную сходимость,см., напр., теорему 21.X.3 в [46]), получаем, что

$$h(f_{m_k}(x_{m_k,t}), f(x_t)) \to 0$$

при $k \to \infty$. Следовательно, из (1.48) и (1.49) имеем, что

$$h(f(x_1), f(x_t)) \leqslant h(f(x_1), f(x_2)) \qquad \forall\, t \in (0, t_0]\,.$$

Однако, по предположению $f(x_1) = f(x_2)$ и, следовательно, $f(x_t) = f(x_1)$ для каждого $t \in (0, t_0]$. Последнее соотношение противоречит дискретности отображения $f$. Следовательно, отображение $f$ инъективно.

Осталось доказать, что отображения $f$ и $f^{-1}$ непрерывны. Отображение $f$ непрерывно как локально равномерный предел непрерывных отображений, см., напр., теорему 13.VI.3 в [46]. Наконец, отображение $f^{-1}$ непрерывно ввиду следствия 1.6. $\Box$

## 1.5. Сходимость гомеоморфизмов с модульными условиями

Следующая лемма играет значительную роль в дальнейших исследованиях. Её плоский аналог был доказан в работе [142], см. также приложение A1 в монографии [188].

**Лемма 1.5.** *Пусть $f_m$, $m = 1, 2, \ldots$, – последовательность гомеоморфизмов области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, сходящаяся к отображению $f$ равномерно на каждом компактном множестве $D$ относительно сферической метрики в $\overline{\mathbb{R}^n}$. Предположим, что для каждого $x_0 \in D$ найдутся последовательности $R_k > 0$ и $r_k \in (0, R_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, такие* *что* $R_k \to 0$ *при* $k \to \infty$ *и* $\mathrm{mod}\, f_m\,(A\,(x_0, r_k, R_k)) \to \infty$ *при* $k \to \infty$ *равномерно по* $m = 1, 2, \ldots$. *Тогда отображение* $f$ *– либо постоянная в* $\overline{\mathbb{R}^n}$, *либо гомеоморфизм области* $D$ *в* $\mathbb{R}^n$.

**Доказательство.** Предположим, что отображение $f$ непостоянно в $D$. Рассмотрим открытое множество $V$, состоящее из всех точек области $D$, имеющих окрестность, в которой $f$ не является постоянной и покажем, что $f(x) \neq f(x_0)$ для каждого $x_0 \in D \setminus V$ и $x \neq x_0$. Без ограничения общности, можно считать, что $f(x_0) \neq \infty$. Зафиксируем точку $x_* \neq x_0$ в $D \setminus V$ и выберем $k = 1, 2, \ldots$ так, что $R := R_k < |x_* - x_0|$ и

$$\mathrm{mod}\, f_m\,(A(x_0, r, R)) > (\omega_{n-1}/\tau_n(1))^{1/(n-1)} \tag{1.50}$$

при $r = r_k$, где $\tau_n(s)$ обозначает ёмкость кольца Тейхмюллера

$$R_{T,n}(s) := [\mathbb{R}^n \setminus \{te_1 : t \geqslant s\},\ [-e_1, 0]]\ , \quad s \in (0, \infty)\,.$$

Пусть $c_m \in f_m(S(x_0, R))$ и $b_m \in f_m(S(x_0, r))$ таковы, что

$$\min_{w \in f_m(S(x_0,R))} |w - f_m(x_0)| = |c_m - f_m(x_0)|\,,$$

$$\max_{w \in f_m(S(x_0,r))} |w - f_m(x_0)| = |b_m - f_m(x_0)|\,.$$

Поскольку $f_m$ – гомеоморфизм, то множество $f_m(A(x_0, r, R))$ является кольцевой областью $\mathfrak{R}_m = (C_m^1, C_m^2)$, где $a_m := f_m(x_0)$ и $b_m \in C_m^1$, $c_m$ и $\infty \in C_m^2$. Применяя лемму 7.34 в [323] при $a = a_m$, $b = b_m$ и $c = c_m$, получаем, что

$$\mathrm{cap}\, \mathfrak{R}_m = M(\Gamma(C_m^1, C_m^2)) \geqslant \tau_n \left(\frac{|a_m - c_m|}{|a_m - b_m|}\right)\,. \tag{1.51}$$

Заметим, что функция $\tau_n(s)$ является строго убывающей (см. лемму 7.20 в [323]). Следовательно, из (1.50) и (1.51) вытекает, что

$$\frac{|a_m - c_m|}{|a_m - b_m|} \geqslant \tau_n^{-1}\,(\mathrm{cap}\, \mathfrak{R}_m) > \tau_n^{-1}(\tau_n(1)) = 1\,.$$

Следовательно, найдётся сферическое кольцо

$$A_m = \{y \in \mathbb{R}^n : \rho_m < |y - f_m(x_0)| < \rho_m^*\}\ ,$$

лежащее в кольцевой области $\mathfrak{R}_m$ для каждого $m = 1, 2, \ldots$. Поскольку $f$ не является локально постоянным в точке $x_0$, найдётся точка $x'$, лежащая в шаре $|x - x_0| < r$, такая что $f(x_0) \neq f(x')$. Кольцо $A_m$ отделяет точки $f_m(x_0)$ и $f_m(x')$ от $f_m(x_*)$ и, следовательно, $|f_m(x')-f_m(x_0)|\leqslant\rho_m$ и $|f_m(x_*)-f_m(x_0)|\geqslant\rho_m^*$. Значит, $|f_m(x')-f_m(x_0)|\leqslant|f_m(x_*)-f_m(x_0)|$ при всех $m=1,2,\ldots$ . При $m\to\infty$ имеем тогда, что $0<|f(x')-f(x_0)|\leqslant$ $\leqslant|f(x_*)-f(x_0)|$ и, следовательно, $f(x_*)\neq f(x_0)$.

Осталось показать, что множество $V$ пусто. Предположим, что $V$ имеет непустую компоненту $V_0$. Тогда $f(x)\equiv z$ для каждого $x\in V_0$ и некоторого $z\in\overline{\mathbb{R}^n}$. Заметим, что $\partial V_0\cap D\neq\varnothing$ ввиду связности $D$, поскольку $f\not\equiv\mathrm{const}$ в $D$ и множество $D\setminus\overline{V_0}$ также является открытым. Если $x_0\in\partial V_0\cap D$, то $f(x_0)=z$ по непрерывности $f$, что противоречит первой части доказательства, поскольку $x_0\in D\setminus V$.

Итак, нами показано, что отображение $f$ инъективно в том случае, когда $f$ непостоянно в $D$. Однако, $f$ непрерывно как локально равномерный предел отображений $f_m$, см. теорему 13.VI.3 в [46]. Тогда $f$ является гомеоморфизмом по следствию 1.6. Наконец, $f(D)\subseteq\mathbb{R}^n$ по замечанию 1.4 и, таким образом, доказательство завершено. □

**Лемма 1.6.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, $Q_m:D\to(0,\infty)$ измеримые по Лебегу функции, $f_m$, $m=1,2,\ldots,$ – последовательность кольцевых $Q_m$–гомеоморфизмов области $D$ в $\mathbb{R}^n$, сходящаяся локально равномерно к отображению $f$. Предположим, что*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q_m(x)\cdot\psi^n(|x-x_0|)\ dm(x)=o(I^n(\varepsilon,\varepsilon_0))\quad\forall\ x_0\in D \tag{1.52}$$

*где $o(I^n(\varepsilon,\varepsilon_0))/I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ равномерно относительно $m$ для $\varepsilon_0<\mathrm{dist}\,(x_0,\partial D)$ и некоторой измеримой функции $\psi(t):(0,\varepsilon_0)\to[0,\infty]$, такой что*

$$0<I(\varepsilon,\varepsilon_0):=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\ dt<\infty\quad\forall\,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)\ . \tag{1.53}$$

*Тогда отображение $f$ является либо константой в $\overline{\mathbb{R}^n}$, либо гомеоморфизмом в $\mathbb{R}^n$.*

**Замечание 1.5.** В частности, заключение леммы 1.6 имеет место для $Q$-гомеоморфизмов $f_m$ с измеримой функцией $Q:D\to(0,\infty)$, такой что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x-x_0|)\ dm(x)=o(I^n(\varepsilon,\varepsilon_0))\qquad\forall\ x_0\in D\ . \tag{1.54}$$

**Доказательство.** Согласно теореме Лузина, найдётся борелевская функция $\psi_*(t)$ такая что $\psi(t) = \psi_*(t)$ при почти всех $t \in (0, \varepsilon_0)$, см., напр., разд. 2.3.6 в [108]. Поскольку $Q_m(x) > 0$ при всех $x \in D$, из (1.54) имеем что $I(\varepsilon, a) \to \infty$ при всяком фиксированном $a \in (0, \varepsilon_0)$ и, в частности, $I(\varepsilon, a) > 0$ для всякого $\varepsilon \in (0, b)$ и некоторого $b = b(a) \in (0, \varepsilon_0)$. Для заданного $x_0 \in D$ и последовательности чисел $b$, $b = \varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, $k = 1, 2, \ldots$, рассмотрим последовательность борелевских функций $\rho_{\varepsilon,k}$, определённых по правилу

$$\rho_{\varepsilon,k}(x) = \begin{cases} \psi_*(|x - x_0|)/I(\varepsilon, \varepsilon_k), & \varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_k, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Заметим, что функция $\rho_{\varepsilon,k}(x)$ допустима для семейств кривых

$$\Gamma_{\varepsilon,k} := \Gamma(S(x_0, \varepsilon), S(x_0, \varepsilon_k), A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_k)),$$

поскольку

$$\int\limits_{\gamma} \rho_{\varepsilon,k}(x)|dx| \geq \frac{1}{I(\varepsilon, \varepsilon_k)} \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_k} \psi(t)dt = 1$$

для всех (локально спрямляемых) кривых $\gamma \in \Gamma_{\varepsilon,k}$ (см. теорему 5.7 в [320]). По определению кольцевых $Q$–гомеоморфизмов

$$M(f_m(\Gamma_{\varepsilon,k})) \quad \leq \quad \frac{1}{I^n(\varepsilon, \varepsilon_k)} \int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x - x_0|)\, dm(x) \qquad (1.55)$$

для всех $m \in \mathbb{N}$. Заметим, что $\frac{1}{I^n(\varepsilon,\varepsilon_k)} = \alpha_{\varepsilon,k} \cdot \frac{1}{I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)}$, где $\alpha_{\varepsilon,k} := \left(1 + \frac{I(\varepsilon_k,\varepsilon_0)}{I(\varepsilon,\varepsilon_k)}\right)^n$ – ограниченная величина при $\varepsilon \to 0$. Тогда из (1.54) и (1.55) вытекает, что существует последовательность $\varepsilon_k^* \in (0, \varepsilon_k)$, такая что

$$M(f_m(\Gamma_{\varepsilon_k^*,k})) \quad \leq \quad \frac{1}{2^k} \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, применяя лемму 1.5, получаем заключение леммы 1.6.$\Box$

Следующие важные результаты следуют непосредственно из леммы 1.6.

**Теорема 1.3.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $Q : D \to (0, \infty)$ – измеримая функция и $f_m$, $m = 1, 2, \ldots,$ – последовательность кольцевых $Q$-гомеоморфизмов области $D$ в $\mathbb{R}^n$, сходящаяся локально равномерно к* *отображению $f$. Предположим, что $Q \in$ FMO. Тогда отображение $f$ является либо постоянным в $\overline{\mathbb{R}^n}$, либо гомеоморфизмом в $\mathbb{R}^n$.*

**Доказательство.** Действительно, пусть $x_0 \in D$. Не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что $x_0 = 0 \in D$. Выбирая положительное число
$$\varepsilon_0 < \min\left\{\operatorname{dist}(0, \partial D)\,,\, e^{-1}\right\}\,,$$
по лемме 1.2 с функцией $\psi(t) = \frac{1}{t\,\log\frac{1}{t}}$, имеем, что
$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x|)\,dm(x) = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\,.$$
Заметим, что $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt = \log\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}$. Нужное заключение получаем теперь прямо из леммы 1.6. $\square$

Следующие заключения могут быть получены на основе теоремы 1.3, предложения 1.3 и следствия 1.1.

**Следствие 1.7.** *В частности, предельное отображение $f$ является постоянным в $\overline{\mathbb{R}^n}$, либо гомеоморфизмом области $D$ в $\mathbb{R}^n$, если*
$$\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\ \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\,dm(x) < \infty \qquad \forall\ x_0 \in D\,,$$
*либо если каждая точка $x_0 \in D$ является точкой Лебега функции $Q$.*

**Теорема 1.4.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $Q : D \to (0, \infty)$ – измеримая функция, такая что при некотором $\varepsilon(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$*
$$\int\limits_0^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} = \infty \qquad \forall\, x_0 \in D\,, \tag{1.56}$$
*где $q_{x_0}(r)$ обозначает среднее значение функции $Q(x)$ над сферой $|x - x_0| = r$. Предположим, что $f_m$, $m = 1, 2, \ldots$, – последовательность кольцевых $Q$-гомеоморфизмов области $D$ в $\mathbb{R}^n$, сходящаяся локально равномерно к отображению $f$. Тогда $f$ либо постоянно в $\overline{\mathbb{R}^n}$, либо является гомеоморфизмом в $\mathbb{R}^n$.*

**Доказательство.** Зафиксируем $x_0 \in D$ и положим $I = I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где
$$\psi(t) \quad = \quad \left\{\begin{array}{rl} 1/[tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)]\,, & t \in (\varepsilon, \varepsilon_0)\,, \\ 0\,, & t \notin (\varepsilon, \varepsilon_0)\,. \end{array}\right.$$

Заметим, что $I(\varepsilon,\varepsilon_0)<\infty$ для каждого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. Действительно, по теореме 3.15 в [86] (критерий кольцевых $Q$-гомеоморфизмов), получаем, что
$$M(f(\Gamma(S(x_0,\varepsilon),S(x_0,\varepsilon_0),A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0))))\leqslant\frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}}\,. \tag{1.57}$$
С другой стороны, по лемме 1.15 в [261] имеем, что
$$M(\Gamma(f(S(x_0,\varepsilon)),f(S(x_0,\varepsilon_0)),f(A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)))>0\,.$$
Тогда из (1.57) следует, что $I<\infty$ для каждого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. В силу (1.56) видим, что $I(\varepsilon,\varepsilon_*)>0$ для всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_*)$ и некоторого $\varepsilon_*\in(0,\varepsilon_0)$. Элементарные вычисления показывают, что имеет место соотношение (1.54), поскольку
$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_*} Q(x)\cdot\psi^n(|x-x_0|)\;dm(x)\;=\;\omega_{n-1}\cdot I(\varepsilon,\varepsilon_*)$$
и $I(\varepsilon,\varepsilon_*)=o\left(I^n(\varepsilon,\varepsilon_*)\right)$ ввиду (1.56). Всё остальное следует теперь из леммы 1.6. □

**Следствие 1.8.** *В частности, заключение теоремы 1.4 справедливо, если*
$$q_{x_0}(r)=O\left(\log^{n-1}\frac{1}{r}\right)\qquad\forall\,x_0\in D\,.$$

**Следствие 1.9.** *В условиях теоремы 1.4 отображение $f$ является постоянным в $\overline{\mathbb{R}^n}$, либо гомеоморфизмом в $\mathbb{R}^n$ при условии, что функция $Q$ имеет лишь логарифмические особенности порядка не выше, чем $n-1$ в каждой точке $x_0\in D$.*

**Теорема 1.5.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, и $Q:D\to(0,\infty)$ – измеримая функция такая, что*
$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0}\frac{Q(x)}{|x-x_0|^n}\,dm(x)=o\left(\log^n\frac{1}{\varepsilon}\right)\qquad\forall\;x_0\in D \tag{1.58}$$
*при $\varepsilon\to 0$ и некотором положительном $\varepsilon_0=\varepsilon(x_0)<\operatorname{dist}(x_0,\partial D)$. Предположим, что $f_m$, $m=1,2,\ldots,$ – последовательность кольцевых $Q$-гомеоморфизмов области $D$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$, сходящаяся локально равномерно к отображению $f$. Тогда предельное отображение $f$ является либо постоянным в $\overline{\mathbb{R}^n}$, либо гомеоморфизмом области $D$ в $\mathbb{R}^n$.*

**Доказательство.** Нужное заключение следует из леммы 1.6 при соответствующем выборе функции $\psi(t) = \frac{1}{t}$. $\square$

**Теорема 1.6.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $Q : D \to (0, \infty)$ – измеримая функция и $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ – неубывающая выпуклая функция, такая что*

$$\int\limits_D \Phi\left(Q(x)\right) \frac{dm(x)}{\left(1 + |x|^2\right)^n} < \infty \tag{1.59}$$

*и при некотором $\delta > \Phi(0)$*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} \; = \; \infty\,. \tag{1.60}$$

*Предположим, что $f_m$, $m = 1, 2, \ldots,$ – последовательность кольцевых $Q$-гомеоморфизмов области $D$ в $\mathbb{R}^n$, сходящаяся локально равномерно к отображению $f$. Тогда отображение $f$ является либо постоянной в $\overline{\mathbb{R}^n}$, либо гомеоморфизмом области $D$ в $\mathbb{R}^n$.*

**Доказательство.** Из условий (1.59)–(1.60) и теоремы 3.1 в [87] следует, что интеграл в (1.56) расходится при некотором положительном $\varepsilon(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Всё остальное следует из теоремы 1.4. $\square$

**Замечание 1.6.** Мы можем предполагать в теореме 1.6, что функция $\Phi(t)$ выпукла не на всем отрезке $[0, \infty]$, но только на отрезке $[t_*, \infty]$, где $t_* = \Phi^{-1}(\delta)$. Действительно, любая неубывающая функция $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$, которая выпукла на отрезке $[t_*, \infty]$ может быть заменена на неубывающую выпуклую функцию $\Phi_* : [0, \infty] \to [0, \infty]$ следующим образом. Положим $\Phi_*(t) \equiv 0$ для $t \in [0, t_*]$, $\Phi(t) = \varphi(t)$ для $t \in [t_*, T_*]$ и $\Phi_* \equiv \Phi(t)$ для $t \in [T_*, \infty]$, где $\tau = \varphi(t)$ - прямая линия, проходящая через точку $(0, t_*)$ и касающаяся графика функции $\tau = \Phi(t)$ в точке $(T_*, \Phi(T_*))$, $T_* \in (t_*, \infty)$. По построению, мы имеем, что $\Phi_*(t) \leq \Phi(t)$ для всех $t \in [0, \infty]$ и $\Phi_*(t) = \Phi(t)$ для всех $t \geq T_*$ и, следовательно, условия (1.59) и (1.60) имеют место для $\Phi_*$ при том же $M$ и любого $\delta > 0$.

Более того, по тем же соображениям, достаточно предполагать, что функция $\Phi$ только минорируется неубывающей выпуклой функцией $\Psi$ на отрезке $[T, \infty]$, такой что

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \left[\Psi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} \; = \; \infty \tag{1.61}$$

для некоторых $T \in [0, \infty)$ и $\delta > \Psi(T)$. Заметим, что условие (1.61) может быть записано в терминах функции $\psi(t) = \log \Psi(t)$ :

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty} \psi(t)\ \frac{dt}{t^{n'}}\ =\ \infty \tag{1.62}$$

для некоторого $\Delta > t_0 \in [T, \infty]$, где $t_0 := \sup\limits_{\psi(t)=-\infty} t$, $t_0 = T$, если $\psi(T) > -\infty$, и где $\frac{1}{n'} + \frac{1}{n} = 1$, т.е., $n' = 2$ для $n = 2$, $n'$ - убывающая по $n$ и $n' = n/(n-1) \to 1$ при $n \to \infty$, см. предложение 2.3 in [282]. Ясно, что, если функция $\psi$ - неубывающая и выпуклая, то функция $\Phi = e^{\psi}$ - такая же, но обратное заключение, вообще говоря, неверно. Однако, заключение теоремы 1.6 сохраняется, если $\psi^m(t)$, $t \in [T, \infty]$, выпукла и (1.62) имеет место для $\psi^m$ при некотором $m \in \mathbb{N}$, поскольку $e^{\tau} \ge \tau^m/m!$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

**Следствие 1.10.** *В частности, заключение теоремы 1.6 имеет место, если при некотором* $\alpha > 0$

$$\int\limits_{D} \frac{e^{\alpha Q^{\frac{1}{n-1}}(x)} dm(x)}{\left(1+|x|^2\right)^n} \leqslant M < \infty\ .$$

*То же самое верно для любой функции* $\Phi = e^{\psi}$, *где* $\psi(t)$ *- конечное произведение функции* $\alpha t^{\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta \ge 1/(n-1)$, *и некоторых функций* $[\log(A_1 + t)]^{\alpha_1}$, $[\log\log(A_2 + t)]^{\alpha_2}$, $\ldots$, $\alpha_m \ge -1$, $A_m \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in [T, \infty]$, $\psi(t) \equiv \psi(T)$, $t \in [0, T]$, *для достаточно больших* $T \in (0, \infty)$.

**Замечание 1.7.** Для дальнейших приложений, интегральные условия (1.59) и (1.60) для $Q$ и $\Phi$ могут быть переписаны в других формах, которые более удобны в некоторых случаях. Именно, по (1.18) с $h(t) = t^{\frac{1}{n-1}}$ и $\varphi(t) = \Phi(t^{n-1})$, $\Phi = \varphi \circ h$, пара условий (1.59) и (1.60) эквивалентна следующей паре

$$\int\limits_{D} \varphi\left(Q^{\frac{1}{n-1}}(x)\right) \frac{dm(x)}{\left(1+|x|^2\right)^n}\ \le\ M < \infty \tag{1.63}$$

и

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \varphi^{-1}(\tau)}\ =\ \infty \tag{1.64}$$

для некоторого $\delta > \varphi(0)$. Кроме того, по теореме 2.1 в [291] пара условий (1.63) и (1.81), в свою очередь, эквивалентна паре условий

$$\int\limits_{D} e^{\psi\left(Q^{\frac{1}{n-1}}(x)\right)} \frac{dm(x)}{\left(1+|x|^2\right)^n} \ \leq \ M < \infty \tag{1.65}$$

и

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty} \psi(t)\ \frac{dt}{t^2} \ = \ \infty \tag{1.66}$$

для некоторого $\Delta > t_0$, где $t_0 := \sup\limits_{\psi(t)=-\infty} t$ (как обычно, здесь полагаем $t_0 = 0$, если $\psi(0) > -\infty$).

Наконец, как это следует из леммы 1.6, все результаты секции остаются в силе, если $f_m$ являются $Q_m$-гомеоморфизмами и вышеприведенные условия на $Q$ имеют место для $Q_m$ равномерно относительно параметра $m = 1, 2, \ldots$.

## 1.6. Полнота кольцевых $Q$-гомеоморфизмов

Следующий результат был доказан при $n = 2$ в работе [292], см. там терему 4.1, см. также теорему 6.2 в монографии [188].

**Теорема 1.7.** *Пусть $f_m : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $m = 1, 2, \ldots$, – последовательность кольцевых $Q$-гомеоморфизмов в точке $x_0 \in D$. Предположим, что $f_m$ сходится локально равномерно к гомеоморфизму $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$. Тогда $f$ также является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в точке $x_0$.*

**Доказательство.** Прежде всего, по предложению 1.5 каждая точка $w_0 \in D' = f(D)$ принадлежит области $D'_m = f_m(D)$ для всех $m \geqslant N$ вместе с замкнутым шаром $\overline{B^*(w_0, \varepsilon)}$, $B^*(w_0, \varepsilon) = \{w \in \overline{\mathbb{R}^n} : h(w, w_0) < < \varepsilon\}$, при некотором $\varepsilon > 0$.

Заметим также, что $D' = \bigcup_{l=1}^{\infty} C_l$, где $C_l = \overline{D_l^*}$ и $D_l^*$ – связная компонента открытого множества $\Omega_l = \{w \in D' : h(w, \partial D') > 1/l\}$, $l = 1, 2, \ldots$, включающая фиксированную точку $w_0 \in D'$. Действительно, каждую точку $w \in D'$ можно соединить с $w_0$ кривой $\gamma$, лежащей в $D'$. Поскольку $|\gamma|$ представляет собой компактное множество, будем иметь, что $h(|\gamma|, \partial D') > 0$ и, следовательно, $|\gamma| \subset D_l^*$ для достаточно больших $l = 1, 2, \ldots$.

Пусть $E$ и $F$ – произвольные континуумы в $D$, принадлежащие различным компонентам связности дополнения кольца $A = A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$, $x_0 \in D$, $0 < r_1 < r_2 < r_0 = \mathrm{dist}\,(x_0, \partial D)$. Заметим, что при фиксированном $l \geqslant l_0$ континуумы $f(E)$ и $f(F)$ принадлежат множеству $D_l^*$. Тогда континуумы $f_m(E)$ и $f_m(F)$ также принадлежат множеству $D_l^*$ при достаточно больших $m$. Зафиксируем одно из таких $m$. Хорошо известно, что

$$M(\Gamma(f_m(E), f_m(F), D_l^*)) \to M(\Gamma(f(E), f(F), D_l^*))$$

при $m \to \infty$, см., напр., [171], или теорему А.12 приложения А1 в [252]. Однако, $D_l^* \subset f_m(D)$ для достаточно больших $m$ и, значит,

$$M(\Gamma(f_m(E), f_m(F), D_l^*)) \leqslant M(\Gamma(f_m(E), f_m(F), f_m(D)))\,.$$

Тогда по определению кольцевого $Q$-гомеоморфизма для любой неотрицательной измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, такой что $\int \eta(r)\,dr \geqslant 1$, выполнено условие

$$M(\Gamma(f(E), f(F), D_l^*)) \leqslant \int\limits_A Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|)\,dm(x)\,.$$

Наконец, поскольку $\Gamma = \bigcup\limits_{l=l_0}^{\infty} \Gamma_l$, где $\Gamma = \Gamma(f(E), f(F), f(D))$ и семейство кривых $\Gamma_l = \Gamma(f(E), f(F), D_l^*)$ возрастает по $l = 1, 2, \ldots$, получаем, что $M(\Gamma) = \lim\limits_{l \to \infty} M(\Gamma_l)$ (см., напр., теоремы А.7 и А.25 в [252]). Следовательно,

$$M(\Gamma(f(E), f(F), f(D)) \leqslant \int\limits_A Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|)\,dm(x)\,,$$

другими словами, $f$ – кольцевой $Q$-гомеоморфизм в точке $x_0$. $\Box$

## 1.7. Нормальные семейства кольцевых $Q$-гомеоморфизмов

Прежде всего, напомним основные определения, связанные с нормальными семействами отображений в метрических пространствах.

Пусть $(X, d)$ и $(X', d')$ - метрические пространства с расстоянием $d$ и $d'$, соответственно. Говорят, что последовательность отображений

$f_k : X \to X'$, $k = 1, 2 \ldots$, сходится *локально равномерно* к отображению $f : X \to X'$, если

$$\sup_{x \in C} d'\left(f_k(x)\,, f(x)\right) \to 0$$

при $k \to \infty$ на любом компакте $C \subset X$.

Семейство $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений $f : X \to X'$ называется *нормальным*, если из любой последовательности отображений $f_m \in \mathfrak{F}$ можно выделить подпоследовательность $f_{m_k}$, которая сходится локально равномерно в $X$ к непрерывному отображению $f : X \to X'$. Введенное понятие очень тесно связано со следующим. Семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f : X \to X'$ называется *равностепенно непрерывным в точке* $x_0 \in X$ если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое, что $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всех $f \in \mathfrak{F}$ и для всех $x$ с $d(x, x_0) < \delta$. Говорят, что $\mathfrak{F}$ *равностепенно непрерывно*, если $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно в каждой точке из $X$.

Следующее утверждение представляет собой версию теоремы Арцела–Асколи (см., напр., следствие 7.5 в [252]).

**Предложение 1.6.** *Если $(X, d)$ – сепарабельное, а $(X', d')$ – компактное метрическое пространство, то семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f : X \to X'$ нормально тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно.*

Для заданной области $D$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, измеримой функции $Q : D \to (0, \infty)$ и числа $\Delta > 0$, обозначим символом $\mathfrak{F}_{Q,\Delta}$ класс всех кольцевых $Q$-гомеоморфизмов $f$ из области $D$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ с $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)\right) \geqslant \Delta$.

**Лемма 1.7.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $Q : D \to (0, \infty)$ – измеримая функция и $\Delta > 0$. Если $Q$ удовлетворяет условию (1.54) в каждой точке $x_0 \in D$, то класс $\mathfrak{F}_{Q,\Delta}$ является равностепенно непрерывным и образует нормальное семейство отображений.*

**Доказательство.** По лемме 1.1, для любого $y \in B(x_0, r_0)$ имеем, что

$$h(f(y), f(x_0)) \leqslant \frac{\alpha_n}{\Delta} \exp\left(-\left\{\frac{\omega_{n-1}}{M\left(\Gamma\left(f(S),\, f(S_0), f(D)\right)\right)}\right\}^{\frac{1}{n-1}}\right), \quad (1.67)$$

где $r_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_0\}$, $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = |y - x_0|\}$, $\omega_{n-1}$ – площадь единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, $\alpha_n = 2\lambda_n^2$, $\lambda_n \in [4, 2e^{n-1})$, $\lambda_2 = 4$ и $\lambda_n^{\frac{1}{n}} \to e$ при $n \to \infty$. Можем считать, что $\psi$ – борелевская функция, поскольку в силу п. 2.3.4 и 2.3.6 в [108] найдётся борелевская функция $\psi_*(t)$, такая что $\psi(t) = \psi_*(t)$ при почти всех $t \in (0, \varepsilon_0)$. При фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ рассмотрим борелевскую функцию $\rho_\varepsilon$, определённую по правилу

$$\rho_\varepsilon(x) = \left\{ \begin{array}{rr} \psi_*(|x-x_0|)/I(\varepsilon,\varepsilon_0), & \varepsilon < |x-x_0| < \varepsilon_0, \\ 0, & \text{в остальных точках}\,. \end{array} \right.$$

Заметим, что функция $\rho_\varepsilon(x)$ является допустимой для семейства кривых $\Gamma_\varepsilon := \Gamma(S(x_0,\varepsilon), S(x_0,\varepsilon_0), A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0))$ поскольку

$$\int\limits_{\gamma} \rho_\varepsilon(x)|dx| \geqslant \frac{1}{I(\varepsilon,\varepsilon_0)} \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt = 1$$

для каждой (локально спрямляемой) кривой $\gamma \in \Gamma_\varepsilon$ (см. теорему 5.7 в [320]). Тогда по определению кольцевого $Q$-гомеоморфизма в точке $x_0$ для всех $f \in \mathfrak{F}_{Q,\Delta}$ выполнено неравенство

$$M(f(\Gamma_\varepsilon)) \ \leqslant\ \mathcal{G}(\varepsilon) := \frac{1}{I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)} \int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x-x_0|)\,dm(x)\,. \quad (1.68)$$

Из (1.54) следует, что для любого $\sigma > 0$ найдётся $\delta = \delta(\sigma)$ такое, что $\mathcal{G}(\varepsilon) < \sigma$ для всех $\varepsilon \in (0,\delta)$. Тогда из (1.67) и (1.68) заключаем, что

$$h(f(x), f(x_0)) \ \leqslant\ \frac{\alpha_n}{\Delta}\cdot \exp\left(-\left\{\frac{\omega_{n-1}}{\sigma}\right\}^{\frac{1}{n-1}}\right) \quad (1.69)$$

при $|x-x_0| < \delta$. Ввиду произвольности $\sigma > 0$ равностепенная непрерывность семейства отображений $\mathfrak{F}_{Q,\Delta}$ следует теперь из (1.69). □

**Замечание 1.8.** В частности, заключения леммы 1.7 имеют место, как только выполнено хотя бы одно из условий на функцию $Q$ из теорем 1.3–1.6 и следствий 1.7–1.10, см., напр., статьи [86] и [87].

Кроме того, как это следует из анализа доказательства леммы 1.7, её заключение сохраняет силу для более широких классов отображений $\mathfrak{F}_\Delta$, $\Delta > 0$, состоящих из всех кольцевых $Q$-гомеоморфизмов $f$ области $D$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ с $h\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(D)\right) \geq \Delta$, удовлетворяющих условию (1.54) равномерно относительно переменной функции $Q$, где $\psi$ - некоторая фиксированная функция с условием (1.53). Таким образом, лемма 1.7 также сохраняет силу, если по крайней мере одно из условий на $Q$ в теоремах 1.3–1.6 и следствиях 1.7–1.10 выполняется равномерно относительно переменного функционального параметра $Q$.

Приведем наиболее важное следствие такого рода, см. теорему 4.1 в [87]. Именно, пусть заданы область $D$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, функция $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$, числа $M > 0$ и $\Delta > 0$. Обозначим через $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ семейство всех кольцевых $Q$-гомеоморфизмов из $D$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ с $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)\right) \geq \Delta$ и

$$\int\limits_{D} \Phi\left(Q(x)\right) \frac{dm(x)}{\left(1 + |x|^2\right)^n} \ \leq \ M < \infty\,. \tag{1.70}$$

**Теорема 1.8.** *Пусть $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ – неубывающая выпуклая функция. Если при некотором $\delta > \Phi(0)$*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} \ = \ \infty\ , \tag{1.71}$$

*то класс $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ является равностепенно непрерывным и образует нормальное семейство отображений при любых $M \in (0, \infty)$ и $\Delta \in (0, 1)$.*

**Замечание 1.9.** Заметим, что условие

$$\int\limits_{D} \Phi\left(Q(x)\right) dm(x) \leq M \tag{1.72}$$

влечёт соотношение (1.70). Следовательно, (1.70) является более слабым условием, чем (1.72), а соответствующий класс кольцевых $Q$ – гомеоморфизмов, удовлетворяющих (1.72), представляет собой подкласс семейства $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$. С другой стороны, если область $D$ ограничена, то условие (1.70) влечёт условие

$$\int\limits_{D} \Phi\left(Q(x)\right) dm(x) \leq M_*\,, \tag{1.73}$$

где $M_* = M \cdot \left(1 + \delta_*^2\right)^n$, $\delta_* = \sup\limits_{x \in D} |x|$.

**Следствие 1.11.** *Каждое из условий (1.21) – (1.26) при $p \in (0, n-1]$ влечёт равностепенную непрерывность и нормальность класса $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ для всех $M \in (0, \infty)$ и $\Delta \in (0, 1)$.*

**Замечание 1.10.** Заметим, что условие (1.71), также как и соотношение (1.78), приводимое ниже по тексту, в разделе 1.9, может быть переписано в виде:

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi_{n-1}^{-1}(\tau)} \ = \ \infty\ , \qquad \Phi_{n-1}(t) \ := \ \Phi(t^{n-1})\ . \tag{1.74}$$

При $p = n-1$ условия типа (1.21)–(1.26) являются наиболее слабыми, которые ведут к равностепенной непрерывности и нормальности классов отображений $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$, см. теорему 1.13 в разделе 1.9. Наиболее интересным из этих условий является соотношение (1.23), которое может быть переписано в следующем виде:

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \log \Phi(t) \quad \frac{dt}{t^{n'}} = \infty\,, \tag{1.75}$$

где $\frac{1}{n'} + \frac{1}{n} = 1$, т.е. $n' = 2$ при $n = 2$, $n'$ строго убывает по $n$ и $n' = n/(n-1) \to 1$ при $n \to \infty$.

Наконец, отметим, что все замечания 1.6 и 1.7 также сохраняют силу для результатов нормальности.

### 1.8. Компактность семейств кольцевых $Q$-гомеоморфизмов

Пусть задана область $D$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, измеримая функция $Q : D \to (0, \infty)$ и две пары точек $x_1, x_2 \in D$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$, $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$,. Обозначим символом $\mathfrak{R}_Q$ класс всех кольцевых $Q$-гомеоморфизмов области $D$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, удовлетворяющих условиям нормировки $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$.

Напомним, что семейство отображений называется компактным, если это семейство является нормальным и замкнутым. Объединяя полученные выше результаты о нормальности и замкнутости, получаем следующие результаты о компактности семейств кольцевых $Q$-гомеоморфизмов.

**Теорема 1.9.** *Класс $\mathfrak{R}_Q$ является компактным, если $Q \in FMO$.*

**Следствие 1.12.** *Класс $\mathfrak{R}_Q$ компактен, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \; \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\, dm(x) < \infty \qquad \forall\, x_0 \in D.$$

**Следствие 1.13.** *Класс $\mathfrak{R}_Q$ компактен, если каждая точка $x_0 \in D$ является точкой Лебега функции $Q$.*

**Теорема 1.10.** *Пусть функция $Q$ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{0}^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} = \infty \qquad \forall\; x_0 \in D$$

*при некотором* $\varepsilon(x_0) < \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$, *где* $q_{x_0}(r)$ *обозначает среднее значение функции* $Q(x)$ *над сферой* $|x - x_0| = r$. *Тогда класс* $\mathfrak{R}_Q$ *компактен.*

**Следствие 1.14.** *Класс* $\mathfrak{R}_Q$ *компактен, если функция* $Q(x)$ *имеет лишь логарифмические особенности порядка не выше, чем* $n-1$ *в каждой точке* $x_0 \in D$.

**Теорема 1.11.** *Класс* $\mathfrak{R}_Q$ *компактен, если условие*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)}{|x-x_0|^n}\, dm(x) = o\left(\log^n \frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad \forall\, x_0 \in D$$

*выполнено при* $\varepsilon \to 0$ *для некоторого* $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) < \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$.

**Теорема 1.12.** *Класс* $\mathfrak{R}_Q$ *компактен, если условие*

$$\int\limits_{D} \Phi\left(Q(x)\right) \frac{dm(x)}{\left(1+|x|^2\right)^n} \ \leqslant\ M\ <\ \infty \tag{1.76}$$

*выполнено для неубывающей выпуклой функции* $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ *такой, что*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}}\ =\ \infty \tag{1.77}$$

*при некотором* $\delta > \Phi(0)$.

Заметим, что условие (1.77) является не только достаточным, но и необходимым условием компактности класса $\mathfrak{R}_Q$ с интегральными ограничениями на $Q$ типа (1.76), см. [87].

**Следствие 1.15.** *В частности, заключение теоремы 1.12 имеет место, если при некотором* $\alpha > 0$ *выполнено условие*

$$\int\limits_{D} \frac{e^{\alpha Q^{\frac{1}{n-1}}(x)} dm(x)}{\left(1+|x|^2\right)^n} \leqslant M < \infty\,.$$

Наконец, все замечания 1.6, 1.7 и 1.8 также относятся к результатам компактности данного раздела.

## 1.9. Точность условий сходимости, нормальности, компактности

Напомним, что **внутренней дилатацией** отображения $f$, имеющей все первые частные производные в точке $x$, называется величина

$$K_I(x,f)=\frac{|J_f(x)|}{l\left(f'(x)\right)^n}\,,$$

где $J_f(x)$ - якобиан отображения $f$, $l\left(f'(x)\right)=\min\limits_{h\in\mathbb{R}^n,|h|=1}|f'(x)h|$, если $J_f(x)\neq 0$; $K_I(x,f)=1$, если $f'(x)=0$; $K_I(x,f)=\infty$ в остальных точках.

Для данных функции $\Phi:[0,\infty]\to[0,\infty]$, чисел $M>0$ и $\Delta>0$, обозначим через $\mathcal{S}^{\Phi}_{M,\Delta}$ семейство всех гомеоморфизмов $f$, заданных в области $D$, принадлежащих классу Соболева $W^{1,n}_{loc}$ и имеющих локально интегрируемую внутреннюю дилатацию $K_I(x,f)$, таких что $h\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(D)\right)\geq\Delta$ и для которых выполнено соотношение вида (1.70) при $Q(x):=K_I(x,f)$. Заметим, что если функция $\Phi$ является выпуклой, неубывающей и непостоянной на $[0,\infty)$, условие (1.70) автоматически влечёт, что $K_I(x,f)\in L^1_{loc}$. Заметим также, что $\mathcal{S}^{\Phi}_{M,\Delta}\subset\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$, см., напр., теорему 4.1 в [252]. Таким образом, получаем такое следствие теоремы 1.8.

**Следствие 1.16.** *Каждое из условий (1.21)–(1.26) при* $p\in(0,n-1]$ *влечёт равностепенную непрерывность и нормальность семейства* $\mathcal{S}^{\Phi}_{M,\Delta}$ *для всех* $M\in(0,\infty)$ *и* $\Delta\in(0,1)$.

**Теорема 1.13.** *Если классы отображений* $S^{\Phi}_{M,\Delta}\subset\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ *нормальны для неубывающей выпуклой функции* $\Phi:[0,\infty]\to[0,\infty]$ *при всех* $M\in(0,\infty)$ *и* $\Delta\in(0,1)$, *то*

$$\int\limits_{\delta_*}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}}\;=\;\infty \tag{1.78}$$

для всех $\delta_*\in(\tau_0,\infty)$, где $\tau_0\;:\;=\;\Phi(0)$.

Ясно, что функция $\Phi(t)$ в теореме 1.13 не может быть постоянной, ибо в противном случае, никаких ограничений на $K_I$ в указанной выше теореме не возникает, за исключением условия $\Phi(t)\equiv\infty$, когда классы $S^{\Phi}_{M,\Delta}$ пусты. Более того, согласно известному критерию выпуклости, см., напр., предложение 5 в I.4.3, [11], наклон $\left[\Phi(t)-\Phi(0)\right]/t$ является неубывающей функцией. Поэтому доказательство теоремы 1.13 сводится к следующему утверждению.

**Лемма 1.8.** *Пусть функция* $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ *не убывает и*

$$\Phi(t) \ \geq \ C \cdot t^{\frac{1}{n-1}} \qquad \forall\, t \in [T,\infty] \tag{1.79}$$

*для некоторых* $C > 0$ *и* $T \in (0,\infty)$. *Если классы* $S^{\Phi}_{M,\Delta} \subset \mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ *нормальны при всех* $M \in (0,\infty)$ *и* $\Delta \in (0,1)$, *то (1.78) имеет место для всех* $\delta_* \in (\tau_0,\infty)$, *где* $\tau_0 \ := \ \Phi(+0)$.

**Замечание 1.11.** Хорошо известно, что критический показатель $n-1$ играет ключевую роль во многих проблемах пространственных отображений. Условие (1.79) может быть переписано в виде

$$\Phi_{n-1}(t) \ \geq \ C \cdot t \qquad \forall\, t \in [T,\infty]\,, \tag{1.80}$$

где $\Phi_{n-1}(t) = \Phi(t^{n-1})$ и $C > 0$, $T \in (0,\infty)$, что ещё раз подчёркивает важное значение функции $\Phi_{n-1}$ в данном контексте. Фактически, в теореме 1.13 достаточно потребовать более слабое условие выпуклости $\Phi_{n-1}$ вместо $\Phi$.

**Доказательство леммы 1.8**. Предположим, что соотношение (1.78) не выполнено, т.е.,

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}_{n-1}(\tau)} \ < \ \infty\,, \tag{1.81}$$

для некоторого $\delta_0 \in (\tau_0,\infty)$, где $\Phi_{n-1}(t) \ := \ \Phi(t^{n-1})$ . Тогда также

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}_{n-1}(\tau)} \quad < \quad \infty \qquad \forall \quad \delta \in (\tau_0,\infty) \tag{1.82}$$

поскольку $\Phi^{-1}(\tau) > 0$ для всех $\tau > \tau_0$ и функция $\Phi^{-1}(\tau)$ не убывает. Заметим, что по условию (1.79)

$$\Phi_{n-1}(t) \ \geq \ C \cdot t \qquad \forall\, t \ \geq \ T \tag{1.83}$$

при некоторых $C > 0$ и $T \in (1,\infty)$. Более того, применяя линейное преобразование $\alpha\Phi + \beta$, где $\alpha = 1/C$ и $\beta = T$, см., напр., (1.23), мы можем считать, что

$$\Phi_{n-1}(t) \ \geq \ t \qquad\qquad \forall\, t \in [0,\infty)\ . \tag{1.84}$$

Конечно, мы можем также предполагать, что $\Phi(t) = t$ при всех $t \in [0,1)$, поскольку значения функции $\Phi$ на полуинтервале $[0,1)$ не несут в себе информации относительно $K_I(x,f) \geq 1$ в (1.70). Ясно, что соотношение

(1.82) влечёт условие $\Phi(t) < \infty$ при всех $t < \infty$, см. критерий (1.23), см. также (1.26).

Теперь заметим, что функция $\Psi(t)\colon = t\Phi_{n-1}(t)$ строго возрастает, $\Psi(1) = \Phi(1)$ и $\Psi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Поэтому, функциональное уравнение

$$\Psi(K(r)) \ = \ \left(\frac{\gamma}{r}\right)^2 \qquad\qquad \forall\, r \ \in \ (0,1]\ , \tag{1.85}$$

где $\gamma = \Phi^{1/2}(1) \geq 1$, разрешимо с $K(1) = 1$ и строго возрастающей непрерывной функцией $K(r)$, такой что $K(r) < \infty$, $r \in (0,1]$, и $K(r) \to \infty$ при $r \to 0$. Беря логарифм в (1.85), имеем, что

$$\log\ K(r) \ + \ \log\ \Phi_{n-1}(K(r)) \ = \ 2\ \log\ \frac{\gamma}{r}$$

и ввиду (1.84), получаем, что

$$\log\ K(r) \ \leq \ \log\ \frac{\gamma}{r}\ ,$$

т.е.,

$$K(r) \ \leq \ \frac{\gamma}{r}\ . \tag{1.86}$$

Тогда, в силу (1.85)

$$\Phi_{n-1}(K(r)) \ \geq \ \frac{\gamma}{r}$$

и по (1.19)

$$K(r) \ \geq \ \Phi^{-1}_{n-1}\left(\frac{\gamma}{r}\right)\ . \tag{1.87}$$

Достаточно рассмотреть случай $D = \mathbb{B}^n$. Определим следующие отображения в единичном шаре $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ :

$$f(x) = \frac{x}{|x|}\ \rho(|x|)\ , \qquad f_m(x) = \frac{x}{|x|}\ \rho_m(|x|)\ , \quad m = 1, 2, \ldots\ ,$$

где

$$\rho(t) = \exp\{I(0) - I(t)\}\ , \qquad \rho_m(t) = \exp\{I(0) - I_m(t)\}\ ,$$

$$I(t) = \int\limits_t^1 \frac{dr}{rK(r)}, \qquad I_m(t) = \int\limits_t^1 \frac{dr}{rK_m(r)}$$

и

$$K_m(r) \ = \ \begin{cases} K(r), & \text{if } r \geq 1/m, \\ K\left(\frac{1}{m}\right), & \text{if} \quad r \in (0, 1/m)\ . \end{cases}$$

Из (1.87) получаем:

$$I(0)-I(t) = \int\limits_0^t \frac{dr}{rK(r)} \le \int\limits_0^t \frac{dr}{r\Phi_{n-1}^{-1}\left(\frac{\gamma}{r}\right)} = \int\limits_{\frac{\gamma}{t}}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\Phi_{n-1}^{-1}(\tau)} \qquad \forall \quad t \in (0,1]\,,$$

где $\gamma/t \ge \gamma \ge 1 > \Phi(0) = 0$. Поэтому ввиду (1.82)

$$I(0) - I(t) \ \le \ I(0) \ = \ \int\limits_0^1 \frac{dr}{rK(r)} \ < \ \infty \qquad \forall \quad t \in (0,1] \tag{1.88}$$

Кроме того, $f_m$ и $f \in C^1\left(\mathbb{B}^n \setminus \{0\}\right)$, поскольку $K_m(r)$ и $K(r)$ непрерывны, и поэтому являются локально квазиконформными в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Более того, $f_m$ являются $K_m$ – квазиконформными в $\mathbb{B}^n$, где $K_m = K\left(1/m\right)$.

Теперь касательная и радиальная дилатации $f$ на сфере $|x| = \rho$, $\rho \in (0,1)$, легко вычисляются:

$$\delta_\tau(x) = \frac{|f(x)|}{|x|} = \frac{\exp\left\{\int\limits_0^\rho \frac{dr}{rK(r)}\right\}}{\rho}\,,$$

$$\delta_r(x) = \frac{\partial|f(x)|}{\partial|x|} = \frac{\exp\left\{\int\limits_0^\rho \frac{dr}{rK(r)}\right\}}{\rho K(\rho)}\,,$$

и мы видим, что $\delta_\tau(x) \ge \delta_r(x)$ поскольку $K(r) \ge 1$. Следовательно, ввиду сферической симметрии мы имеем, что

$$K_I(x,f) = \frac{\delta_\tau^{n-1}(x)\cdot\delta_r(x)}{\delta_r^n(x)} = K^{n-1}(|x|)$$

во всех точках $x \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, см., напр., подсекцию I.2.1 в [77]. Заметим, что

$$f_m(x) \equiv f(x) \qquad \forall \ x : \ \frac{1}{m} < |x| < 1, \quad m = 1, 2 \ldots. \tag{1.89}$$

Поэтому аналогично вычисляются $K_I(x, f_m) = K_I(x,f) = K^{n-1}(|x|)$ для $\frac{1}{m} < |x| < 1$ и $K_I(x, f_m) = K(1/m)$ для $0 < |x| < \frac{1}{m}$. Таким образом, $f_m$ являются квазиконформными в $\mathbb{B}^n$, поэтому $f_m \in W^{1,n}_{loc}$, и ввиду (1.85)

$$\int\limits_{\mathbb{B}^n} \Phi\left(K_I(x,f_m)\right)\,dm(x) \ \le \ \int\limits_{\mathbb{B}^n} \Phi_{n-1}\left(K(|x|)\right)\,dm(x) \ =$$

$$= \omega_{n-1}\int\limits_0^1 \frac{\Psi\left(K(r)\right)}{rK(r)}\cdot r^n dr \ \le \ \gamma^2\omega_{n-1}\int\limits_0^1 \frac{dr}{rK(r)} \ \le \ M \, : \, = \, \gamma^2\omega_{n-1}I(0) \ < \ \infty\,.$$

Заметим, что $f_m$ отображают единичный шар $\mathbb{B}^n$ на шар с центром в начале координат радиуса $R = e^{I(0)} < \infty$. Таким образом, $f_m \in S^{\Phi}_{M,\Delta}$ при некотором $\Delta > 0$, где $M$ указано выше.

С другой стороны, легко видеть, что $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)| = \lim\limits_{t\to 0}\rho(t) = e^0 = 1$, т.е. $f$ отображает проколотый шар $\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$ на кольцо $1 < |y| < R = e^{I(0)}$. Тогда, в силу (1.89), получаем, что $|f_m(x)| = |f(x)| \ge 1$ при $|x| \ge 1/m, m = 1, 2, \ldots$ , т.е., семейство $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ не является равностепенно непрерывным в нуле.

Полученное противоречие опровергает предположение (1.81). $\Box$

**Замечание 1.12.** Теорема 1.13 показывает, что условие (1.71) теоремы 1.8 является не только достаточным, но и необходимым для равностепенной непрерывности (и, следовательно, нормальности и компактности) отображений с интегральными ограничениями вида (1.70), либо (1.73), при выпуклой неубывающей функции $\Phi$. Ввиду предложения 1.4, сказанное относится также к каждому из условий (1.21)–(1.26) при $p = n-1$.

**Следствие 1.17.** *Если классы $S^{\Phi}_{M,\Delta} \subset \mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ нормальны при всех $M \in (0,\infty)$ и $\Delta \in (0,1)$ для неубывающей выпуклой функции $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$, то*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \log\Phi(t)\ \frac{dt}{t^{n'}} \ = \ \infty \tag{1.90}$$

*для всех $\delta > t_0$, где $t_0 := \sup\limits_{\Phi(t)=0} t$, $t_0 = 0$ если $\Phi(0) > 0$, $\frac{1}{n'} + \frac{1}{n} = 1$, т.е., $n' = n/(n-1)$.*

По замечанию 1.10 и предложению 1.4, условие (1.90) также является достаточным для равностепенной непрерывности (нормальности) классов отображений $S^{\Phi}_{M,\Delta}$ и $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ при всех $M \in (0,\infty)$ и $\Delta \in (0,1)$.

Отметим, наконец, что ещё в работе [84] была установлена необходимость условий неубывания и выпуклости функции $\Phi$ для компактности (замкнутости) классов отображений с ограничениями интегрального типа (1.72), см. также монографию [188]. О точности условий для сходимости гомеоморфизмов, см. раздел 10.8.

Приведённые здесь результаты будут иметь приложения, в частности, к теории сходимости и компактности гомеоморфизмов классов Соболева, а также классов Орлича–Соболева, см. части II и III книги.

# Глава 2. Продолжение кольцевых $Q$-гомеоморфизмов на границу в $\mathbb{R}^n$

Граничное поведение всегда была наиболее трудной и интересной частью теории квазиконформных отображений и их обобщений, см., напр., [15,17,34,65,67,177,255,261,324]. Данная глава посвящена проблеме продолжения кольцевых $Q$-гомеоморфизмов в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, на границы областей (см. [54]). Здесь сформулированы условия на функцию $Q(x)$ и границы областей, при которых всякий кольцевой $Q$-гомеоморфизм допускает непрерывное или гомеоморфное продолжение на границу. Кроме того, для произвольного кольцевого $Q$-гомеоморфизма $f : D \to D'$ при $Q \in L^1(D)$ исследован вопрос о продолжении на границу обратных отображений. Показано также, что изолированная особенность устранима для кольцевых $Q$-гомеоморфизмов при условии, что $Q$ имеет конечное среднее колебание в точке. Методы доказательства основных результатов аналогичны тем, которые применялись ранее при исследовании более узкого класса так называемых $Q$-гомеоморфизмов (см., напр., статьи [35,85,250,251] и монографию [252]).

## 2.1. Предварительные сведения

Понятие кольцевого $Q$-гомеоморфизма было распространено в граничные точки сначала на плоскости в работе [290], см. также [292] и главу 6 монографии [188], а затем и в пространстве в статье [54]. Именно, пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и $Q : D \to (0, \infty)$ – измеримая по Лебегу функция. Гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ называем **кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в точке** $x_0 \in \overline{D}$, если соотношение

$$M(f(\Gamma(K_1, K_2, D))) \leqslant \int\limits_{A \cap D} Q(x) \eta^n(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{2.1}$$

выполнено для любых двух континуумов $K_1$, $K_2$ из $D$, которые принадлежат разным компонентам дополнения в $\mathbb{R}^n$ кольца $A = A(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, и для каждой измеримой по Лебегу функции $\eta$ :

$(r_1, r_2) \to [0, \infty]$, такой что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1. \tag{2.2}$$

Топологическое пространство $T$ будем называть **линейно связным**, если любые точки $x_1$ и $x_2$ можно соединить непрерывным путем $\gamma : [0,1] \to T$, $\gamma(0) = x_1$ и $\gamma(1) = x_2$.

Напомним, что область $D$ называется **локально связной в точке** $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности $U$ точки $x_0$ найдется окрестность $V \subseteq U$ точки $x_0$ такая, что $V \cap D$ связно, ср. [47], с. 232. Аналогично, область $D$ **локально линейно связна в точке** $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности $U$ точки $x_0$ найдется окрестность $V \subseteq U$ точки $x_0$ такая, что $V \cap D$ линейно связно. Следует отметить, что понятия связности и линейной связности для открытых множеств в $\mathbb{R}^n$ или на многообразиях совпадают, см. следствие 2.1 в статье [85], или следствие 13.1 в монографии [252].

Говорят, см. [39] и [40], что **граница сильно достижима в точке** $x_0 \in \partial D$, если, для любой окрестности $U$ точки $x_0$, найдется компакт $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки $x_0$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Gamma(E, F, D)) \geqslant \delta$$

для любого континуума $F$ в $D$, пересекающего $\partial U$ и $\partial V$. Граница $\partial D$ области $D$ называется **слабо плоской** в точке $x_0 \in \partial D$, если для любого числа $P > 0$ и окрестности $U$ точки $x_0$ найдется ее окрестность $V \subset U$ такая, что

$$M(\Gamma(E, F, D)) \geqslant P$$

для любых континуумов $E$ и $F$ в $D$, пересекающих $\partial U$ и $\partial V$. Граница области $D \subset \mathbb{R}^n$ называется **сильно достижимой**, или **слабо плоской**, если соответствующие свойства выполнены в каждой точке границы.

## 2.2. Лемма о непрерывном продолжении на границу

**Лемма 2.1.** *Пусть $D$ локально связна в $x_0 \in \partial D$, $\overline{D'}$ – компакт, а $f : D \to D'$ – кольцевой $Q$-гомеоморфизм в точке $x_0$, $D' = f(D)$, такой что $\partial D'$ сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества*

$$C\,(x_0, f) = \{y \in \mathbb{R}^n : y = \lim_{k\to\infty} f(x_k)\,, \quad x_k \to x_0, \quad x_k \in D\}. \tag{2.3}$$

*Предположим, что найдется $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$ такое, что для $\forall\,\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$*

$$\int\limits_{D(x_0,\,\varepsilon)} Q(x) \cdot \psi^n(|x - x_0|)\, dm(x) = o\left(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)\right) \tag{2.4}$$

*при $\varepsilon \to 0$, где $D(x_0, \varepsilon) = \{x \in D : \varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0\}$ и $\psi(t)$ – неотрицательная измеримая функция на $(0, \infty)$, такая что*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon') = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \psi(t)\, dt < \infty$$

*для всех (фиксированных) $\varepsilon' \in (0, \varepsilon_0]$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$. Тогда $f$ имеет продолжение в точку $x_0$ по непрерывности.*

**Доказательство.** Не ограничивая общности можно считать, что $\infty \notin D'$. Покажем, что предельное множество $E = C(x_0, f)$ состоит из единственной точки. Отметим, что $E \neq \varnothing$ ввиду компактности $\overline{D'}$. По условию леммы, $\partial D'$ сильно достижима в некоторой точке $y_0 \in E$. Допустим, что существует хотя бы еще одна точка $y^* \in E$. Пусть $U = B(y_0, r_0)$, где $0 < r_0 < |y_0 - y^*|$.

В силу локальной связности области $D$ в точке $x_0$, найдется последовательность окрестностей $V_m$ точки $x_0$ такая, что $D_m = D \cap V_m$ – области и $\mathrm{diam}(V_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Тогда найдутся точки $y_m$ и $y_m^* \in F_m = fD_m$, близкие к $y_0$ и $y^*$, соответственно, для которых $|y_0 - y_m| < r_0$ и $|y_0 - y_m^*| > r_0$, которые можно соединить непрерывными кривыми $C_m$ в областях $F_m$. По построению

$$C_m \cap \partial B(y_0,\, r_0) \neq \varnothing,$$

ввиду связности $C_m$. По условию сильной достижимости найдется компакт $C \in D'$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Gamma(C, C_m, D')) \geqslant \delta\,, \tag{2.5}$$

для больших $m$, поскольку $\mathrm{dist}(y_0, C_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Выберем континуум $C'$, такой что $C \subset C'$ и $C' \subset D$.

Заметим, что $\Gamma(C, C_m, D') \subseteq \Gamma(C', C_m, D')$, поэтому

$$M(\Gamma(C', C_m, D')) \geqslant M(\Gamma(C, C_m, D')) \geqslant \delta. \tag{2.6}$$

Множество $K = f^{-1}(C')$ является континуумом как непрерывный образ континуума. Таким образом, $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}(x_0, K) > 0$.

Обозначим $B_\varepsilon = B(x_0, \varepsilon), \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Для функции

$$\eta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(\varepsilon, \varepsilon_0), \ t \in (\varepsilon, \, \varepsilon_0), \\ \hfill 0, \ t \notin (\varepsilon, \, \varepsilon_0) \end{cases}$$

выполняется

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta_\varepsilon(t)\, dt = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{\psi(t)}{I(\varepsilon, \varepsilon_0)}\, dt = 1.$$

Рассмотрим кольцо $A = A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$ и континуумы $K_1 \subset B_\varepsilon \cap D$ и $K_2 = K$. Тогда

$$M(f(\Gamma(K_1, K_2, D))) \leqslant \int\limits_{A \cap D} Q(x) \eta^n(|x - x_0|)\, dm(x) =$$

$$= \int\limits_{D(x_0, \varepsilon)} \frac{Q(x)\psi^n(|x - x_0|)}{I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)}\, dm(x) \to 0 \tag{2.7}$$

при $\varepsilon \to 0$ согласно (2.4).

С другой стороны, для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ при больших $m$ имеет место включение $D_m \subset B_\varepsilon$, и поскольку $fD_m = F_m \subset fB_\varepsilon$ и $C_m \subset F_m$, то $C_m \subset fB_\varepsilon$, откуда следует, что $f^{-1}C_m \subset B_\varepsilon$. Заметим, что $K_1 \subset B(x_0, \varepsilon) \cap D$, $K_2 \subset (\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(x_0, \varepsilon_0)) \cap D$ и, согласно (2.6), получим неравенство

$$M(f(\Gamma(K_1, K_2, D))) \geqslant \delta,$$

которое противоречит (2.7). Полученное противоречие доказывает, что $f$ имеет продолжение в точку $x_0$ по непрерывности. $\square$

## 2.3. Основные следствия

Ниже мы предполагаем, что $Q$ продолжена нулем вне области $D$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$.

**Теорема 2.1.** *Пусть $D$ локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\overline{D'}$ – компакт и $f : D \to D'$ – кольцевой $Q$-гомеоморфизм такой, что $f(D) = D'$ и $\partial D'$ сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества*

$$C\,(x_0, f) = \{y \in \mathbb{R}^n : y = \lim_{k \to \infty} f(x_k), \quad x_k \to x_0, \quad x_k \in D\}. \tag{2.8}$$

*Предположим, что*

$$q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$$

*при $r \to 0$, где $q_{x_0}(r)$ – среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $\{x \in D : |x - x_0| = r\}$. Тогда $f$ продолжим в точку $x_0$ по непрерывности.*

**Доказательство.** Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$. Фиксируем $\varepsilon_0 < 1$. Положим $\psi(t) = \frac{1}{t\,\log\frac{1}{t}}$. Заметим, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)dm(x)}{\left(|x|\log\frac{1}{|x|}\right)^n} = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\left(\int\limits_{|x|=r}\frac{Q(x)}{\left(|x|\log\frac{1}{|x|}\right)^n}\,dS\right)dr \leqslant$$

$$\leqslant \omega_{n-1}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{dr}{r\log\frac{1}{r}} = \omega_{n-1}\log\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{\varepsilon_0}} = \omega_{n-1}\cdot I(\varepsilon,\varepsilon_0)\,,$$

где $I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt$. Нужное заключение следует теперь прямо из леммы 2.1. □

**Теорема 2.2.** *Пусть область $D$ локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\overline{D'}$ – компакт, а $f : D \to D'$ – кольцевой $Q$-гомеоморфизм, $D' = f(D)$, такой, что $\partial D'$ сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества $C(x_0, f)$. Предположим, что $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке $x_0 \in D$. Тогда $f$ продолжим в точку $x_0$ по непрерывности.*

**Доказательство.** Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$. Пусть $\varepsilon_0 \in (0,\delta_0)$, где $\delta_0 = \min\{e^{-e}, d_0\}$, $d_0 = \sup\limits_{x\in D}|x - x_0|$. На основании леммы 1.2, для функции $0 < \psi(t) = \frac{1}{t\,\log\frac{1}{t}}$ будем иметь, что

$$\int\limits_{D\cap A(\varepsilon,\varepsilon_0,0)} Q(x)\cdot\psi^n(|x|)\,dm(x) = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Заметим также, что

$$I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt = \log\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}.$$

Оставшаяся часть утверждения следует теперь из леммы 2.1. □

## 2.4. Продолжение на границу обратных отображений

**Лемма 2.2.** *Пусть $f : D \to D'$ – кольцевой $Q$–гомеоморфизм в точке $x_1 \in D$ с $Q \in L^1(D)$, где $D' = f(D)$. Если область $D$ локально связна в точках $x_1$ и $x_2 \in \partial D$, $x_1 \neq x_2$, а $D'$ имеет слабо плоскую границу, то*

$$C(x_1, f) \cap C(x_2, f) = \varnothing.$$

**Доказательство.** Пусть $E_i = C(x_i, f)$, $i = 1, 2$, и $\delta = |x_1 - x_2|$. Предположим, что $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$. Так как область $D$ локально связна в точках $x_1$ и $x_2$, существуют окрестности $U_1$ и $U_2$ точек $x_1$ и $x_2$, соответственно, такие что $W_1 = D \cap U_1$ и $W_2 = D \cap U_2$ – области и $U_1 \subset B(x_1, \frac{\delta}{3})$ и $U_2 \subset \overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(x_1, \frac{2\delta}{3})$. Тогда по неравенству треугольника $\operatorname{dist}(W_1, W_2) \geqslant \frac{\delta}{3}$. Рассмотрим функцию

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{3}{\delta}, & t \in (\frac{\delta}{3}, \frac{2\delta}{3}), \\ 0, & t \notin (\frac{\delta}{3}, \frac{2\delta}{3}). \end{cases}$$

Ясно, что $\int\limits_{\frac{\delta}{3}}^{\frac{2\delta}{3}} \eta(t)dt = 1$ и, следовательно, для любых континуумов $K_1 \subset W_1$ и $K_2 \subset W_2$:

$$M(f(\Gamma(K_1, K_2, D))) \leqslant \int\limits_{A(x_1, \frac{\delta}{3}, \frac{2\delta}{3}) \cap D} Q(x)\eta^n(|x - x_1|)\, dm(x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3^n}{\delta^n} \int\limits_{A(x_1, \frac{\delta}{3}, \frac{2\delta}{3}) \cap D} Q(x) dm(x) < \infty\,,$$

так как $Q \in L^1(D)$.

Однако, последняя оценка противоречит условию слабой плоскости. Действительно, пусть $y_0 \in \overline{fW_1} \cap \overline{fW_2}$. Тогда в областях $W_1^* = fW_1$ и $W_2^* = fW_2$ найдется по непрерывной кривой, пересекающей любые наперед заданные сферы $\partial B(y_0, r_0)$ и $\partial B(y_0, r_*)$ с достаточно малыми радиусами $r_0$ и $r_*$. Поэтому предположение, что $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$ было неверным. $\Box$

Из леммы 2.2 получаем следующее важное заключение.

**Теорема 2.3.** *Пусть $D$ локально связна во всех своих граничных точках и $\overline{D}$ – компакт, $D'$ имеет слабо плоскую границу и $f : D \to D'$ – кольцевой $Q$-гомеоморфизм с $Q \in L^1(D)$, где $f(D) = D'$. Тогда обратный гомеоморфизм $g = f^{-1} : D' \to D$ допускает непрерывное продолжение $\overline{g} : \overline{D'} \to \overline{D}$.*

Комбинируя вышеприведенные результаты о продолжении на границу прямых и обратных отображений, получим соответствующие теоремы о гомеоморфном продолжении кольцевых $Q$-гомеоморфизмов на границы областей.

## 2.5. Устранение изолированных особенностей

Как показывает лемма 2.3, для устранения изолированной особенности кольцевых $Q$-гомеоморфизмов достаточно потребовать интегрируемость $Q(x)$ с подходящим весом.

**Лемма 2.3.** *Пусть $f : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, – кольцевой $Q$-гомеоморфизм в точке $x_0 = 0$. Предположим, что существует $\varepsilon_0$, $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$, такое что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^n(|x|)\, dm(x) = o(I(\varepsilon)^n), \tag{2.9}$$

*при $\varepsilon \to 0$, где $\psi(t)$ – неотрицательная измеримая функция на $(0, \infty)$, такая что*

$$0 < I(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty, \tag{2.10}$$

*при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Тогда $f$ имеет непрерывное продолжение на $\mathbb{B}^n$, которое является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом.*

**Доказательство.** Так как модуль семейства путей, проходящих через фиксированную точку, равен 0, то нам достаточно показать, что $f(x)$ имеет предел при $x \to 0$. Положим

$$\eta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(\varepsilon), & t \in (\varepsilon,\, \varepsilon_0), \\ 0, & t \notin (\varepsilon, \varepsilon_0)\,. \end{cases}$$

Заметим, что $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta_\varepsilon(t)\,dt = 1$. Следовательно, для сфер $S_1 = S(0, \frac{\varepsilon}{2})$ и $S_2 = S(0, 2\varepsilon_0)$

$$M(f(\Gamma(S_1, S_2, \mathbb{B}^n \setminus \{0\}))) \leqslant \int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\eta_\varepsilon^n(|x|)\,dm(x),$$

т.е. $M(f(\Gamma(S_1, S_2, \mathbb{B}^n \setminus \{0\}))) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ согласно (2.9).

По лемме Геринга, см. [174], с. 225–227,

$$M(f(\Gamma(S_1, S_2, \mathbb{B}^n \setminus \{0\}))) \geqslant \frac{a_n}{(\log \frac{b_n}{\delta_0\delta_\varepsilon})^{n-1}},$$

где $a_n$ и $b_n$ зависят только от $n$, $\delta_0$ и $\delta_\varepsilon$ – сферические (хордальные) диаметры $fS_2$ и $fS_1$. Таким образом, $\delta_\varepsilon \to 0$ и $fS_1$ стягивается в точку при $\varepsilon \to 0$. То, что $f$ – гомеоморфизм в $\mathbb{B}^n$, вытекает из следствия 5.2 в [35]. □

В частности, выбирая в лемме 2.3 $\psi = \frac{1}{t\log(1/t)}$, получаем согласно лемме 1.2 следующее утверждение.

**Теорема 2.4.** *Пусть $f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в точке $x_0 = 0$, где $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке $x_0 \in D$, либо логарифмические особенности порядка не выше $n-1$. Тогда $f$ допускает кольцевое $Q$-гомеоморфное продолжение на $D$.*

# Глава 3. О нижних и кольцевых $Q$-гомеоморфизмах относительно $p$-модуля

В этой главе рассматриваются кольцевые $Q$-гомеоморфизмы относительно $p$-модуля (см., например, [86, 182, 295, 296]). Прежде всего, здесь установлен критерий принадлежности этому классу. На этой основе решена проблема, восходящая к Лаврентьеву М.А. (см. [53]), об оценке меры образа шара при таких отображениях и исследовано их асимптотическое поведение в точке. Найдено достаточное условие конечной липшицевости кольцевых $Q$-гомеоморфизмов относительно $p$-модуля при $n-1<p<n$. Также в этой главе рассматриваются нижние $Q$-гомеоморфизмы относительно $p$-модуля. Показана взаимосвязь между нижними и верхними модульными неравенствами. Развиваемая теория кольцевых $Q$-гомеоморфизмов относительно $p$-модуля применима, в частности, к отображениям квазиконформным в среднем (см. [43–45, 181]). Теория будет также применима к отображениям классов Орлича-Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ при условии типа Кальдерона на функцию $\varphi$ и, в частности, классов Соболева $W^{1,q}_{\rm loc}$ при $q>n-1$ (см., например, препринт [233]).

## 3.1. Кольцевых $Q$-гомеоморфизмы относительно $p$-модуля

Напомним некоторые определения. Борелева функция $\varrho:\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ называется **допустимой** для семейства кривых $\Gamma$ в $\mathbb{R}^n$, пишут $\varrho\in{\rm adm}\,\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma}\varrho(x)\,ds\geqslant 1 \tag{3.1}$$

для всех $\gamma\in\Gamma$. Пусть $p\geqslant 1$. Тогда **p-модулем** семейства кривых $\Gamma$ называется величина

$$M_p(\Gamma)=\inf_{\varrho\in{\rm adm}\,\Gamma}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varrho^p(x)\,dm(x). \tag{3.2}$$

Здесь $m$ обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем полагаем $M(\Gamma)=$ $=M_n(\Gamma)$.

Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и пусть $Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая функция. Гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$ будем называть **Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля**, если

$$M_p(f\Gamma) \leqslant \int\limits_D Q(x) \cdot \varrho^p(x)\, dm(x) \tag{3.3}$$

для любого семейства $\Gamma$ кривых в $D$ и любой допустимой функции $\varrho$ для $\Gamma$.

Определение $Q$-гомеоморфизма относительно $p$-модуля при $p \neq n$ впервые встречается в работе [180]. В работе [181] неравенство вида (3.3) уставлено для отображений квазиконформных в среднем при $p \neq n$.

Напомним также следующие определения. Пусть $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$ – произвольные множества. Обозначим через $\Delta(E, F, D)$ семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют $E$ и $F$ в $D$, т.е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $a < t < b$. Пусть $d_0 = \mathrm{dist}(z_0, \partial D)$ и пусть $Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Положим

$$A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}\,, \tag{3.4}$$

$$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_i\}\,, \quad i = 1, 2. \tag{3.5}$$

Согласно работе Геринга [171] для квазиконформности отображений достаточно требовать, чтобы условие вида (3.3) при $Q(x) \leqslant K$ п.в. и $p = n$ было выполнено для семейств кривых, соединяющих граничные компоненты произвольного сферического кольца из области $D$. Будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$ является **кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в точке** $x_0 \in D$, $(1 < p \leqslant \leqslant n)$, если соотношение

$$M_p\left(\Delta\left(fS_1, fS_2, fG\right)\right) \leqslant \int\limits_A Q(x) \cdot \eta^p(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{3.6}$$

выполнено для любого кольца $A = A(z_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1\,. \tag{3.7}$$

Говорят, что гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$ является **кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в области** $D$, если условие (3.6) выполнено для всех точек $x_0 \in D$.

Всюду далее $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$, $\mathbb{B}^n = B(0,1)$, $B_r = B(0, r)$, $\omega_{n-1}$ – площадь единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, $\Omega_n$ – объём единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $n\Omega_n = \omega_{n-1}$. Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая функция. Тогда

$$q_{x_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{|x-x_0|=r} Q(x) d\mathcal{A}$$

обозначает среднее интегральное значение на сфере $|x - x_0| = r$, где $d\mathcal{A}$ – элемент площади поверхности. В дальнейшем при $x_0 = 0$ полагаем $q(t) = q_{x_0}(t)$. Запись $m(E)$ обозначает меру Лебега множества $E$ в $\mathbb{R}^n$.

Следуя работе [248], пару $\mathcal{E} = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество и $C$ - непустое компактное множество, содержащееся в $A$, называем **конденсатором**. Конденсатор $\mathcal{E}$ называется **кольцевым конденсатором**, если $B = A \setminus C$ – кольцо, т.е., если $B$ – область, дополнение которой $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B$ состоит в точности из двух компонент. Конденсатор $\mathcal{E}$ называется **ограниченным конденсатором**, если множество $A$ является ограниченным. Говорят также, что конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$ лежит в области $D$, если $A \subset D$. Очевидно, что если $f : D \to \mathbb{R}^n$ – непрерывное, открытое отображение и $\mathcal{E} = (A, C)$ – конденсатор в $D$, то $(fA, fC)$ также конденсатор в $fD$. Далее $f\mathcal{E} = (fA, fC)$.

Пусть $\mathcal{E} = (A, C)$ – конденсатор. Обозначим $C_0(A)$ через множество непрерывных функций $u : A \to \mathbb{R}^1$ с компактным носителем. $W_0(\mathcal{E}) = W_0(A, C)$ – семейство неотрицательных функций $u : A \to \mathbb{R}^1$ таких, что 1) $u \in C_0(A)$, 2) $u(x) \geqslant 1$ для $x \in C$ и 3) $u$ принадлежит классу ACL и пусть

$$|\nabla u| = \left( \sum_{i=1}^{n} (\partial_i u)^2 \right)^{1/2}. \tag{3.8}$$

При $p \geqslant 1$ величину

$$\operatorname{cap}_p \mathcal{E} = \operatorname{cap}_p (A, C) = \inf_{u \in W_0(\mathcal{E})} \int\limits_A |\nabla u|^p \, dm \tag{3.9}$$

называют **p-ёмкостью** конденсатора $\mathcal{E}$. В дальнейшем мы будем использовать равенство

$$\operatorname{cap}_p \mathcal{E} = M_p(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C)), \tag{3.10}$$

где для множеств $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ и $\mathcal{S}_3$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $\Delta(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2; \mathcal{S}_3)$ обозначает семейство всех непрерывных кривых, соединяющих $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ в $\mathcal{S}_3$, см. [174, 305].

Емкости в контексте теории отображений хорошо отражены в монографии [184].

Известно, что при $p \geqslant 1$

$$\mathrm{cap}_p\,\mathcal{E} \geqslant \frac{(\inf m_{n-1}\,\sigma)^p}{[m(A\setminus C)]^{p-1}}\,, \tag{3.11}$$

где $m_{n-1}\,\sigma$ – $(n-1)$-мерная мера Лебега $C^\infty$-многообразия $\sigma$, являющегося границей $\sigma=\partial U$ ограниченного открытого множества $U$, содержащего $C$ и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в $A$, а точная нижняя грань берется по всем таким $\sigma$, см. предложение 5 из [43].

При $1 \leqslant p < n$

$$\mathrm{cap}_p\,\mathcal{E} \geqslant n\Omega_n^{\frac{p}{n}} \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} [m(C)]^{\frac{n-p}{n}} \tag{3.12}$$

где $\Omega_n$ – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, см., напр., неравенство (8.9) в [257].

При $n-1 < p \leqslant n$ имеет место оценка

$$\left(\mathrm{cap}_p\,\mathcal{E}\right)^{n-1} \geqslant \gamma\,\frac{d(C)^p}{m(A)^{1-n+p}}\,, \tag{3.13}$$

где $d(C)$ – диаметр компакта $C$, $m(A)$ – мера Лебега множества $A$, $\gamma$ – положительная константа, зависящая только от размерности $n$ и $p$, см. предложение в [43].

## 3.2. Характеризация кольцевых $Q$-гомеоморфизмов относительно $p$-модуля

Ниже приведен критерий принадлежности классу кольцевых $Q$-гомеоморфизмов относительно $p$-модуля, который впервые был установлен в работе [86] при $p=n$, см. также монографию [252]. Кроме того, при $p=n$ для кольцевых $Q$-отображений с ветвлением аналогичный критерий был ранее установлен в работе [96].

Здесь мы придерживаемся следующих стандартных соглашений: $a/\infty = 0$ для $a\neq\infty$ и $a/0=\infty$ для $a>0$ и $0\cdot\infty=0$ (см., напр., [88], с. 6).

**Лемма 3.1.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $Q : D \to [0,\infty]$ – измеримая функция, $q_{x_0}(r)$ – среднее значение $Q(x)$ над сферой $S(x_0,r)$. Положим*

$$I = I(x_0,r_1,r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)} \tag{3.14}$$

*и* $S_j = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_j\}$, $j = 1, 2$, *где* $x_0 \in D$ *и* $0 < r_1 < r_2 < r_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. *Тогда для любого кольцевого $Q$-гомеоморфизма* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *относительно $p$-модуля в точке* $x_0$

$$M_p\left(\Delta\left(fS_1, fS_2, fD\right)\right) \leqslant \frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}\,, \tag{3.15}$$

*где* $\omega_{n-1}$ *– площадь единичной сферы в* $\mathbb{R}^n$.

**Доказательство.** Не ограничивая общности рассуждений, можно полагать, что $I \neq 0$, так как в противном случае соотношение (3.15), очевидно, выполнено. Можно также считать, что $I \neq \infty$, так как в противном случае в соотношении (3.15) можно рассмотреть $Q(x) + \delta$ (со сколь угодно малым $\delta > 0$) вместо $Q(x)$, а затем перейти к пределу при $\delta \to 0$.

Пусть $I \neq \infty$. Тогда $q_{x_0}(r) \neq 0$ п.в. на $(r_1, r_2)$. Положим

$$\psi(t) = \begin{cases} 1/[t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)]\,, & t \in (r_1, r_2)\,, \\ 0\,, & t \notin (r_1, r_2). \end{cases} \tag{3.16}$$

Тогда

$$\int\limits_A Q(x) \cdot \psi^p(|x - x_0|)\, dm(x) = \omega_{n-1} I\,, \tag{3.17}$$

где $A = A(x_0, r_1, r_2)$.

Заметим, что функция $\eta(t) = \frac{\psi(t)}{I}$, $t \in (r_1, r_2)$ удовлетворяет соотношению вида (3.7). Поэтому согласно равенству (3.17) и определению кольцевого $Q$-гомеоморфизма относительно $p$-модуля

$$M_p\left(\Delta\left(fS_1, fS_2, fG\right)\right) \leqslant \int\limits_A Q(x) \cdot \eta^p(|x - x_0|)\, dm(x) = \frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}\,,$$

где $S_i = S(x_0, r_i)$, $i = 1, 2$. Лемма 3.1 доказана. □

Следующая лемма показывает, что для кольцевых $Q$-гомеоморфизмов относительно $p$-модуля неравенство (3.15), вообще говоря, не может быть улучшено.

**Лемма 3.2.** *Пусть* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < r_1 < r_2 < r_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, $A = A(x_0, r_1, r_2)$, *и пусть* $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ *– измеримая функция. Положим*

$$\eta_0(r) = \frac{1}{I r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}\,, \tag{3.18}$$

*где* $q_{x_0}(r)$ *– среднее значение функции* $Q(x)$ *над сферой* $S(x_0,r)$ *и* $I$ *– величина, определённая в лемме 3.1. Если* $q_{x_0}(r)\neq\infty$ *для п.в.* $r\in(r_1,r_2)$, *то*

$$\frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}=\int\limits_A Q(x)\cdot\eta_0^p(|x-x_0|)\,dm(x)\leqslant\int\limits_A Q(x)\cdot\eta^p(|x-x_0|)\,dm(x)\qquad(3.19)$$

*для любой измеримой функции* $\eta:(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ *такой, что*

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr=1\,.\qquad(3.20)$$

**Доказательство.** Если $I=\infty$, то левая часть в соотношении (3.19) равна нулю и неравенство в этом случае очевидно. Если $I=0$, то $q_{x_0}(r)=\infty$ для п.в. $r\in(r_1,r_2)$ и обе части неравенства (3.19) равны бесконечности, что невозможно при условиях леммы. Поэтому можно считать, что $0<I<\infty$. Тогда из (3.18) и (3.20) следует, что $q_{x_0}(r)\neq0$ и $\eta(r)\neq\infty$ п.в. в интервале $(r_1,r_2)$. Полагая

$$\lambda(r)=r^{\frac{n-1}{p-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)\eta(r)\,,\quad w(r)=1/r^{\frac{n-1}{p-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)\,,$$

имеем, что

$$\eta(r)=\lambda(r)w(r)\quad\text{п.в. в }(r_1,r_2)$$

и

$$C:=\int\limits_A Q(x)\cdot\eta^p(|x-x_0|)\,dm(x)=\omega_{n-1}\int\limits_{r_1}^{r_2}\lambda^p(r)\cdot w(r)\,dr\,.\qquad(3.21)$$

Применяем неравенство Иенсена с весом, см., например, теорему 2.6.2 в [273], к выпуклой функции $\varphi(t)=t^p$, заданной в интервале $\Omega=(r_1,r_2)$, с вероятностной мерой

$$\nu\,(E)=\frac{1}{I}\int\limits_E w(r)\,dr\,,\qquad(3.22)$$

получаем, что

$$\left(⨍\lambda^p(r)w(r)\,dr\right)^{1/p}\geqslant⨍\lambda(r)w(r)\,dr=\frac{1}{I}\,,\qquad(3.23)$$

где мы также использовали тот факт, что $\eta(r) = \lambda(r)w(r)$ удовлетворяет соотношению (3.20). Отсюда получаем

$$C \geqslant \frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}\,, \tag{3.24}$$

что и доказывает (3.19). $\square$

Таким образом, получаем следующий критерий кольцевого $Q$-гомеоморфизма относительно $p$-модуля, см. [89] и [90].

**Теорема 3.1.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и пусть $Q : D \to \to [0,\infty]$ – локально интегрируемая функция. Гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$ является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в точке $x_0 \in D$ тогда и только тогда, когда для любых $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$*

$$M_p\left(\Delta\left(fS_1,\, fS_2\, fD\right)\right) \leqslant \frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}\,, \tag{3.25}$$

*где $S_1$ и $S_2$ – сферы $S(x_0,r_1)$ и $S(x_0,r_2)$, $\omega_{n-1}$ – площадь единичной сферы $S^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, $I = I(x_0,r_1,r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}$, $q_{x_0}(r)$ – среднее значение функции $Q$ над сферой $S(x_0,r)$.*

Отметим наконец, что здесь инфимум справа в выражении (3.6) достигается для функции

$$\eta_0(r) = \frac{1}{I r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}\,. \tag{3.26}$$

### 3.3. Искажение объема

В этом параграфе получена оценка меры образа шара при кольцевых $Q$-гомеоморфизмах относительно $p$-модуля. Впервые оценка площади образа круга при квазиконформных отображениях встречается в монографии Лаврентьева М.А. (см. [53]). Кругликовым В.И. была получена оценка меры образа шара для отображений квазиконформных в среднем в $\mathbb{R}^n$ (см. лемму 9 в [43]). Следующий результат был получен в работах [89] и [90].

**Теорема 3.2.** *Пусть $n \geqslant 2$, $f$ – кольцевой $Q$-гомеоморфизм $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{B}^n$ относительно $p$-модуля. Тогда при $1 < p < n$ имеет место оценка*

$$m(fB_r) \leqslant \Omega_n \cdot \left(1 + \frac{n-p}{p-1} \int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\, q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{-\frac{n(p-1)}{n-p}}, \qquad (3.27)$$

*а при $p = n$*

$$m(fB_r) \leqslant \Omega_n \cdot \exp\left\{-n \int\limits_r^1 \frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}, \qquad (3.28)$$

*где $\Omega_n$ – объём единичного шара в $\mathbb{R}^n$.*

**Доказательство.** Рассмотрим сферическое кольцо $R_t = \{x \in \mathbb{B}^n : t < |x| < t + \triangle t\}$. Пусть $(A_{t+\triangle t}, C_t)$ - конденсатор, где $C_t = \overline{B_t}, A_{t+\triangle t} = B_{t+\triangle t}$. Тогда $(fA_{t+\triangle t}, fC_t)$ – кольцевой конденсатор в $\mathbb{R}^n$, и согласно (3.10) имеем

$$\mathrm{cap}_p(fA_{t+\triangle t}, fC_t) = M_p(\triangle(\partial fA_{t+\triangle t}, \partial fC_t; fR_t)). \qquad (3.29)$$

В силу неравенства (3.11) получим

$$\mathrm{cap}_p\,(fA_{t+\triangle t}, fC_t) \geqslant \frac{(\inf m_{n-1}\,\sigma)^p}{m\,(fA_{t+\Delta t} \setminus fC_t)^{p-1}}, \qquad (3.30)$$

где $m_{n-1}\,\sigma$ – $(n-1)$-мерная мера Лебега $C^\infty$-многообразия $\sigma$, являющегося границей $\sigma = \partial U$ ограниченного открытого множества $U$, содержащего $fC_t$ и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в $fA_{t+\triangle t}$, а точная нижняя грань берется по всем таким $\sigma$.

С другой стороны, в силу леммы 3.1 имеем

$$\mathrm{cap}_p\,(fA_{t+\triangle t}, fC_t) \leqslant \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}}\, q^{\frac{1}{p-1}}(s)}\right)^{p-1}}. \qquad (3.31)$$

Комбинируя неравенства (3.30) и (3.31), получаем

$$\frac{(\inf m_{n-1}\,\sigma)^p}{m\,(fA_{t+\Delta t} \setminus fC_t)^{p-1}} \leqslant \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}}\, q^{\frac{1}{p-1}}(s)}\right)^{p-1}}.$$

Далее, воспользовавшись изопериметрическим неравенством

$$\inf m_{n-1}\,\sigma \geqslant n \cdot \Omega_n^{\frac{1}{n}}\,(m(fC_t))^{\frac{n-1}{n}},$$

находим

$$n\cdot\Omega_n^{\frac{1}{n}}\left(m(fC_t)\right)^{\frac{n-1}{n}}\leqslant\omega_{n-1}^{\frac{1}{p}}\left(\frac{m\left(fA_{t+\Delta t}\setminus fC_t\right)}{\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}}\,q^{\frac{1}{p-1}}(s)}}\right)^{\frac{p-1}{p}}. \tag{3.32}$$

Полагая $\Phi(t):=m\left(fB_t\right)$, из соотношения (3.32) имеем, что

$$n\cdot\Omega_n^{\frac{1}{n}}\Phi^{\frac{n-1}{n}}(t)\leqslant\omega_{n-1}^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\frac{\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)}{\Delta t}}{\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}}\,q^{\frac{1}{p-1}}(s)}}\right)^{\frac{p-1}{p}}. \tag{3.33}$$

Заметим, что в силу теоремы 3.2 и гомеоморфности отображения $f$,

$$\frac{1}{s^{\frac{n-1}{p-1}}\,q^{\frac{1}{p-1}}(s)}\in L^1_{\mathrm{loc}}(0,1).$$

Устремляя в неравенстве (3.33) $\Delta t$ к нулю и учитывая монотонное возрастание функции $\Phi(t)$ по $t\in(0,1)$ и равенство $\omega_{n-1}=n\Omega_n$, для п.в. $t$ имеем существование производной $\Phi'(t)$ и

$$\frac{n\Omega_n^{\frac{p-n}{n(p-1)}}}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\,q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\leqslant\frac{\Phi'(t)}{\Phi^{\frac{p(n-1)}{n(p-1)}}(t)}. \tag{3.34}$$

Рассмотрим неравенство (3.34) при $1<p<n$. Интегрируя обе части неравенства по $t\in[r,1]$ и учитывая, что

$$\int\limits_r^1\frac{\Phi'(t)}{\Phi^{\frac{p(n-1)}{n(p-1)}}(t)}\,dt\leqslant\frac{n(p-1)}{p-n}\left(\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(1)-\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(r)\right),$$

см., напр., теорему IV. 7.4 в [88], получаем

$$\Omega_n^{\frac{p-n}{n(p-1)}}\int\limits_r^1\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\,q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\leqslant\frac{p-1}{p-n}\left(\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(1)-\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(r)\right). \tag{3.35}$$

Из неравенства (3.35) следует, что

$$\Phi(r)\leqslant\left(\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(1)+\Omega_n^{\frac{p-n}{n(p-1)}}\,\frac{n-p}{p-1}\int\limits_r^1\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\,q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}}.$$

Наконец, учитывая, что $m(f\mathbb{B}^n) \leqslant \Omega_n$, приходим к (3.27).

Осталось рассмотреть случай $p = n$. В этом случае неравенство (3.34) примет вид

$$\frac{n}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)} \leqslant \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}. \tag{3.36}$$

Интегрируя обе части неравенства (3.36) по $t \in [r, 1]$, учитывая, что

$$\int\limits_r^1 \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} dt \leqslant \ln \frac{\Phi(1)}{\Phi(r)},$$

см., напр., теорему IV. 7.4 в [88], получим

$$n \int\limits_r^1 \frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)} \leqslant \ln \frac{\Phi(1)}{\Phi(r)}.$$

И, следовательно, имеем

$$\exp\left\{ n \int\limits_r^1 \frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)} \right\} \leqslant \frac{\Phi(1)}{\Phi(r)},$$

а потому

$$\Phi(r) \leqslant \Phi(1) \cdot \exp\left\{ -n \int\limits_r^1 \frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)} \right\},$$

что и приводит нас к неравенству (3.28) поскольку $\Phi(1) \leqslant \Omega_n$. □

Следующий результат был впервые доказан в работе [296].

**Теорема 3.3.** *Пусть $p \in (1, n]$ и $Q_p : \mathbb{B} \to [0, \infty)$ заданная локально интегрируемая функция такая, что*

$$\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\, q^{\frac{1}{p-1}}(t)} = \infty \tag{3.37}$$

*и*

$$\int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\, q^{\frac{1}{p-1}}(t)} < \infty \tag{3.38}$$

*для всякого $r \in (0,1)$. Тогда отображения*

$$f_p(x) = \frac{x}{|x|}\left(1 + \frac{n-p}{p-1}\int\limits_{|x|}^{1} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\, q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{-\frac{p-1}{n-p}} \tag{3.39}$$

*и при $p = n$*

$$f_n(x) = \frac{x}{|x|}\exp\left\{-\int\limits_{|x|}^{1} \frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\} \tag{3.40}$$

*являются кольцевыми $Q_p$-гомеоморфизмом относительно $p$-модуля в нуле, для которых выполняются равенства в (3.27) и (3.28), соответственно.*

**Доказательство.** Покажем, что отображения определенные таким образом, действительно, является кольцевыми $Q$-гомеоморфизмами относительно $p$-модуля в точке $x_0 = 0$. Рассмотрим кольцо $A = A(0, r_1, r_2)$. Обозначим через $\Gamma$ семейство всех кривых, соединяющих сферы $S(0, r_1)$ и $S(0, r_2)$ в кольце $A$. Заметим, что отображение преобразует кольцо $A(0, r_1, r_2)$ в кольцо $\widetilde{A} = (0, R_p(r_1), R_p(r_2))$, где

$$R_p(r_i) = exp\left\{-\int\limits_{r_i}^{1} \frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\} \tag{3.41}$$

при $p = n$ и

$$R_p(r_i) = \left(1 + \frac{n-p}{p-1}\int\limits_{r}^{1} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\, q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{-\frac{p-1}{n-p}} \tag{3.42}$$

при $1 < p < n$.

Тогда $p$-модуль семейства кривых вычисляется в явном виде, см., напр., соотношение (2) на с. 177 в [172]

$$M_p(f\Gamma) = \omega_{n-1}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(R^{\frac{p-n}{p-1}}(r_1) - R^{\frac{p-n}{p-1}}(r_2)\right)^{1-p}, \tag{3.43}$$

при $1 < p < n$ и

$$M_n(f\Gamma) = \frac{\omega_{n-1}}{\ln\left(\frac{R_n(r_2)}{R_n(r_1)}\right)^{n-1}}, \tag{3.44}$$

при $p = n$.

Подставляя в (3.44) значения $R(r_1)$ и $R(r_2)$ определенные выше, получаем, что

$$M_p(f\Gamma) = \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{p-1}}.$$

Следовательно, в силу теоремы 3.1 гомеоморфизм $f_n$ является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом относительно $p$-модуля в точке $x_0 = 0$. $\Box$

**Замечание 3.1.** Предыдущая теорема показывает точность оценок (3.27) и (3.28). В частности, выбирая $q(t) = 1$, получаем простые примеры таких отображений.

### 3.4. Поведение в точке

В 1965 г. К. Икома получил следующий аналог леммы Шварца для аналитических функций, доказанный им для квазиконформных отображений трехмерного пространства (см., например, теорему 2 в [213]).

**Утверждение.** *Предположим, что $f : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}^3$ – квазиконформное отображение, удовлетворяющее условию $f(0) = 0$ преобразующее каждый радиус единичного шара в кривую, ортогональную к образу сферы $|x| = r$ при всех $0 < r < 1$. Тогда*

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{K^{-1/2}}} \leqslant 1\,,$$

*где $K$ – постоянная квазиконформности.*

Теорема, приведенная в предыдущем параграфе, позволяет нам также описать асимптотическое поведение кольцевых $Q$-гомеоморфизмов относительно $p$-модуля в нуле.

**Предложение 3.1.** *Пусть $f$ – гомеоморфизм $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{B}^n$, $n \geqslant 2$, $f(0) = 0$. Если*

$$m(fB_r) \leqslant \Omega_n\, \mathcal{R}^n(r), \tag{3.45}$$

*то*

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{\mathcal{R}(|x|)} \leqslant 1. \tag{3.46}$$

**Доказательство.** Положим $l_f(r) = \min\limits_{|x|=r} |f(x)|$. Тогда, учитывая, что $f(0)=0$, получаем $\Omega_n\, l_f^n(r) \leqslant m(fB_r)$ и, следовательно,

$$l_f(r) \leqslant \left(\frac{m(fB_r)}{\Omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{3.47}$$

Таким образом, учитывая неравенство (3.45), имеем

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{\mathcal{R}(|x|)} = \liminf_{r\to 0} \frac{l_f(r)}{\mathcal{R}(r)} \leqslant \liminf_{r\to 0} \left(\frac{m(fB_r)}{\Omega_n}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\mathcal{R}(r)} \leqslant 1.$$

Предложение доказано. □

Комбинируя теорему 3.2 и предложение 3.1 с функцией

$$\mathcal{R}(r) = \left(1 + \frac{n-p}{p-1} \int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\, q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{-\frac{p-1}{n-p}}$$

при $1<p<n$ и $\mathcal{R}(r) = \exp\left\{-\int\limits_r^1 \frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}$ при $p=n$, получаем следующий результат, см. [89] и [90], см. также [92].

**Теорема 3.4.** *Пусть $f$ – кольцевой $Q$-гомеоморфизм относительно $p$-модуля $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{B}^n$, $n \geqslant 2$ и $f(0)=0$. Тогда при $1<p<n$ имеет место оценка*

$$\liminf_{x\to 0} |f(x)| \cdot \left(1 + \frac{n-p}{p-1} \int\limits_{|x|}^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\, q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{p-1}{n-p}} \leqslant 1, \tag{3.48}$$

*а при $p=n$*

$$\liminf_{x\to 0} |f(x)| \cdot \exp\left\{\int\limits_{|x|}^1 \frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\} \leqslant 1\,. \tag{3.49}$$

**Следствие 3.1.** *Пусть $f$ – кольцевой $Q$-гомеоморфизм относительно $p$-модуля $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{B}^n$, $n \geqslant 2$ и $f(0)=0$. Тогда при $1<p<n$ имеет место оценка*

$$\liminf_{x\to 0} |f(x)| \cdot \left(\int\limits_{|x|}^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\, q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{p-1}{n-p}} < \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{\frac{p-1}{n-p}}. \tag{3.50}$$

### 3.5. Конечная липшицевость кольцевых $Q$-гомеоморфизмов относительно $p$-модуля

Пусть $G$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Для непрерывного отображения $f : G \to \to \mathbb{R}^n$ и $x \in G \subseteq \mathbb{R}^n$, положим

$$L(x, f) = \limsup_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}\,.$$

Говорят, что отображение $f$ является **конечно липшицевым**, если $L(x, f) < \infty$ для всех $x \in G$.

Предположим, что $n - 1 < p < n$ и

$$M_p(f\Gamma) \leqslant K\, M_p(\Gamma) \tag{3.51}$$

для произвольного семейства $\Gamma$ кривых $\gamma$ в области $G$. При предположении, что $f$ в (3.51) является гомеоморфизмом, Герингом было установлено, что отображение $f$ является **липшицевым**, другими словами, при некоторой постоянной $C > 0$ и всех $x_0 \in G$ справедлива оценка

$$\limsup_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leqslant C,$$

см., напр., теорему 2 в [172].

Ниже приведена лемма из работы [296] о достаточном условии локальной липшицевости в точке для кольцевых $Q$-гомеоморфизмов относительно $p$-модуля при $n - 1 < p < n$.

**Лемма 3.3.** *Пусть $G$ и $G'$ – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $f : G \to G'$ – кольцевой $Q$-гомеоморфизм относительно $p$-модуля в точке $x_0 \in G$ и*

$$Q_0 = \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\, dm(x) < \infty.$$

*Тогда при $n - 1 < p < n$ имеем*

$$L(x_0, f) = \limsup_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leqslant \lambda_{n,p}\, Q_0^{\frac{1}{n-p}},$$

*где $\lambda_{n,p}$ – положительная постоянная, зависящая только от $n$ и $p$.*

**Доказательство.** Рассмотрим сферическое кольцо $A = A(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ с $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ такое, что $A(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \subset G$. Тогда $\left(fB\left(x_0, \varepsilon_2\right), \overline{fB\left(x_0, \varepsilon_1\right)}\right)$ – кольцевой конденсатор в $G'$ и, согласно [305], имеем равенство

$$\operatorname{cap}_p\left(fB(x_0, \varepsilon_2), \overline{fB(x_0, \varepsilon_1)}\right) = M_p(\triangle(\partial fB(x_0, \varepsilon_2), \partial fB(x_0, \varepsilon_1); fA))$$

а ввиду гомеоморфности $f$, равенство

$$\triangle\left(\partial fB\left(x_0, \varepsilon_2\right), \partial fB\left(x_0, \varepsilon_1\right); fA\right) = f\left(\triangle\left(\partial B(x_0, \varepsilon_2), \partial B(x_0, \varepsilon_1); A\right)\right).$$

Рассмотрим функцию

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}, & t \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (\varepsilon_1, \varepsilon_2). \end{cases}$$

В силу определения кольцевого $Q$-гомеоморфизма относительно $p$-модуля, замечаем, что

$$\operatorname{cap}_p\left(fB(x_0, \varepsilon_2), \overline{fB(x_0, \varepsilon_1)}\right) \leqslant \frac{1}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^p} \int\limits_{A(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)} Q(x)\, dm(x)\,. \tag{3.52}$$

Далее, выбирая $\varepsilon_1 = 2\varepsilon$ и $\varepsilon_2 = 4\varepsilon$, получим

$$\operatorname{cap}_p\left(fB(x_0, 4\varepsilon), f\overline{B(x_0, 2\varepsilon)}\right) \leqslant \frac{1}{(2\varepsilon)^p} \int\limits_{B(x_0, 4\varepsilon)} Q(x)\, dm(x)\,. \tag{3.53}$$

С другой стороны, в силу неравенства (3.12) вытекает оценка

$$\operatorname{cap}_p\left(fB(x_0, 4\varepsilon), f\overline{B(x_0, 2\varepsilon)}\right) \geqslant C_{n,p}\left[m(fB(x_0, 2\varepsilon))\right]^{\frac{n-p}{n}}\,, \tag{3.54}$$

где $C_{n,p}$ – положительная константа, зависящая только от размерности пространства $n$ и $p$.

Комбинируя (3.53) и (3.54), получаем, что

$$\frac{m(fB(x_0, 2\varepsilon))}{m(B(x_0, 2\varepsilon))} \leqslant c_{n,p}\left[\fint_{B(x_0, 4\varepsilon)} Q(x)\, dm(x)\right]^{\frac{n}{n-p}}\,, \tag{3.55}$$

где $c_{n,p}$ – положительная постоянная зависящая только от $n$ и $p$.

Далее, выбирая в (3.52) $\varepsilon_1 = \varepsilon$ и $\varepsilon_2 = 2\varepsilon$, получим

$$\operatorname{cap}_p\left(fB(x_0, 2\varepsilon), f\overline{B(x_0, \varepsilon)}\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^p} \int\limits_{B(x_0, 2\varepsilon)} Q(x)\, dm(x)\,. \tag{3.56}$$

С другой стороны, в силу неравенства (3.13), получаем

$$\operatorname{cap}_p\left(fB(x_0,2\varepsilon), f\overline{B(x_0,\varepsilon)}\right) \geqslant \left(\widetilde{C}_{n,p}\frac{d^p(fB(x_0,\varepsilon))}{m^{1-n+p}(fB(x_0,2\varepsilon))}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \qquad (3.57)$$

где $\widetilde{C}_{n,p}$ – положительная константа, зависящая только от $n$ и $p$.

Комбинируя (3.56) и (3.57), получаем, что

$$\frac{d(fB(x_0,\varepsilon))}{\varepsilon} \leqslant \gamma_{n,p}\left(\frac{m(fB(x_0,2\varepsilon))}{m(B(x_0,2\varepsilon))}\right)^{\frac{1-n+p}{p}}\left(\fint_{B(x_0,2\varepsilon)} Q(x)\,dm(x)\right)^{\frac{n-1}{p}}.$$

Эта оценка вместе с (3.55) дает неравенство

$$\frac{d(fB(x_0,\varepsilon))}{\varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_{n,p}\left(\fint_{B(x_0,4\varepsilon)} Q(x)\,dm(x)\right)^{\frac{n(1-n+p)}{p(n-p)}}\left[\fint_{B(x_0,2\varepsilon)} Q(x)\,dm(x)\right]^{\frac{n-1}{p}}.$$

Переходя к верхнему пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$L(x_0,f) = \limsup_{x\to x_0}\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \leqslant \limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{d(fB(x_0,\varepsilon))}{\varepsilon} \leqslant \lambda_{n,p}\, Q_0^{\frac{1}{n-p}},$$

где $\lambda_{n,p}$ – положительная постоянная, зависящая только от $n$ и $p$. □

Таким образом, получаем следующую теорему из работы [296] о достаточном условии конечной липшицевости для кольцевых $Q$-гомеоморфизмов относительно $p$-модуля.

**Теорема 3.5.** *Пусть $G$ и $G'$ – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $f : G \to G'$ – кольцевой $Q$-гомеоморфизм относительно $p$-модуля при $n-1 < p < n$ и*

$$Q_0 = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,\frac{1}{\Omega_n\varepsilon^n}\int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\,dm(x) < \infty \quad \forall\; x_0 \in G.$$

*Тогда гомеоморфизм $f$ является конечно липшицевым.*

**Замечание 3.2.** В соответствии с леммой 10.6 в [252] конечно липшицевые отображения обладают $N$-свойством относительно хаусдорфовых мер и, таким образом, являются абсолютно непрерывными на кривых и поверхностях.

Построим пример кольцевого $Q$-гомеоморфизма относительно $p$-модуля в фиксированной точке, не являющегося конечно липшицевым.

**Пример.** Предположим, что $n-1<p<n$. Пусть $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$, где

$$f(x)=\frac{x}{|x|}\left(1+\frac{n-p}{p-1}\int\limits_{|x|}^{1}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\ln^{\frac{1}{p-1}}\left(\frac{e}{t}\right)}\right)^{-\frac{p-1}{n-p}}$$

при $x\neq 0$ и $f(0)=0$. Покажем, что отображение, определенное таким образом, является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом относительно $p$-модуля с $Q(x)=\ln\frac{e}{|x|}$ в точке $x_0=0$. Очевидно, что $q_{x_0}(t)=\ln\frac{e}{t}$. Рассмотрим кольцо $A(0,r_1,r_2)$, $0<r_1<r_2<1$. Заметим, что отображение $f$ преобразует кольцо $A(0,r_1,r_2)$ в кольцо $\widetilde{A}\,(0,\widetilde{r}_1,\widetilde{r}_2)$, где

$$\widetilde{r}_i=\left(1+\frac{n-p}{p-1}\int\limits_{r_i}^{1}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\ln^{\frac{1}{p-1}}\left(\frac{e}{t}\right)}\right)^{-\frac{p-1}{n-p}},\quad i=1,2\,.$$

Обозначим через $\Gamma$ семейство всех кривых, соединяющих сферы $S(0,r_1)$ и $S(0,r_2)$ в кольце $A(0,r_1,r_2)$. Тогда $p$-модуль семейства кривых $f\Gamma$ вычисляется в явном виде, см., напр., соотношение (2) на с. 177 в [172],

$$M_p(f\Gamma)=\omega_{n-1}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left((\widetilde{r}_1)^{\frac{p-n}{p-1}}-(\widetilde{r}_2)^{\frac{p-n}{p-1}}\right)^{1-p}\,. \tag{3.58}$$

Подставляя в (3.58) значения $\widetilde{r}_1$ и $\widetilde{r}_2$, определенные выше, получаем, что

$$M_p(f\Gamma)=\frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\ln^{\frac{1}{p-1}}\left(\frac{e}{t}\right)}\right)^{p-1}}\,.$$

Следовательно, в силу теоремы 1 гомеоморфизм $f$ является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом относительно $p$-модуля в точке $x_0=0$ с $Q(x)=$ $=\ln\frac{e}{|x|}$. Заметим, что

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\;⨍_{B(x_0,\varepsilon)}Q(x)\,dm(x)=\infty\,.$$

Тем не менее, как легко проверить по правилу Лопиталя, $\frac{|f(x)|}{|x|}\to\infty$ при $x\to 0$, т.е. гомеоморфизм $f$ не является липшицевым в нуле.

### 3.6. Модули семейств поверхностей

Пусть $\omega$ – открытое множество в $\overline{\mathbb{R}^k}$ и $k = 1, \ldots, n-1$. Тогда **$k$-мерной поверхностью** $S$ в $\mathbb{R}^n$ называется произвольное непрерывное отображение $S : \omega \to \mathbb{R}^n$. **Функцией кратности** поверхности $S$ называется число прообразов

$$N(S, y) = \operatorname{card} S^{-1}(y) = \operatorname{card}\{x \in \omega : \ S(x) = y\}, \quad y \in \mathbb{R}^n\,. \tag{3.59}$$

Другими словами, символ $N(S,y)$ обозначает кратность накрытия точки $y$ поверхностью $S$. Хорошо известно, что функция кратности является полунепрерывной снизу, т.е., для каждой последовательности $y_m \in \mathbb{R}^n$, $m = 1, 2, \ldots$, такой что $y_m \to y \in \mathbb{R}^n$ при $m \to \infty$, выполняется условие

$$N(S, y) \geqslant \liminf_{m\to\infty} \ N(S, y_m)\,,$$

см., напр., [270], с. 160. Отсюда следует, что функция $N(S,y)$ является измеримой по Борелю и, следовательно, измеримой относительно произвольной хаусдорфовой меры $H^k$, см., напр., теорему II (7.6) в [88].

Напомним, что для каждого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^n$ или даже, более общо, для произвольного множества $B$, измеримого относительно меры $H^k$ в $\mathbb{R}^n$, **$k$-мерной хаусдорфовой площадью множества B в $\mathbb{R}^n$** (либо просто **площадью B**), ассоциированной с поверхностью $S : \omega \to \mathbb{R}^n$, называется величина

$$\mathcal{A}_S(B) = \mathcal{A}_S^k(B) := \int\limits_B N(S, y)\, dH^k y\,, \tag{3.60}$$

см., напр., разд. 3.2.1 в [164]. Поверхность $S$ называется **спрямляемой**, если $\mathcal{A}_S(\mathbb{R}^n) < \infty$, и **локально спрямляемой**, если $\mathcal{A}_S(C) < \infty$ для любого компакта $C \subset \mathbb{R}^n$, см., напр., разд. 9.2 в [252].

Для борелевской функции $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ её **интеграл над поверхностью** $S$ определяется равенством

$$\int\limits_S \rho\, d\mathcal{A} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(y)\ N(S, y)\, dH^k y\,. \tag{3.61}$$

Пусть $\Gamma$ – семейство $k$-мерных поверхностей $S$. Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется **допустимой** для семейства $\Gamma$, пишем $\rho \in$ $\in \operatorname{adm}\Gamma$, если для каждой поверхности $S \in \Gamma$

$$\int\limits_S \rho^k\, d\mathcal{A} \geqslant 1. \tag{3.62}$$

Пусть $p \in (0, \infty)$ – заданное фиксированное число. Тогда **$p$-модулем** семейства $\Gamma$ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\ dm(x). \tag{3.63}$$

Мы также полагаем

$$M(\Gamma) = M_n(\Gamma) \tag{3.64}$$

и называем величину $M(\Gamma)$ **модулем семейства** $\Gamma$. Отметим, что так определенный модуль является внешней мерой в пространстве всех $k$-мерных поверхностей.

Будем говорить, что семейство $\Gamma_2$ **минорируется** семейством $\Gamma_1$, пишем $\Gamma_2 > \Gamma_1$, если каждая поверхность $S \subset \Gamma_2$ содержит подповерхность, принадлежащую $\Gamma_1$. Известно, что условие $\Gamma_2 > \Gamma_1$ влечёт выполнение неравенства $M_p(\Gamma_2) \leqslant M_p(\Gamma_1)$, см. [169], с. 176-178. Будем говорить, что свойство $P$ имеет место для **$p$-почти всех** ($p$-п.в.) $k$-мерных поверхностей $S$ семейства $\Gamma$, если подсемейство всех поверхностей семейства $\Gamma$, для которых свойство $P$ нарушается, имеет $p$-модуль нуль. Заметим, что при $0 < q < p$ свойство $P$ имеет место также и для $q$-почти всех спрямляемых $S$, см., напр., теорему 3 в [169]. В случае $p = n$ мы будем писать просто п.в. ("почти всех").

**Замечание 3.3.** Из определения модуля следует, что для каждого $p \in (0, \infty)$ и $k = 1, \ldots, n-1$

(1) $p$-п.в. $k$-мерные поверхности в $\mathbb{R}^n$ локально спрямляемы,

(2) для борелевских множеств $B$ в $\mathbb{R}^n$, имеющих меру Лебега нуль, выполнено условие

$$\mathcal{A}_S(B) = 0 \tag{3.65}$$

для $p$-п.в. $k$-мерных поверхностей $S$ в $\mathbb{R}^n$.

Следующая лемма впервые была получены в работе [232], см. также лемму 9.1 в [252].

**Лемма 3.4.** *Пусть $k = 1, \ldots, n-1$, $p \in [k, \infty)$, и пусть $C$ – открытый куб в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, чьи рёбра параллельны координатным осям. Если свойство $P$ имеет место для $p$-п.в. $k$-мерных поверхностей $S$ в $C$, то $P$ также имеет место для п.в. $k$-мерных плоскостей в $C$, параллельных $k$-мерной координатной плоскости $H$.*

Последнее п.в. понимается относительно меры Лебега в соответствующей $(n-k)$-мерной координатной плоскости $H^{\perp}$, перпендикулярной к $H$.

Следующее утверждение, см. теорему 2.4 в работе [232], см. также теорему 9.1 в монографии [252], является аналогом теоремы Фубини, см. для сравнения теорему III (8.1) в [88]. Это утверждение является обобщением теоремы 33.1 в [320], см. для сравнения также теорему 3 в [169], лемму 2.13 в [249] и лемму 8.1 в [252].

**Теорема 3.6.** *Пусть $k = 1, \ldots, n-1$, $p \in [k, \infty)$, и $E$ – некоторое подмножество открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Тогда $E$ измеримо по Лебегу в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $E$ измеримо по отношению к мере площади на $p$-п.в. $k$-мерных поверхностях $S$ в $\Omega$. Более того, $|E| = 0$ тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{A}_S(E) = 0 \tag{3.66}$$

*на $p$-п.в. $k$-мерных поверхностях $S$ в $\Omega$.*

**Замечание 3.4.** Из теоремы Лузина, см., напр., теорему 2.3.5 в [164], следует справедливость следующего утверждения. Для каждой измеримой функции $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ существует борелевская функция $\rho^* : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, такая что $\rho^* = \rho$ почти всюду в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, для каждого $p \in (0, \infty)$ и $k = 1, \ldots, n-1$, по теореме 3.6 такая функция $\rho$ измерима на $p$-п.в. $k$-мерных поверхностях $S$ в $\mathbb{R}^n$.

Будем говорить, что измеримая по Лебегу функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ является **обобщённо p-допустимой** для семейства $\Gamma$, состоящего из $k$-мерных поверхностей $S$ в $\mathbb{R}^n$, пишем $\rho \in \mathrm{ext}_p \,\mathrm{adm}\, \Gamma$, если

$$\int\limits_S \rho^k \, d\mathcal{A} \geqslant 1 \tag{3.67}$$

для $p$-п.в. $S \in \Gamma$. Далее, **обобщённым $p$-модулем** $\overline{M}_p(\Gamma)$ семейства $\Gamma$ называется величина

$$\overline{M}_p(\Gamma) = \inf \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x) \, dm(x) \,, \tag{3.68}$$

где точная нижняя грань берётся по всем $\rho \in \mathrm{ext}_p \,\mathrm{adm}\, \Gamma$. Очевидно, что для каждого $p \in (0, \infty)$, $k = 1, \ldots, n-1$, и каждого семейства $\Gamma$, состоящего из $k$-мерных поверхностей в $\mathbb{R}^n$, имеет место равенство

$$\overline{M}_p(\Gamma) = M_p(\Gamma) \,. \tag{3.69}$$

### 3.7. Нижние $Q$-гомеоморфизмы относительно $p$-модуля

В работе [171], разд. 13, Ф. Геринг определил $K$-квазиконформное отображение как гомеоморфизм, изменяющий модуль кольцевой области не более чем в $K$ раз. Следующее понятие мотивировано кольцевым определением Геринга.

Пусть $D$ и $D'$ – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$, $Q : D \to (0, \infty)$ измеримая по Лебегу функция. Гомеоморфизм $f : D \to D'$ будем называть **нижним Q-гомеоморфизмом в точке** $x_0$, если

$$M_p\left(f\left(\Sigma_\varepsilon\right)\right) \geqslant \inf_{\rho \in \mathrm{ext_p\, adm}\, \Sigma_\varepsilon} \int\limits_{D \cap A_\varepsilon} \frac{\rho^p(x)}{Q(x)}\, dm(x) \tag{3.70}$$

для каждого кольца $A_\varepsilon = A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0\}$, $\varepsilon \in$ $\in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in (0, d_0)$, где

$$d_0 = \sup_{x \in D} |x - x_0|\,, \tag{3.71}$$

а $\Sigma_\varepsilon$ обозначает семейство всех пересечений сфер

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}\,, \qquad r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)\,,$$

с областью $D$.

Прежде чем доказывать основную лемму о нижних $Q$-гомеоморфизмах относительно $p$-модуля, приведем вспомогательную лемму 2.1 из работы [40], см. лемму 9.2 в монографии [252].

**Лемма 3.5.** *Пусть $(X, \mu)$ – измеримое пространство с конечной мерой $\mu$, $q \in (1, \infty)$, и пусть $\varphi : X \to (0, \infty)$ – измеримая функция. Положим*

$$I(\varphi, q) = \inf_{\alpha} \int\limits_X \varphi\, \alpha^q\, d\mu\,, \tag{3.72}$$

*где инфимум берется по всем измеримым функциям $\alpha : X \to [0, \infty]$ таким, что*

$$\int\limits_X \alpha\, d\mu = 1\,. \tag{3.73}$$

*Тогда*

$$I(\varphi, q) = \left[\int\limits_X \varphi^{-\lambda}\, d\mu\right]^{-\frac{1}{\lambda}}\,, \tag{3.74}$$

*где*

$$\lambda = \frac{q'}{q}\,, \qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1\,, \tag{3.75}$$

*т.е.* $\lambda = 1/(q-1) \in (0,\infty)$. *Кроме того, инфимум в (3.72) достигается только для функции*

$$\alpha_0 = C \cdot \varphi^{-\lambda}\,, \tag{3.76}$$

*где*

$$C = \left(\int\limits_X \varphi^{-\lambda}\, d\mu\right)^{-1}. \tag{3.77}$$

Следующий критерий нижних $Q$-гомеоморфизмов, см. статью [182], впервые был доказан при $p = n$ в работе [40], теорема 2.1, см. также монографию [252], теорема 9.2.

**Теорема 3.7.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in \overline{D}$, и пусть $Q : D \to (0,\infty)$ – измеримая функция. Гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$ является нижним $Q$-гомеоморфизмом в точке $x_0$ относительно $p$-модуля при $p > n-1$ тогда и только тогда, когда*

$$M_p(f\Sigma_\varepsilon) \geqslant \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{||\,Q||_{\,s}(r)} \quad \forall\, \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)\,, \quad \varepsilon_0 \in (0,d_0)\,, \tag{3.78}$$

*где* $s = \frac{n-1}{p-n+1}$,

$$d_0 = \sup_{x\in D} |x - x_0|\,, \tag{3.79}$$

$\Sigma_\varepsilon$ *– семейство всех пересечений сфер* $S(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |\,x - x_0| = r\}$, $r \in (\varepsilon,\varepsilon_0)$, *с* $D$, *и*

$$\|Q\|_s(r) = \left(\int\limits_{D(x_0,r)} Q^s(x)\, d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{s}}, \tag{3.80}$$

*где* $D(x_0,r) = \{x \in D : |\,x - x_0| = r\} = D \cap S(x_0,r)$. *Инфимум в (3.70) достигается только для функции*

$$\varrho_0(x) = \frac{Q(x)}{\|Q\|_s(|x - x_0|)}\,. \tag{3.81}$$

**Доказательство.** Отметим, что в (3.70) по теореме Лузина

$$\inf_{\varrho\in\mathrm{adm}\Sigma_\varepsilon}\int\limits_{D\cap R_\varepsilon}\frac{\varrho^p(x)}{Q(x)}\,dm(x)=\inf_{\varrho\in\mathrm{e}xt_p\,\mathrm{adm}\Sigma_\varepsilon}\int\limits_{D\cap R_\varepsilon}\frac{\varrho^p(x)}{Q(x)}\,dm(x)\,.$$

Кроме того, для каждой $\varrho\in\mathrm{e}xt_p\,\mathrm{a}dm\,\Sigma_\varepsilon$ функция

$$A_\varrho(r):=\int\limits_{D(x_0,r)}\varrho^{n-1}(x)\,d\mathcal{A}\neq 0\qquad\text{п.в.}$$

является измеримой по параметру $r$, например, по теореме Фубини. Таким образом, мы можем требовать равенство $A_\varrho(r)\equiv 1$ п.в. вместо (3.67), и

$$\inf_{\varrho\in\mathrm{ext\ adm}\Sigma_\varepsilon}\int\limits_{D\cap R_\varepsilon}\frac{\varrho^p(x)}{Q(x)}\,dm(x)=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\left(\inf_{\alpha\in I(r)}\int\limits_{D(x_0,r)}\frac{\alpha^q(x)}{Q(x)}\,d\mathcal{A}\right)dr\,,$$

где $q=p/(n-1)>1$, а через $I(r)$ обозначено множество всех измеримых функций $\alpha$ на поверхности $D(x_0,r)=S(x_0,r)\cap D$ таких, что

$$\int\limits_{D(x_0,r)}\alpha(x)\,d\mathcal{A}=1\,.$$

Итак, теорема 3.7 следует из леммы 3.5 при $X=D(x_0,r)$, $\mu$ – $(n-1)$-мерная площадь на $D(x_0,r)$, $\varphi=\frac{1}{Q}|_{D(x_0,r)}$, и $q=p/(n-1)>1$. Теорема доказана. □

Таким образом, неравенство (3.78) является точным для нижних $Q$-гомеоморфизмов относительно $p$-модуля.

### 3.8. Взаимосвязь нижних и верхних модульных неравенств

Следующую теорему можно найти в работе [182]. Впервые этот результат был доказан при $p=n$ в препринте [233] как следствие 8.1.

**Теорема 3.8.** *В $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, всякий нижний $Q$-гомеоморфизм относительно $p$-модуля $f:D\to D'$ в точке $x_0\in D$, при $p>n-1$ и $Q\in L^{\frac{n-1}{p-n+1}}_{\mathrm{loc}}(D)$ является кольцевым $Q_*$-гомеоморфизмом относительно $\frac{p}{p-n+1}$-модуля в $x_0$ с $Q_*(x)=Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)$.*

**Доказательство.** Действительно, пусть $0 < r_1 < r_2 < d(x_0, \partial D)$ и $S_i = S(x_0, r_i)$, $i = 1, 2$. Согласно неравенствам Хессе и Цимера (см., напр., [204] и [327], а также приложения А3 и А6 в [252]),

$$M_{\frac{p}{p-n+1}}\left(f\left(\Gamma(S_1, S_2, D)\right)\right) \leqslant \frac{1}{M_p^{\frac{n-1}{p-n+1}}(f(\Sigma))}\,, \tag{3.82}$$

поскольку $f(\Sigma) \subset \Sigma\left(f(S_1), f(S_2), f(D)\right)$, где $\Sigma$ обозначает совокупность всех сфер с центром в точке $x_0$, расположенных между сферами $S_1$ и $S_2$, а $\Sigma\left(f(S_1), f(S_2), f(D)\right)$ состоит из всех $(n-1)$-мерных поверхностей в $f(D)$, отделяющих $f(S_1)$ и $f(S_2)$. Из соотношения (3.82) по теореме 3.7 получаем, что

$$M_{\frac{p}{p-n+1}}\left(f\left(\Gamma(S_1, S_2, D)\right)\right) \leqslant \left(\frac{1}{\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}}\right)^{\frac{n-1}{p-n+1}} = \frac{\omega_{n-1}}{I^{\frac{n-1}{p-n+1}}}\,. \tag{3.83}$$

Наконец, из (3.83) по теореме 3.1 получаем заключение теоремы 3.8. □

# Глава 4. Граничное поведение кольцевых $Q$-гомеоморфизмов в метрических пространствах

В данной главе исследуется проблема продолжения на границу так называемых кольцевых $Q$-гомеоморфизмов между областями в метрических пространствах с мерами. Формулируются условия на функцию $Q(x)$ и границы областей, при которых всякий кольцевой $Q$-гомеоморфизм допускает непрерывное или гомеоморфное продолжение на границу. Результаты применимы, в частности, к римановым многообразиям, пространствам Левнера, группам Карно и Гейзенберга, см., напр., [97].

## 4.1. Введение

В последние годы на плоскости и в пространстве активно изучаются кольцевые $Q$-гомеоморфизмы, см., напр., [252]. Исторически им предшествовал более узкий класс $Q$-гомеоморфизмы, чья концепция была предложена Олли Мартио, см., напр., [85, 136, 250, 251]. Понятие кольцевых $Q$-гомеоморфизмов мотивировано определением квазиконформности по Герингу, см., напр., [171] и представляет собой обобщение и локализацию этого определения, которое впервые было введено и использовалось для изучения уравнений Бельтрами на плоскости в работе [286], см. также [86] в $\mathbb{R}^n$. Проблемы локального и граничного поведения $Q$-гомеоморфизмов в $\mathbb{R}^n$ изучались в случае $Q \in \mathrm{BMO}$ (ограниченного среднего колебания) в работах [250, 251], $Q \in \mathrm{FMO}$ (конечного среднего колебания) и в других случаях в работах [35,207]. В статье [85] изучались свойства слабо плоских пространств, которые являются далеко идущим обобщением недавно введенных пространств Левнера, см., напр., [130, 144, 197, 200, 314], которые включают в себя, в частности, широко известные группы Карно и Гейзенберга, см. [14,221,222,246,260,268]. На этой основе в работе [85] была построена теория граничного поведения и устранимых особенностей для $Q$-гомеоморфизмов, применимая во всех перечисленных классах пространств. Там же, в частности, были доказаны обобщение и усиление известной теоремы Геринга–Мартио о гомеоморфной продолжимости на границу квазиконформных отображений между областями квазиэкстремальной длины, см. [177].

В дальнейшем $(X, d, \mu)$ обозначает пространство $X$ с метрикой $d$ и локально конечной борелевской мерой $\mu$. **Областью** в $X$ будем называть открытое множество, любые две точки которого можно связать кривой в $D$.

Далее $H^k$, $k \in [0, \infty)$, обозначает **k-мерную меру Хаусдорфа** множества $A$ в метрическом пространстве $(X, d)$. Точнее, пусть $A$ множество в $(X, d)$. Тогда полагаем

$$H^k(A): \;=\; \sup_{\varepsilon>0} \, H^k_{\varepsilon}(A)\,, \tag{4.1}$$

$$H^k_{\varepsilon}(A): \;=\; \inf \, \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_i)^k\,, \tag{4.2}$$

где инфимум в (4.2) берётся по всем покрытиям $A$ множествами $A_i$ с $\operatorname{diam} A_i < \varepsilon$, см., напр., [206]. Напомним, что $\operatorname{diam} A_i = \sup\limits_{x,\,y\in A_i} d(x,y)$. Если для некоторого множества $A$ и $k_1 \geqslant 0$ выполнено условие $H^{k_1}(A) < < \infty$, то $H^{k_2}(A) = 0$ для произвольного числа $k_2 > k_1$, см., напр., разд. 1 в гл. VII в [206]. Величина

$$\dim_H A := \sup_{H^k(A)>0} k \tag{4.3}$$

называется **хаусдорфовой размерностью** множества $A$.

**Кривой** в метрическом пространстве $(X, d)$ называется непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \to X$. Её **длина** есть супремум сумм

$$\sum_{i=1}^{k} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) \tag{4.4}$$

над всеми разбиениями $a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_k = b$ интервала $[a, b]$. Кривая $\gamma$ называется **спрямляемой**, если ее длина конечна.

Борелева функция $\rho : X \to [0, \infty]$ называется **допустимой** для семейства кривых $\Gamma$ в $X$, пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int_{\gamma} \rho \, ds \geqslant 1 \tag{4.5}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. Здесь $ds$ относится к мере длины на $\gamma$.

**Модуль** семейства кривых $\Gamma$ в области $D$ из $X$ конечной хаусдорфовой размерности $\alpha > 1$ определяется равенством

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_D \rho^\alpha(x)\, d\mu(x). \tag{4.6}$$

Говорят, что семейство кривых $\Gamma_1$ в $T$ **минорируется** семейством кривых $\Gamma_2$ в $T$, пишут $\Gamma_1 > \Gamma_2$, если для каждой кривой $\gamma_1 \in \Gamma_1$ найдется кривая $\gamma_2 \in \Gamma_2$ такая, что $\gamma_2$ есть подкривая (сужение) $\gamma_1$. Известно, что $M(\Gamma_2) \geqslant M(\Gamma_1)$, см., напр., [169].

Пусть $D$ и $D'$ – области с конечными хаусдорфовыми размерностями $\alpha$ и $\alpha' > 1$ в пространствах $(X, d, \mu)$ и $(X', d', \mu')$, соответственно, и пусть $Q : X \to (0, \infty)$ – измеримая функция.

В дальнейшем для любых множеств $E$, $F$ и $D$ в $X$ через $\triangle(E, F; D)$ обозначается семейство всех кривых $\gamma : [0, 1] \to X$ с $\gamma(0) \in E$, $\gamma(1) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ для всех $t \in (0, 1)$.

Будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \to D'$ называется **кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке $\mathbf{x_0} \in \overline{\mathbf{D}}$,** если

$$M(\Delta(f C_0, f C_1; D')) \leqslant \int\limits_{A \cap D} Q(x) \cdot \eta^\alpha(d(x, x_0))\, d\mu(x) \tag{4.7}$$

выполняется для любого кольца $A = A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in X : r_1 < < d(x, x_0) < r_2\}$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, любых двух континуумов $C_0 \subset \overline{B(x_0, r_1)} \cap D$ и $C_1 \subset D \setminus B(x_0, r_2)$ и любой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1. \tag{4.8}$$

В общем же случае каждый $Q$-гомеоморфизм является кольцевым, но не наоборот.

Также говорим, что гомеоморфизм $f : D \to D'$ есть **кольцевой Q-гомеоморфизм**, если $f$ является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$.

Для $x_0 \in X$ и $r > 0$, через $B(x_0, r)$ обозначается шар $\{x \in X : d(x, x_0) < r\}$. Пространство $(X, d, \mu)$ называется **$\alpha$-регулярным по Альфорсу**, если существует постоянная $C \geqslant 1$ такая, что

$$C^{-1} r^\alpha \leqslant \mu(B(x_0, r)) \leqslant C r^\alpha \tag{4.9}$$

для всех шаров $B(x_0, r)$ с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r < \operatorname{diam} X$. Как известно, $\alpha$-регулярные пространства имеют хаусдорфову размерность $\alpha$, см., напр., [197], с. 61. Пространство $(X, d, \mu)$ будем называть **регулярным по Альфорсу**, если оно $\alpha$-регулярно по Альфорсу для некоторого $\alpha \in (1, \infty)$.

Говорят также, что пространство $(X, d, \mu)$ **$\alpha$-регулярно сверху в точке** $x_0 \in X$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\mu(B(x_0, r)) \leqslant Cr^{\alpha} \tag{4.10}$$

для всех шаров $B(x_0, r)$ с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r < r_0$. Наконец, говорят, что пространство $(X, d, \mu)$ **регулярно сверху**, если условие (4.10) выполнено в каждой точке для некоторого $\alpha \in (1, \infty)$.

Приведем некоторые топологические определения общего характера, которые будут полезны в дальнейшем. Пусть $T$ – произвольное топологическое пространство.

Напомним, что топологическое пространство **связно**, если его нельзя разбить на два непустых открытых множества. Компактные связные пространства называются **континуумами**. Топологическое пространство $T$ будем называть **линейно связным**, если любые две точки $x_1$ и $x_2$ можно соединить непрерывным путем $\gamma : [0, 1] \to T$, $\gamma(0) = x_1$ и $\gamma(1) = x_2$. **Областью** в $T$ будем называть открытое линейно связное множество. Область $D$ называется **локально связной в точке** $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности $U$ точки $x_0$ найдется окрестность $V \subseteq U$ точки $x_0$ такая, что $V \cap D$ связно, см. [47], с. 232. Аналогично, мы говорим, что область $D$ **локально линейно связна в точке** $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности $U$ точки $x_0$ найдется окрестность $V \subseteq U$ точки $x_0$ такая, что $V \cap D$ линейно связно.

Ниже представлены вспомогательные результаты из работы [85], см. также главу 13 в монографии [252], которые используются нами при доказательствах.

**Предложение 4.1.** *Пусть $T$ – топологическое (метрическое) пространство с базой $\mathcal{B}$ топологии, состоящей из линейно связных множеств. Тогда произвольное открытое множество $\Omega$ в $T$ является связным тогда и только тогда, когда $\Omega$ линейно связно.*

**Следствие 4.1.** *Открытое множество $\Omega$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, или в любом многообразии является связным тогда и только тогда, когда $\Omega$ линейно связно.*

**Замечание 4.1.** Таким образом, если область $D$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, то она и локально линейно связна в $x_0$.

Тоже самое верно и на многообразиях. Связность и линейная связность эквивалентны для открытых множеств в так называемых слабо плоских пространствах, которые включают в себя хорошо известные широкие классы пространств Левнера, группы Карно и Гейзенберга.

**Предложение 4.2.** *Если $\Omega$ и $\Omega'$ – открытые множества в метрических пространствах $(X, d)$ и $(X', d')$, а $f : \Omega \to \Omega'$ – гомеоморфизм, то предельное множество $f$ в точке $x_0 \in \partial\Omega$,*

$$C(x_0, f) := \{x' \in X' : x' = \lim_{n\to\infty} f(x_n),\ x_n \to x_0\}\,, \tag{4.11}$$

*находится на границе множества $\Omega'$.*

Следуя [85], говорим, что граница $\partial D$ **слабо плоская в точке** $x_0 \in \partial D$, если для любого числа $P > 0$ и окрестности $U$ точки $x_0$ найдется ее окрестность $V \subset U$ такая, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geqslant P \tag{4.12}$$

для любых континуумов $E$ и $F$ в $D$, пересекающих $\partial U$ и $\partial V$.

Аналогично, говорим, что граница области $D$ **сильно достижима в точке** $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности $U$ точки $x_0$, найдется компакт $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки $x_0$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geqslant \delta \tag{4.13}$$

для любого континуума $F$ в $D$, пересекающего $\partial U$ и $\partial V$.

Граница $\partial D$ называется **сильно достижимой** и **слабо плоской**, если соответствующие свойства имеют место в каждой точке границы.

**Предложение 4.3.** *Если $\partial D$ – слабо плоская в точке $x_0 \in \partial D$, то $\partial D$ сильно достижима из $D$ в точке $x_0$.*

**Лемма 4.1.** *Пусть $D$ – открытое линейно связное множество в $(X, d, \mu)$. Если $\partial D$ – слабо плоская в точке $x_0 \in \partial D$, то $D$ локально линейно связно в $x_0$.*

**Предложение 4.4.** *Если область $D$ в метрическом пространстве $(X, d)$ локально линейно связна в точке $x_0 \in \partial D$, то $x_0$ достижима из $D$ некоторым непрерывным путем.*

Следуя [85], говорим, что функция $\varphi : X \to \mathbb{R}$ имеет **конечное среднее колебание в точке** $x_0 \in X$, сокр. $\varphi \in \mathrm{FMO}(x_0)$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \frac{1}{\mu(B(x_0, \varepsilon))} \int_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \widetilde{\varphi}_\varepsilon|\, d\mu(x) < \infty\,, \tag{4.14}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\mu(B(x_0,\varepsilon))} \int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\, d\mu(x)$$

– среднее значение функции $\varphi(x)$ по шару $B(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : d(x,x_0) < < \varepsilon\}$ относительно меры $\mu$. Здесь условие (4.14) включает предположение, что $\varphi$ интегрируема относительно меры $\mu$ по некоторому шару $B(x_0,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Варианты следующей леммы из [85] были сначала доказаны для BMO функций и внутренних точек области $D$ в $\mathbb{R}^n$ при $n = 2$ и $n \geqslant 3$, а затем для граничных точек $D$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с условием удвоения меры и $FMO$ функций, см. историю вопроса в [252].

**Лемма 4.2.** *Пусть $D$ – область в пространстве $(X,d,\mu)$ $\alpha$-регулярном сверху с $\alpha \geqslant 2$ в точке $x_0 \in \overline{D}$ и*

$$\mu(D \cap B(x_0,2r)) \leqslant \gamma \cdot \log^{\alpha-2}\frac{1}{r} \cdot \mu(D \cap B(x_0,r)) \qquad \forall\ r \in (0,r_0)\,. \quad (4.15)$$

*Тогда для любой неотрицательной функции $\varphi : D \to \mathbb{R}$ класса $\mathrm{FMO}(x_0)$*

$$\int\limits_{D\cap A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{\varphi(x)\, d\mu(x)}{\left(d(x,x_0)\log\frac{1}{d(x,x_0)}\right)^{\alpha}} = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad (4.16)$$

*при $\varepsilon \to 0$ и некотором $\varepsilon_0 \in (0,\delta_0)$, где $\delta_0 = \min(e^{-e}, d_0)$, $d_0 = \sup\limits_{x\in D} d(x,x_0)$,*

$$A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0) = \{x \in X : \varepsilon < d(x,x_0) < \varepsilon_0\}. \qquad (4.17)$$

**Замечание 4.2.** Отметим, что условие (4.15) слабее *условия удвоения меры*:

$$\mu(D \cap B(x_0,2r)) \leqslant \gamma \cdot \mu(D \cap B(x_0,r)) \quad \forall\ r \in (0,r_0)\,, \qquad (4.18)$$

которое использовалось ранее в контексте $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, в работе [35]. Заметим также, что условие (4.18) автоматически выполняется во внутренних точках области $D$, если $X$ регулярно по Альфорсу.

**Лемма 4.3.** *Пусть $D$ – область в локально компактном метрическом пространстве $(X,d)$. Тогда любое компактное множество $C$ в $D$ может быть вложено в континуум $K$ из $D$.*

**Доказательство.** Для любого $x \in C$ существует шар $B(x,r)$ с $r = \delta(x) < \operatorname{dist}(x, \partial D)$ такой, что $\overline{B(x,r)}$ – компакт, см., напр., 1.9.3 в [11], с. 129. Тогда существует конечный набор таких шаров, покрывающих $C$. Более того, существует конечный набор связных компонент $C_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ таких шаров, покрывающих $C$. Заметим, что $\overline{C_i}$ компактны и связны, т. е. являются континуумами. Возьмем произвольные точки $x_0 \in D$ и $x_i \in \overline{C_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и соединим $x_0$ и $x_i$ кривыми $\gamma_i$ в $D$. Тогда множество

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} (|\gamma_i| \cup \overline{C_i})$$

как раз является континуумом в $D$, содержащим $C$. □

**Замечание 4.3.** На самом деле, как видно из доказательства, в лемме 4.3 мы можем требовать локальную компактность только области $D$, а не всего пространства $X$.

## 4.2. Непрерывное продолжение на границу

В дальнейшем $(X, d, \mu)$ и $(X', d', \mu')$ – пространства с метриками $d$ и $d'$ и локально конечными борелевскими мерами $\mu$ и $\mu'$, а $D$ и $D'$ – области конечной хаусдорфовой размерности $\alpha$ и $\alpha' \geq 1$ в $(X, d)$ и $(X', d')$, соответственно.

**Лемма 4.4.** *Пусть область $D$ локально линейно связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\overline{D'}$ – компакт, а $f : D \to D'$ – кольцевой $Q$-гомеоморфизм в $x_0$ такой, что $\partial D'$ сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества*

$$C(x_0, f) = \left\{ y \in X' : \ y = \lim_{k \to \infty} f(x_k), \ x_k \to x_0, \ x_k \in D \right\}, \tag{4.19}$$

*$Q : X \to (0, \infty)$ – измеримая функция, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_{\varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^{\alpha}_{x_0, \varepsilon}(d(x, x_0)) \, d\mu(x) = o(I^{\alpha}_{x_0, \varepsilon_0}(\varepsilon)) \tag{4.20}$$

*при $\varepsilon \to 0$ для некоторого $\varepsilon_0 \in (0, d(x_0))$, где $d(x_0) := \sup\limits_{x \in D} d(x, x_0)$ и $\psi_{x_0, \varepsilon}(t)$ – семейство неотрицательных измеримых (по Лебегу) функций* *на* $(0,\infty)$, *таких что*

$$I_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)\colon=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi_{x_0,\varepsilon}(t)\,dt<\infty\qquad\forall\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0),\ \varepsilon_0\in(0,d(x_0)).\qquad(4.21)$$

*Тогда* $f$ *продолжим в точку* $x_0$ *по непрерывности в* $(X',d')$.

**Доказательство.** Покажем, что предельное множество $E=C(x_0,f)$ состоит из единственной точки. Отметим, что $E\neq\varnothing$ ввиду компактности $\overline{D'}$, см., напр., замечание 3, п. 41 в [47]. По условию леммы, $\partial D'$ сильно достижима в некоторой точке $y_0\in E$. Допустим, что существует хотя бы еще одна точка $y^*\in E$. Пусть $U=B(y_0,r_0)$, где $0<r_0<d'(y_0,y^*)$.

В силу локальной линейной связности области $D$ в точке $x_0$, найдется последовательность окрестностей $V_k$ точки $x_0$, такая что $D_k=D\cap V_k$ – области и $\mathrm{diam}V_k\to 0$ при $k\to\infty$. Тогда найдутся точки $y_k$ и $y_k^*\in F_k=fD_k$, близкие к $y_0$ и $y^*$, соответственно, для которых $d'(y_0,y_k)<r_0$ и $d'(y_0,y_k^*)>r_0$ и которые можно соединить кривыми $C_k$ в областях $F_k$, $k=1,2,\ldots$. По построению

$$C_k\cap\partial B(y_0,r_0)\neq\varnothing\,,\qquad(4.22)$$

ввиду связности $C_k$.

По условию сильной достижимости точки $y_0$ найдутся компакт $C_0\subset D'$ и число $\delta>0$, такие, что

$$M(\Delta(C_0,C_k;D'))\geqslant\delta\qquad(4.23)$$

для достаточно больших $k$, поскольку $\mathrm{dist}(y_0,C_k)\to 0$ при $k\to\infty$. В силу леммы 4.3, можно считать, что $C_0$ – континуум. Заметим, что $K_0=f^{-1}(C_0)$ также является континуумом как непрерывный образ континуума. Таким образом, $\varepsilon_0=\min(d(x_0,K_0))>0$ в $D$. Пусть $\psi^*_{x_0,\varepsilon}$ – борелевская функция, такая что $\psi^*_{x_0,\varepsilon}(t)=\psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ для п.в. $t\in(0,\infty)$ и $\psi^*_{x_0,\varepsilon}(t)=0$ для остальных $t$, которая существует по теореме Лузина, см. напр., 2.3.5 в [108].

Заметим, что $I_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)>0$ при малых $\varepsilon$ ввиду (4.20), и для функции

$$\eta_\varepsilon(t)\ =\left\{\begin{array}{rl}\psi^*_{x_0,\varepsilon}(t)/I_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon), & \text{если } t\in(\varepsilon,\varepsilon_0),\\ 0, & \text{если } t\notin(\varepsilon,\varepsilon_0),\end{array}\right.\qquad(4.24)$$

выполнено условие, что $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\eta_\varepsilon(t)\,dt=1$.

Пусть $B_\varepsilon\colon\ = \{x \in X : d(x,x_0) < \varepsilon\}$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. Рассмотрим произвольный континуум $K \subset B_\varepsilon \cap D$. Отметим, что функция $\eta_\varepsilon(d(x,x_0))$ является допустимой для семейства кривых $\triangle(fK_0, fK; D')$ по предложению 13.4 в [252] или предложению 2.4 в [85].

Таким образом,

$$M(\triangle(fK_0, fK; D')) \leqslant \int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\eta_\varepsilon^\alpha(d(x,x_0))\,d\mu(x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{I^\alpha_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)} \int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^\alpha_{x_0,\varepsilon}(d(x,x_0))\,d\mu(x) \to 0 \tag{4.25}$$

при $\varepsilon \to 0$ по (4.20).

С другой стороны, для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ при больших $k$ имеет место включение $D_k \subset B_\varepsilon$ и, следовательно, $f^{-1}(C_k) \subset B_\varepsilon \cap D$. Таким образом, получаем противоречие между (4.23) и (4.25), т.е. предположение о существовании второй точки $y^*$ в $C(x_0,f)$ было неверным. $\square$

**Следствие 4.2.** *В частности, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^\alpha(d(x,x_0))\,d\mu(x) < \infty\,, \tag{4.26}$$

*где $\psi(t)$ – неотрицательная измеримая функция на $(0,\infty)$, такая что*

$$I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt < \infty \qquad \forall\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)\,,$$

*и $I(\varepsilon,\varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, то кольцевой $Q$-гомеоморфизм $f : D \to D'$ продолжим в точку $x_0$ по непрерывности в $(X', d')$.*

**Замечание 4.4.** Другими словами, достаточно, чтобы сингулярный интеграл в (4.26) сходился в смысле главного значения в точке $x_0$ хотя бы для одного ядра $\psi$ с неинтегрируемой особенностью в нуле. Более того, как показывает лемма 4.4, достаточно, чтобы указанный интеграл даже расходился, но с контролируемой скоростью:

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^\alpha(d(x,x_0))\,d\mu(x) = o(I^\alpha(\varepsilon,\varepsilon_0)). \tag{4.27}$$

Выбирая в лемме 4.4 $\psi(t) \equiv 1/t$, приходим к следующей теореме.

**Теорема 4.1.** *Пусть $D$ локально линейно связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\partial D'$ сильно достижима и $\overline{D'}$ компактно. Если измеримая функция $Q : X \to (0, \infty)$ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} \frac{Q(x)d\mu(x)}{d(x,x_0)^\alpha} = o\left(\left[\log \frac{1}{\varepsilon}\right]^\alpha\right) \tag{4.28}$$

*при $\varepsilon \to 0$ для некоторого $\varepsilon_0 < d(x_0) := \sup\limits_{x\in D} d(x, x_0)$, то любой кольцевой $Q$-гомеоморфизм $f : D \to D'$ продолжим в точку $x_0$ по непрерывности в $(X', d')$.*

**Следствие 4.3.** *В частности, заключение теоремы 4.1 остается в силе, если сингулярный интеграл*

$$\int \frac{Q(x)d\mu(x)}{d(x,x_0)^\alpha} \tag{4.29}$$

*сходится в окрестности точки $x_0$.*

Комбинируя леммы 4.2 и 4.4, выбирая $\psi_\varepsilon(t) \equiv t \log \frac{1}{t}$, $t \in (0, \delta_0)$, имеем следующее утверждение.

**Теорема 4.2.** *Пусть $X$ $\alpha$-регулярно сверху в точке $x_0 \in \partial D$, $\alpha \geqslant 2$, где $D$ локально линейно связна и удовлетворяет условию (4.15), а $\overline{D'}$ компактно и $\partial D'$ сильно достижима. Если $Q \in FMO(x_0)$, то любой кольцевой $Q$-гомеоморфизм $f : D \to D'$ продолжим в точку $x_0$ по непрерывности в $(X', d')$.*

### 4.3. Дальнейшие следствия и приложения

Здесь, как и ранее, $C(x_0, f)$ обозначает предельное множество отображения $f$ в точке $x_0$, см. (4.19).

**Лемма 4.5.** *Пусть $f : D \to D'$ – кольцевой $Q$-гомеоморфизм с $Q \in L^1_\mu(D)$. Если область $D$ локально линейно связна в точках $x_1$ и $x_2 \in \partial D$, $x_1 \neq x_2$, а $D'$ имеет слабо плоскую границу, то*

$$C(x_1, f) \cap C(x_2, f) = \varnothing \tag{4.30}$$

.

**Доказательство.** Пусть $E_i = C(x_i, f)$, $i = 1, 2$, и $\delta = d(x_1, x_2)$. Предположим $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$. Так как область $D$ локально линейно связна в точках $x_1$ и $x_2$, существуют окрестности $U_1$ и $U_2$ точек $x_1$ и $x_2$, соответственно, такие что $W_1 = D \cap U_1$ и $W_2 = D \cap U_2$ – области и $U_1 \subset B_1 = B(x_1, \delta/3)$ и $U_2 \subset B_2 = B(x_2, \frac{\delta}{3})$. Тогда по неравенству треугольника $\mathrm{dist}(W_1, W_2) \geqslant \frac{\delta}{3}$ и пусть

$$\eta(x) = \begin{cases} \frac{3}{\delta}, & \text{если } x \in (\frac{\delta}{3}; \frac{2\delta}{3}), \\ 0, & \text{иначе } x \notin (\frac{\delta}{3}; \frac{2\delta}{3}). \end{cases}$$

Тогда имеем, что $\int\limits_{\frac{\delta}{3}}^{\frac{2\delta}{3}} \eta(t)dt = \int\limits_{\frac{\delta}{3}}^{\frac{2\delta}{3}} \frac{3}{\delta}\, dt = 1$. Следовательно, для любых континуумов $K_1 \subset W_1$ и $K_2 \subset W_2$:

$$M(\Delta(fK_1, fK_2; D')) \leqslant \int\limits_{A(x_1, \frac{\delta}{3}; \frac{2\delta}{3}) \cap D} Q(x)\eta^{\alpha}(d(x_1, x_2))\, d\mu(x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3^{\alpha}}{\delta^{\alpha}} \int\limits_{A(x_1, \frac{\delta}{3}; \frac{2\delta}{3}) \cap D} Q(x)\, d\mu(x) < \infty, \tag{4.31}$$

поскольку $Q \in L^1_{\mu}(D)$.

Последняя оценка противоречит, однако, условию слабой плоскости (4.12), если найдется $y_0 \in E_1 \cap E_2$. Действительно, тогда $y_0 \in \overline{fW_1} \cap \overline{fW_2}$ и в областях $W_1^* = fW_1$ и $W_2^* = fW_2$ найдется по кривой, пересекающей любые наперед заданные сферы $\partial B(y_0, r_0)$ и $\partial B(y_0, r_*)$ с достаточно малыми радиусами $r_0$ и $r_*$. Поэтому предположение, что $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$, было неверно. □

По лемме 4.5 получаем, в частности, следующее заключение.

**Теорема 4.3.** *Пусть область $D$ локально линейно связна во всех своих граничных точках и $\overline{D}$ – компакт, область $D'$ имеет слабо плоскую границу, а $f : D \to D'$ – кольцевой $Q$-гомеоморфизм с $Q \in L^1_{\mu}(D)$. Тогда обратный гомеоморфизм $g = f^{-1} : D' \to D$ допускает непрерывное продолжение $\overline{g} : \overline{D'} \to \overline{D}$.*

**Замечание 4.5.** Как видно из доказательства, в лемме 4.5 и теореме 4.3, как и во всех теоремах следующего параграфа, достаточно требовать вместо условия $Q \in L^1_{\mu}(D)$ интегрируемость $Q$ в окрестности $\partial D$.

## 4.4. Гомеоморфное продолжение на границу

Комбинируя леммы 4.4 и 4.5, получаем следующие результаты.

**Лемма 4.6.** *Пусть $D$ локально линейно связна на границе, $D'$ имеет слабо плоскую границу и $\overline{D}$, $\overline{D'}$ – компакты. Если функция $Q : X \to (0, \infty)$ класса $L^1_\mu(D)$ удовлетворяет условию (4.20) в каждой точке $x_0 \in \partial D$, то любой кольцевой $Q$-гомеоморфизм $f : D \to D'$ продолжим до гомеоморфизма $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.*

**Теорема 4.4.** *Пусть $D$ и $D'$ имеют слабо плоские границы, а $\overline{D}$ и $\overline{D'}$ – компакты, и пусть $Q : X \to (0, \infty)$ – функция класса $L^1_\mu(D)$ с*

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} \frac{Q(x)d\mu(x)}{d(x,x_0)^\alpha} = o\left(\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^\alpha\right) \tag{4.32}$$

*в каждой точке $x_0 \in \partial D$ для некоторого $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) < d(x_0) := \sup\limits_{x\in D} d(x, x_0)$. Тогда любой кольцевой $Q$-гомеоморфизм $f : D \to D'$ допускает продолжение до гомеоморфизма $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.*

**Следствие 4.4.** *В частности, заключение теоремы 4.4 имеет место, если сингулярный интеграл*

$$\int \frac{Q(x)d\mu(x)}{d(x,x_0)^\alpha} \tag{4.33}$$

*сходится в окрестности каждой точки $x_0 \in \partial D$.*

**Теорема 4.5.** *Пусть $D$ – область в $\alpha$-регулярном сверху пространстве $(X, d, \mu)$, $\alpha \geqslant 2$, которая локально линейно связна на границе и удовлетворяет условию (4.15) во всех граничных точках, $D'$ – область со слабо плоской границей в пространстве $(X', d', \mu')$, а $\overline{D}$ и $\overline{D'}$ компактны. Если функция $Q : X \to (0, \infty)$ имеет конечное среднее колебание во всех граничных точках области $D$, то любой кольцевой $Q$-гомеоморфизм $f : D \to D'$ продолжим до гомеоморфизма $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.*

**Следствие 4.5.** *В частности, заключение теоремы 4.5 имеет место, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{1}{\mu(B(x_0,\varepsilon))} \int_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\, d\mu(x) < \infty \qquad \forall\ x_0 \in \partial D. \tag{4.34}$$

# Часть II. К теории отображений классов Соболева на плоскости

В этой части книги приводятся приложения недавних результатов донецкой школы по теории кольцевых и нижних $Q$-гомеоморфизмов к исследованию локального и граничного поведения гомеоморфных решений с обобщенными производными и задаче Дирихле для уравнений Бельтрами с вырождением (см., например, монографии [188] и [252], а также статьи [35,37,40,54–60] и [241]). Эти результаты имеют важные приложения к теории краевых задач и теории вариационного метода для уравнений Бельтрами (см., например, [28,29,38,61,162] и [242]). В этой связи напомним также, что недавно теоремы существования гомеоморфных решений класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ были доказаны для многих вырожденных уравнений Бельтрами (см., например, монографии [188] и [252], а также обзоры [189] и [306] с дальнейшими ссылками в них).

## Глава 5. Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами

---

В этой главе показано, что гомеоморфное решение уравнения Бельтрами $\overline{\partial}f = \mu\,\partial f$ класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ является кольцевым и, одновременно, нижним $Q$-гомеоморфизмом с $Q(z) = K_\mu(z)$, где $K_\mu(z)$ – дилатационное отношение этого уравнения. На этой основе развита теория граничного поведения таких решений, и при определенных условиях на $K_\mu(z)$ доказано существование регулярных решений задачи Дирихле для вырожденных уравнений Бельтрами в произвольных жордановых областях и псевдорегулярных, а также многозначных решений в произвольных конечносвязных областях, ограниченных попарно непересекающимися жордановыми кривыми.

## 5.1. Введение

Пусть $D$ – область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т.е. связное и открытое подмножество $\mathbb{C}$, и пусть $\mu : D \to \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. (почти всюду) в $D$. **Уравнением Бельтрами** называется уравнение вида

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z, \tag{5.1}$$

где $f_{\overline{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + if_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - if_y)/2$, $z = x + iy$, $f_x$ и $f_y$ – частные производные отображения $f$ по $x$ и $y$, соответственно. Функция $\mu$ называется **комплексным коэффициентом**, а

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|} \tag{5.2}$$

**дилатационным отношением** уравнения (5.1). Уравнение Бельтрами (5.1) называется **вырожденным**, если $K_\mu$ является существенно неограниченной, т.е. $K_\mu \notin L^\infty(D)$.

Любая аналитическая функция $f$ в области $D$ удовлетворяет простейшему уравнению Бельтрами

$$f_{\bar{z}} = 0, \tag{5.3}$$

когда $\mu(z) \equiv 0$. Если аналитическая функция $f$ задана в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и непрерывна в его замыкании, то по формуле Шварца

$$f(z) = i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \operatorname{Re} f(\zeta) \cdot \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta} \tag{5.4}$$

и, таким образом, аналитическая функция $f$ в единичном круге $\mathbb{D}$ определяется с точностью до чисто мнимого числа $ic$, $c = \operatorname{Im} f(0)$, её реальной частью $\varphi(\zeta) = \operatorname{Re} f(\zeta)$ на границе единичного круга. Очевидно, что если $f$ – решение задачи Дирихле, то и функция $F(z) = f(z) + ic$, для любой постоянной $c \in \mathbb{R}$, также является её решением.

Поэтому **задача Дирихле** для уравнения Бельтрами (5.1) в области $D$ состоит в нахождении непрерывной функции $f : D \to \mathbb{C}$, имеющей частные производные первого порядка п.в. и удовлетворяющей уравнению (5.1) п.в., а также граничному условию

$$\lim_{z \to \zeta} \operatorname{Re} f(z) = \varphi(\zeta) \qquad \forall\ \zeta \in \partial D \tag{5.5}$$

для предписанной непрерывной функции $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$.

Краевые задачи для уравнений Бельтрами впервые изучались в известной диссертации Римана, который рассматривал частный случай аналитических функций, когда $\mu(z) \equiv 0$, и работах Гильберта (1904, 1924), который исследовал соответствующую систему Коши–Римана для действительной и мнимой части аналитических функций $f = u + iv$, а также работе Пуанкаре (1910) по приливам. Проблема Дирихле хорошо изучена для равномерно эллиптических систем уравнений, см., например, [10] и [12]. Задача Дирихле для вырожденных уравнений Бельтрами в единичном круге изучалась в работе [162]. Однако, критерии существования решений задачи Дирихле, сформулированные в [162], не являются инвариантными относительно отображений Римана. Поэтому мы приводим здесь как теоремы существования регулярных решений задачи Дирихле в односвязных областях, так и теоремы существования псевдорегулярных и многозначных решений в многосвязных областях.

## 5.2. Связь класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ с нижними $Q$-гомеоморфизмами

Непрерывное отображение $\gamma$ открытого подмножества $\Delta$ действительной оси $\mathbb{R}$ или окружности в $D$ называется **штриховой линией**, см., например, раздел 6.3 в [252]. Напомним, что любое открытое множество $\Delta$ в $\mathbb{R}$ состоит из счетного набора попарно непересекающихся интервалов. Это дает мотивировку для термина "штриховая линия".

Пусть задано семейство $\Gamma$ штриховых линий $\gamma$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Борелевскую функцию $\varrho : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ называют **допустимой** для $\Gamma$, пишут $\varrho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \varrho\, ds \ \geqslant\ 1 \qquad \forall\, \gamma \in \Gamma. \tag{5.6}$$

**Конформным модулем** семейства $\Gamma$ называется величина

$$M(\Gamma) \ = \inf_{\varrho\in\operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{C}} \varrho^2(z)\, dm(z), \tag{5.7}$$

где $dm(z)$ соответствует мере Лебега в $\mathbb{C}$. Говорят, что свойство $P$ имеет место для **п.в.** (почти всех) $\gamma \in \Gamma$, если подсемейство всех линий в $\Gamma$, для которых $P$ не верно, имеет нулевой модуль, ср. [169]. Также говорят, что измеримая по Лебегу функция $\varrho : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ является **обобщенно допустимой** для $\Gamma$, пишут $\varrho \in \operatorname{ext}\operatorname{adm}\Gamma$, если (5.6) имеет место для п.в. $\gamma \in \Gamma$, см., например, раздел 9.2 в [252].

Следующее понятие мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу (см., например, [171]). Для заданных областей $D$ и $D'$ в $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $z_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$, и измеримой функции $Q : D \to (0, \infty)$, говорят, что гомеоморфизм $f : D \to D'$ является **нижним $Q$-гомеоморфизмом в точке** $z_0$, если

$$M(f\Sigma_\varepsilon) \geqslant \inf_{\varrho \in \mathrm{ext\,adm}\,\Sigma_\varepsilon} \int\limits_{D \cap R_\varepsilon} \frac{\varrho^2(z)}{Q(z)}\, dm(z) \tag{5.8}$$

для каждого кольца

$$R_\varepsilon = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \varepsilon < |z - z_0| < \varepsilon_0\}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\ \varepsilon_0 \in (0, d_0),$$

где

$$d_0 = \sup_{z \in D} |z - z_0|,$$

и $\Sigma_\varepsilon$ обозначает семейство штриховых линий, состоящее из всех пересечений окружностей

$$S(r) = S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}, \quad r \in (\varepsilon, \varepsilon_0),$$

с областью $D$, см. [40] или главу 9 в монографии [252].

Это понятие может быть распространено на случай $z_0 = \infty \in \overline{D}$ стандартным способом путем применения инверсии $T$ относительно единичной окружности в $\overline{\mathbb{C}}$, $T(z) = z/|z|^2$, $T(\infty) = 0$, $T(0) = \infty$. Назовем гомеоморфизм $f : D \to D'$ **нижним $Q$-гомеоморфизмом** в $\infty \in \overline{D}$, если отображение $F = f \circ T$ является нижним $Q_*$-гомеоморфизмом с $Q_* = Q \circ T$ в 0. Также будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ является **нижним $Q$-гомеоморфизмом на** $\partial D$, если $f$ является нижним $Q$-гомеоморфизмом в любой точке $z_0 \in \partial D$.

Напомним критерий того, что гомеоморфизм в $\mathbb{C}$ является нижним $Q$-гомеоморфизмом (см. теорему 2.1 в [40], либо теорему 9.2 в [252]).

**Предложение 5.1.** *Пусть $D$ и $D'$ – области в $\mathbb{C}$, $z_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$, и $Q : D \to (0, \infty)$ – измеримая по Лебегу функция. Гомеоморфизм $f : D \to D'$ является нижним $Q$-гомеоморфизмом в точке $z_0$ тогда и только тогда, когда*

$$M\left(f\left(\Sigma_\varepsilon\right)\right) \geqslant \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|\, Q\|_{\,1}(r)} \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\ \varepsilon_0 \in (0, d_0), \tag{5.9}$$

*где*

$$\|Q\|_1(r) = \int\limits_{D(z_0, r)} Q(z)\, ds \tag{5.10}$$

*есть $L_1$-норма функции $Q$ над множеством $D(z_0, r) = D \cap S(z_0, r) = = \{z \in D : |z - z_0| = r\}$.*

Далее мы покажем, что каждое гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (5.1) класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ является нижним $Q$-гомеоморфизмом с $Q(z) = K_\mu(z)$ и, таким образом, вся теория граничного поведения в [40], см. также главу 9 в [252], может быть применена к таким решениям. Последний факт имеет важное значение при изучении краевых задач для уравнений Бельтрами с вырождением, см., например, [162].

**Теорема 5.1.** *Пусть $f$ – гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (5.1) класса $W^{1,1}_{\rm loc}$. Тогда $f$ является нижним $Q$-гомеоморфизмом в каждой точке $z_0 \in \overline{D}$ с $Q(z) = K_\mu(z)$.*

**Доказательство.** Пусть $B$ – множество (борелевское!) всех точек $z$ из $D$, в которых $f$ имеет полный дифференциал с $J_f(z) \neq 0$. Известно, что $B$ можно представить в виде объединения счетного набора борелевских множеств $B_l$, $l = 1, 2, \ldots$, таких, что $f_l = f|_{B_l}$ являются билипшицевыми гомеоморфизмами, см., например, лемму 3.2.2 в [164]. Без потери общности можно считать, что $B_l$ попарно не пересекаются. Пусть $B_*$ – множество всех точек $z \in D$, где $f$ имеет полный дифференциал с $f_z = 0 = f_{\bar z}$.

Заметим, что по известной теореме Геринга–Лехто–Меньшова множество $B_0 = D \setminus (B \cup B_*)$ имеет нулевую меру Лебега в $\mathbb{C}$, см. [176] и [259]. Следовательно, по теореме 2.11 в [232], см. также лемму 9.1 в [252], $l(\gamma \cap B_0) = 0$ для п.в. штриховых линий $\gamma$ в $D$. Покажем также, что $l(f(\gamma) \cap f(B_0)) = 0$ для п.в. окружностей $\gamma$ с центром в точке $z_0$.

Последнее вытекает из абсолютной непрерывности $f$ на замкнутых поддугах $\gamma \cap D$ для п.в. окружностей $\gamma$. Действительно, класс $W^{1,1}_{\rm loc}$ является инвариантным относительно локально квазиизометрических преобразований независимой переменной, см., например, теорему 1.1.7 в [257], и функции из $W^{1,1}_{\rm loc}$ абсолютно непрерывны на линиях, см., например, теорему 1.1.3 в [257]. Применяя, к примеру, преобразование координат $\log(z - z_0)$, мы приходим к абсолютной непрерывности на п.в. окружностях $\gamma$ с центром в точке $z_0$.

Таким образом, $l(\gamma_* \cap f(B_0)) = 0$, где $\gamma_* = f(\gamma)$, для п.в. окружностей $\gamma$ с центром в точке $z_0$. Пусть теперь $\varrho_* \in {\rm adm}\, f(\Gamma)$, $\varrho_* \equiv 0$ вне $f(D)$, где $\Gamma$ – совокупность всех штриховых линий, образованных пересечениями всех окружностей $\gamma$ с центром в точке $z_0$. Пусть $\varrho \equiv 0$ вне $D$ и

$$\varrho(z) \colon = \varrho_*(f(z))\,(|f_z| + |f_{\bar z}|) \qquad \text{для п.в. } \ z \in D.$$

Рассуждая кусочно на $B_l$, мы имеем по теореме 3.2.5 из [164] (при $m = 1$), что

$$\int\limits_{\gamma} \varrho\, ds \ \geqslant \ \int\limits_{\gamma_*} \varrho_*\, ds_* \ \geqslant \ 1 \qquad \text{для п.в.} \ \ \gamma \in \Gamma,$$

поскольку $l(f(\gamma) \cap f(B_0)) = 0$, а также $l(f(\gamma) \cap f(B_*)) = 0$ для п.в. $\gamma \in \Gamma$ ввиду абсолютной непрерывности $f$ на п.в. $\gamma \in \Gamma$. Следовательно, $\varrho \in \operatorname{ext} \operatorname{adm} \Gamma$.

С другой стороны, еще раз рассуждая кусочно на $B_l$, мы имеем неравенство

$$\int\limits_{D} \frac{\varrho^2(x)}{K_\mu(z)}\, dm(z) \ \leqslant \ \int\limits_{f(D)} \varrho_*^2(w)\, dm(w),$$

поскольку $\varrho(z) = 0$ на $B_*$. Следовательно, мы получаем, что

$$M(f\Gamma) \ \geqslant \inf\limits_{\varrho \in \operatorname{ext} \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{D} \frac{\varrho^2(z)}{K_\mu(z)}\, dm(z)\,,$$

т.е., $f$ действительно является нижним $Q$-гомеоморфизмом с $Q(z) = K_\mu(z)$. □

## 5.3. Связь $W^{1,1}_{\text{loc}}$ с кольцевыми $Q$-гомеоморфизмами

Пусть $D$ – область в $\mathbb{C}$, и пусть $Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Положим

$$A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\},$$

$$S_i = S(z_0, r_i) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Далее, как обычно, $\Delta(E, F; D)$ обозначает семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{C}}$, которые соединяют $E$ и $F$ в $D$, т.е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $a < t < b$.

Напомним следующее понятие, адаптированное к плоскости, которое мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу (см., напр., [171]) и тесно связано с решением вырожденных уравнений Бельтрами на плоскости.

Будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ является **кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в точке** $z_0 \in D$, если $f$ удовлетворяет соотношению

$$M\left(\Delta\left(fS_1, fS_2; fD\right)\right) \leqslant \int\limits_{A} Q(z)\cdot\eta^2(|z-z_0|)\,dm(z) \tag{5.11}$$

для любого кольца $A = A(z_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d(z_0) = \mathrm{dist}(z_0, \partial D)$, и для любой измеримой по Лебегу функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\,dr \geqslant 1. \tag{5.12}$$

Говорим, что гомеоморфизм $f$ из $D$ в $\overline{\mathbb{C}}$ является **кольцевым $Q$-гомеоморфизмом** в $D$, если условие (5.11) выполнено для всех точек $z_0 \in D$.

Приведенное выше понятие впервые было введено в работе [286] в связи с исследованием уравнений Бельтрами на плоскости, а позднее было распространено на пространственный случай (см. работу [86], а также [252]).

В работе [290] впервые рассматривались кольцевые $Q$-гомеоморфизмы в граничных точках области $D$. Будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ называется **кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в граничной точке** $z_0 \in \partial D$, если $f$ удовлетворяет соотношению

$$M\left(\Delta\left(fC_1, fC_2; fD\right)\right) \leqslant \int\limits_{A\cap D} Q(z)\cdot\eta^2(|z-z_0|)\,dm(z) \tag{5.13}$$

для любого кольца $A = A(z_0, r_1, r_2)$ и произвольных континуумов $C_1$ и $C_2$ в $D$, которые принадлежат различным компонентам дополнения кольца $A$ в $\overline{\mathbb{C}}$, содержащим $z_0$ и $\infty$, соответственно, и для любой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, удовлетворяющей условию (5.12). Говорим, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ является **кольцевым $Q$-гомеоморфизмом** в $\overline{D}$, если условие (5.13) выполнено для всех точек $z_0 \in \overline{D}$.

Приведём критерий, когда произвольный гомеоморфизм является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом во внутренних точках области, см. теорему 2.1 в [86], а также теорему 7.2 в [252]. Ниже мы придерживаемся следующих стандартных соглашений: $a/\infty = 0$ для $a \neq \infty$, $a/0 = \infty$ для $a > 0$ и $0 \cdot \infty = 0$, см., напр., раздел I.3 в [88].

**Предложение 5.2.** *Пусть $Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{C}$ является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в точке $z_0 \in D$ тогда и только тогда, когда для всех $0 < r_1 <$*

$< r_2 < d(z_0) = \mathrm{dist}(z_0, \partial D)$ *выполнено соотношение*

$$M\left(\Delta\left(fS_1, fS_2; fD\right)\right) \leqslant \frac{2\pi}{I}, \tag{5.14}$$

*где* $S_i = S(z_0, r_i)$, $i = 1, 2$,

$$I = I(r_1, r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{rq_{z_0}(r)},$$

$q_{z_0}(r)$ – *среднее интегральное значение функции* $Q$ *по окружности* $|z - z_0| = r$.

**Лемма 5.1.** *Пусть* $D$ *и* $D'$ – *области в* $\mathbb{C}$, $Q : D \to (0, \infty)$ – *измеримая по Лебегу функция и* $f : D \to D'$ – *нижний* $Q$*-гомеоморфизм в точке* $z_0 \in \overline{D}$. *Тогда*

$$M\left(\Delta\left(fS_1, fS_2; fD\right)\right) \leqslant \frac{1}{I}, \tag{5.15}$$

*где* $S_i = S(z_0, r_i) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r_i\}$, $i = 1, 2$, $0 < r_1 < r_2$, *и*

$$I = I(z_0, r_1, r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{||Q||_1(z_0, r)}, \tag{5.16}$$

$$||Q||_1(z_0, r) = \int\limits_{D(z_0, r)} Q(z)\ ds \tag{5.17}$$

– $L^1$*-норма функции* $Q$ *по* $D(z_0, r) = \{z \in D : |z - z_0| = r\} = D \cap S(z_0, r)$.

**Лемма 5.2.** *Пусть* $D$ – *область в* $\mathbb{C}$, $z_0 \in \overline{D}$, $0 < r_1 < r_2 < d(z_0) := = \sup\limits_{z \in D} |z - z_0|$, $A = A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ – *кольцо, и пусть* $Q : D \to (0, \infty)$ – *измеримая функция. Полагаем*

$$\eta_0(t) = \frac{1}{I \cdot ||Q||_1(z_0, t)}, \tag{5.18}$$

*где* $I = I(x_0, r_1, r_2)$ *и* $||Q||_1(z_0, r)$, $r \in (r_1, r_2)$, *определены в (5.16) и (5.17), соответственно. Тогда*

$$\frac{1}{I} = \int\limits_{A \cap D} Q(z) \cdot \eta_0^2(|z - z_0|)\, dm(z) \leqslant \int\limits_{A \cap D} Q(z) \cdot \eta^2(|z - z_0|)\, dm(z) \tag{5.19}$$

*для любой измеримой функции* $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, *такой, что*

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr = 1. \tag{5.20}$$

**Доказательство.** Если $I = \infty$, то левая часть соотношения (5.19) равна нулю и неравенство в этом случае очевидно. Если $I = 0$, то $||Q||_1(z_0, r) = \infty$ для п.в. $r \in (r_1, r_2)$, и обе части неравенства (5.19) по теореме Фубини равны бесконечности. Пусть теперь $0 < I < \infty$. Тогда $||Q||_1(z_0, r) \neq 0$ и $\eta_0(r) \neq \infty$ п.в. в $(r_1, r_2)$. Полагая

$$\alpha(r) = \eta(r) \cdot ||Q|||_1(z_0, r)$$

и

$$\omega(r) = \frac{1}{||Q|||_1(z_0, r)},$$

по стандартным соглашениям будем иметь, что $\eta(r) = \alpha(r)\omega(r)$ п.в. в $(r_1, r_2)$ и что

$$C := \int\limits_{A \cap D} Q(z) \cdot \eta^2 \left(|z - z_0|\right) \, dm(z) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \alpha^2(r) \cdot \omega(r) \, dr.$$

Применяя неравенство Иенсена с весом (см. теорему 2.6.2 в [273]), к выпуклой функции $\varphi(t) = t^2$, заданной в интервале $\Omega = (r_1, r_2)$, с вероятностной мерой

$$\nu(E) = \frac{1}{I} \int\limits_E \omega(r) \, dr,$$

получаем, что

$$\left( \fint \alpha^2(r)\omega(r) dr \right)^{1/2} \geqslant \fint \alpha(r)\omega(r) \, dr = \frac{1}{I},$$

где мы также использовали тот факт, что $\eta(r) = \alpha(r)\omega(r)$ удовлетворяет соотношению (5.20). Таким образом,

$$C \geqslant \frac{1}{I},$$

что и доказывает (5.19). $\square$

Комбинируя леммы 5.1 и 5.2, получаем следующее.

**Следствие 5.1.** *При условиях и обозначениях лемм 5.1 и 5.2 имеет место неравенство*

$$M(\Delta\,(fS_1, fS_2; fD)) \leqslant \int\limits_{A\cap D} Q(z)\cdot\eta^2\,(|z-z_0|)\;dm(z). \tag{5.21}$$

**Теорема 5.2.** *Пусть $D$ и $D'$ – области в $\mathbb{C}$, и пусть $Q : D \to (0,\infty)$ – измеримая функция. Если $f : D \to D'$ – нижний $Q$-гомеоморфизм в точке $z_0 \in \overline{D}$, то $f$ является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в точке $z_0$.*

**Доказательство.** Поскольку семейство кривых $\Delta\,(fC_1, fC_2; fD)$ минорируется семейством $\Delta\,(fS_1, fS_2; fD)$, где $S_1 = S(z_0, r_1)$ и $S_2 = S(z_0, r_2)$, то

$$M\,(\Delta\,(fC_1, fC_2; fD)) \leqslant M\,(\Delta\,(fS_1, fS_2; fD))$$

и заключение теоремы 5.2 получается из следствия 5.1. □

Комбинируя теоремы 5.1 и 5.2, приходим к следующему заключению.

**Теорема 5.3.** *Пусть $f$ – гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (5.1) класса $W^{1,1}_{\rm loc}$. Тогда $f$ является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в каждой точке $z_0 \in \overline{D}$ с $Q(z) = K_\mu(z)$.*

Таким образом, теория граничного поведения кольцевых $Q$-гомеоморфизмов из [189] и [54] также может быть применена к изучению произвольных гомеоморфных решений уравнения Бельтрами с обобщенными производными.

## 5.4. Об областях с регулярными границами

Напомним, в первую очередь, следующее топологическое понятия. Область $D \subset \mathbb{C}$ назовем **локально связной в точке** $z_0 \in \partial D$, если для любой окрестности $U$ точки $z_0$, существует окрестность $V \subseteq U$ точки $z_0$ такая, что $V \cap D$ связно. Заметим, что каждая жорданова область $D$ в $\mathbb{C}$ является локально связной в любой точке из $\partial D$ (см., например, [325], с. 66).

Говорят, что **граница слабо плоская в точке** $z_0 \in \partial D$, если для любой окрестности $U$ точки $z_0$ и любого числа $P > 0$, существует окрестность $V \subset U$ точки $z_0$ такие, что

$$M\left(\Delta\left(E, F; D\right)\right) \geqslant P \tag{5.22}$$

для всех континуумов $E$ и $F$ в $D$, пересекающих $\partial U$ и $\partial V$. Назовем границу $\partial D$ **слабо плоской**, если она слабо плоская в каждой точке из $\partial D$.

Говорят также, что **граница сильно достижима в точке** $z_0 \in \partial D$, если для любой окрестности $U$ точки $z_0$ существует компакт $E$ в $D$, окрестность $V \subset U$ точки $z_0$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$M\left(\Delta\left(E, F; D\right)\right) \geqslant \delta \tag{5.23}$$

для любого континуума $F$ в $D$, пересекающего $\partial U$ и $\partial V$. Границу $\partial D$ назовем **сильно достижимой**, если любая точка $z_0 \in \partial D$ является сильно достижимой.

Здесь, в определениях сильно достижимых и слабо плоских границ, можно в качестве окрестностей $U$ и $V$ точки $z_0$ брать только круги (замкнутые или открытые) с центром в точке $z_0$ или только окрестности $z_0$ из какой-либо другой фундаментальной системы окрестностей точки $z_0$. Эти понятия могут быть естественным образом распространены на случай $\overline{\mathbb{C}}$ и $z_0 = \infty$. Тогда должны использоваться соответствующие окрестности $\infty$.

Легко видеть, что если область $D$ из $\mathbb{C}$ является слабо плоской в точке $z_0 \in \partial D$, то точка $z_0$ сильно достижима из $D$. Более того, было доказано, что если область $D$ из $\mathbb{C}$ является слабо плоской в точке $z_0 \in \in \partial D$, то $D$ локально связна в $z_0$, см., например, лемму 5.1 в [40] или лемму 3.15 в [252].

Понятия сильно достижимых и слабо плоских граничных точек области в $\mathbb{C}$ определены в [39] и являются локализацией и обобщением соответствующих понятий, введенных в [250, 251], сравни со свойствами $P_1$ и $P_2$ по Вяйсяля в [320] и также с квазиконформной достижимостью и квазиконформной плоскостностью по Някки в [261]. Многие теоремы о гомеоморфном продолжении на границу квазиконформных отображений и их обобщений имеют место при условии, что границы являются слабо плоскими. Условие сильной достижимости играет аналогичную роль для непрерывного продолжения отображений на границу. В частности, недавно нами были доказаны следующие важные утверждения, см. либо теорему 10.1 (лемму 6.1) в [40], либо теорему 9.8 (лемму 9.4) в [252].

**Предложение 5.3.** *Пусть $D$ и $D'$ – ограниченные области в $\mathbb{C}$, $Q : D \to (0,\infty)$ – измеримая функция и $f : D \to D'$ – нижний $Q$-гомеоморфизм в $\partial D$. Предположим, что область $D$ является локально связной на $\partial D$, а область $D'$ имеет (сильно достижимую) слабо плоскую границу. Если*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{||Q||_1(z_0,r)} = \infty \qquad \forall\ z_0 \in \partial D \tag{5.24}$$

*для некоторого $\delta(z_0) \in (0, d(z_0))$, где $d(z_0) = \sup\limits_{z\in D} |\,z - z_0|$ и*

$$||\,Q||_1(z_0,r) = \int\limits_{D\cap S(z_0,r)} Q(z)\,ds,$$

*то $f$ имеет (непрерывное) гомеоморфное продолжение $\overline{f}$ на $\overline{D}$, которое отображает $\overline{D}$ (в) на $\overline{D'}$.*

Здесь, как обычно, через $S(z_0,r)$ обозначена окружность $|z-z_0| = r$.

Область $D \subset \mathbb{C}$ называется **областью квазиэкстремальной длины**, сокращенно **QED-областью**, см. [177], если

$$M\left(\Delta\left(E,F;\overline{\mathbb{C}}\right)\right) \leqslant K\cdot M\left(\Delta\left(E,F;D\right)\right) \tag{5.25}$$

для некоторого $K \geqslant 1$ и для всех пар непересекающихся континуумов $E$ и $F$ в $D$.

Хорошо известно, см., например, теорему 10.12 в [320], что

$$M(\Delta(E,F;\mathbb{C})) \geqslant \frac{2}{\pi}\log\frac{R}{r} \tag{5.26}$$

для всех множеств $E$ и $F$ в $\mathbb{C}$, пересекающих все окружности $S(z_0,\rho)$, $\rho \in (r,R)$. Следовательно, QED-области имеют слабо плоскую границу. В одном из примеров [252], раздел 3.8, показано, что обратное утверждение не верно даже для односвязных областей на плоскости.

Область $D \subset \mathbb{C}$ называется **равномерной областью**, если любая пара точек $z_1$ и $z_2 \in D$ может быть соединена спрямляемой кривой $\gamma$ в $D$ такой, что

$$s(\gamma) \leqslant a\cdot|z_1 - z_2| \tag{5.27}$$

и

$$\min_{i=1,2}\ s(\gamma(z_i,z)) \leqslant b\cdot d(z,\partial D) \tag{5.28}$$

для всех $z \in \gamma$, где $\gamma(z_i, z)$ – часть кривой $\gamma$ с концами в точках $z_i$ и $z$, см. [254]. Известно, что каждая равномерная область является QED-областью, но существуют QED-области, которые не являются равномерными, см. [177]. Ограниченные выпуклые области и ограниченные области с гладкими границами дают простые примеры равномерных областей и, следовательно, QED-областей, а также областей со слабо плоскими границами.

В теории отображений и дифференциальных уравнениях также часто встречаются так называемые **липшицевы области**. Говорят, что область $D$ в $\mathbb{C}$ называется липшицевой, если любая точка $z_0 \in \partial D$ имеет окрестность $U$, которая с помощью некоторого билипшицева отображения $f$ переводится в единичный круг $\mathbb{D}$ в $\mathbb{C}$ так, что $\partial D \cap U$ переходит в пересечение $\mathbb{D}$ с вещественной осью.

Напомним, в связи с этим, что отображение $f : X \to X'$ между метрическими пространствами $(X, d)$ и $(X', d')$ называются **липшицевыми**, если $d'(f(x_1), f(x_2)) \leqslant C \cdot d(x_1, x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in X$, для некоторой конечной постоянной $C$. Если в дополнение $d(x_1, x_2) \leqslant c \cdot d'(f(x_1), f(x_2))$ для любых $x_1, x_2 \in X$, то отображение $f$ называется **билипшицевым**. Заметим, что билипшицевы отображения $f$ являются квазиконформными, относительно которых модуль является квазиинвариантом. Поэтому границы липшицевых областей являются слабо плоскими.

Кроме того, в дальнейшем $C(X, f)$ обозначает **предельное множество** отображения $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ для множества $X \subset \overline{D}$,

$$C(X, f)\colon = \left\{ w \in \overline{\mathbb{C}} : w = \lim_{k\to\infty} f(z_k),\ z_k \to z_0 \in X,\ z_k \in D \right\}. \tag{5.29}$$

Заметим, что включение $C(\partial D, f) \subseteq \partial D'$ имеет место для любого гомеоморфизма $f : D \to D'$, см., например, предложение 13.5 в [252].

## 5.5. Граничное поведение гомеоморфных решений

В силу теоремы 5.1 имеем по теореме 6.1 из [40] или лемме 9.4 из [252] следующее утверждение.

**Лемма 5.3.** *Пусть $D$ и $D'$ – области в $\mathbb{C}$, $z_0 \in \partial D$, и $f : D \to D'$ – гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (5.1) класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. Предположим, что область $D$ локально связна в $z_0 \in \partial D$ и $\partial D'$ сильно достижима по крайней мере в одной точке предельного множества $C(z_0, f)$.*

*Если*
$$\int\limits_{0}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{||K_\mu||_1(r)} = \infty, \tag{5.30}$$

*где* $0 < \varepsilon_0 < d_0 = \sup\limits_{z\in D} |z - z_0|$, *и*

$$||K_\mu||_1(r) = \int\limits_{D\cap S(z_0,r)} K_\mu \, ds, \tag{5.31}$$

*то* $f$ *продолжается в точку* $z_0$ *по непрерывности в* $\overline{\mathbb{C}}$.

Основой для доказательства продолжимости обратных отображений гомеоморфных решений уравнения Бельтрами (5.1) класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ является следующая лемма о предельных множествах.

**Лемма 5.4.** *Пусть* $D$ *и* $D'$ *– области в* $\mathbb{C}$, $z_1$ *и* $z_2$ *– различные точки на* $\partial D$, $z_1 \neq \infty$, *и* $f : D \to D'$ *– гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (5.1) класса* $W^{1,1}_{\rm loc}$. *Предположим, что функция* $K_\mu$ *интегрируема на штриховых линиях*

$$D(r) = \{z \in D : |z - z_1| = r\} = D \cap S(z_1, r) \tag{5.32}$$

*для некоторого множества* $E$ *чисел* $r < |z_1 - z_2|$ *положительной линейной меры. Если* $D$ *локально связна в* $z_1$ *и* $z_2$ *и* $\partial D'$ *слабо плоская, то*

$$C(z_1, f) \cap C(z_2, f) = \varnothing. \tag{5.33}$$

В силу теоремы 5.1 лемма 5.4 следует из леммы 9.1 в [40] или леммы 9.5 в [252].

Как непосредственное следствие леммы 5.4 имеем следующее утверждение.

**Теорема 5.4.** *Пусть* $D$ *и* $D'$ *– области в* $\mathbb{C}$, $D$ *локально связна на* $\partial D$ *и* $\partial D'$ *– слабо плоская. Если* $f : D \to D'$ *– гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (5.1) класса* $W^{1,1}_{\rm loc}$ *с* $K_\mu \in L^1(D)$, *то* $f^{-1}$ *имеет продолжение в* $\overline{D'}$ *по непрерывности в* $\overline{\mathbb{C}}$.

**Доказательство.** По теореме Фубини множество

$$E = \{r \in (0, d) : K_\mu|_{D(r)} \in L^1(D(r))\} \tag{5.34}$$

имеет положительную линейную меру, поскольку $K_\mu \in L^1(D)$. $\square$

**Замечание 5.1.** Достаточно предполагать в теореме 5.4, что $K_\mu$ интегрируема только в окрестности $\partial D$.

Кроме того, ввиду теоремы 5.1, мы получаем по теореме 9.2 из [40] или по теореме 9.7 из [252] следующий результат.

**Теорема 5.5.** *Пусть $D$ и $D'$ – области в $\mathbb{C}$, $D$ локально связна на $\partial D$ и $\partial D'$ слабо плоская, и $f : D \to D'$ – гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (5.1) класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ с коэффициентом $\mu$ таким, что*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{||K_\mu||_1(z_0,r)} = \infty \qquad \forall\ z_0 \in \partial D, \tag{5.35}$$

*где $\delta(z_0) \in (0, d(z_0))$, $d(z_0) = \sup\limits_{z\in D} |z - z_0|$ и*

$$||K_\mu||_1(z_0,r) = \int\limits_{D(z_0,r)} K_\mu\, ds \tag{5.36}$$

*– $L_1$-норма $K_\mu$ над $D(z_0,r) = \{z \in D : |z - z_0| = r\} = D \cap S(z_0,r)$. Тогда существует продолжение $f^{-1}$ в $\overline{D'}$ по непрерывности в $\overline{\mathbb{C}}$.*

Комбинируя лемму 5.3 и теорему 5.5, получаем следующее утверждение.

**Теорема 5.6.** *Пусть $D$ и $D'$ – ограниченные области в $\mathbb{C}$ и $f : D \to$ $\to D'$ – гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (5.1) класса $W^{1,1}_{\rm loc}$. Предположим, что область $D$ локально связна на $\partial D$ и область $D'$ имеет слабо плоскую границу. Если*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{||K_\mu||_1(z_0,r)} = \infty \qquad \forall\ z_0 \in \partial D \tag{5.37}$$

*для некоторого $\delta(z_0) \in (0, d(z_0))$, где $d(z_0) = \sup\limits_{z\in D} |z - z_0|$ и*

$$||K_\mu||_1(z_0,r) = \int\limits_{D\cap S(z_0,r)} K_\mu\, ds, \tag{5.38}$$

*то $f$ имеет продолжение по непрерывности на $\overline{D}$, которое гомеоморфно отображает $\overline{D}$ на $\overline{D'}$.*

В частности, как следует из теоремы 5.6, получаем следующее обобщение хорошо известной теоремы Геринга–Мартио о гомеоморфном продолжении на границу квазиконформных отображений между QED-областями, ср. [177].

**Следствие 5.2.** *Пусть $D$ и $D'$ – ограниченные области со слабо плоскими границами в $\mathbb{C}$ и $f : D \to D'$ – гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (5.1) класса $W^{1,1}_{\rm loc}$. Если условие (5.37) справедливо в каждой точке $z_0 \in \partial D$, то $f$ имеет гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.*

## 5.6. Регулярные решения задачи Дирихле в односвязных областях

При $\varphi(\zeta) \not\equiv \text{const}$ **регулярное решение** такой задачи есть непрерывное в $\mathbb{C}$, дискретное и открытое отображение $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ с якобианом

$$J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \neq 0, \quad \text{п.в.}, \tag{5.39}$$

удовлетворяющее условию (5.5) и почти всюду уравнению (5.1). В случае $\varphi(\zeta) \equiv c$, $\zeta \in \partial D$, под **регулярным решением** задачи Дирихле (5.5) с для уравнения Бельтрами (5.1) будем понимать функцию $f(z) = c + ic'$, $c' \in \mathbb{R}$.

Напомним, что отображение $f : D \to \mathbb{C}$ называется **дискретным**, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{C}$ состоит из изолированных точек, и **открытым**, если образ любого открытого множества $U \subseteq D$ является открытым множеством в $\mathbb{C}$.

**Лемма 5.5.** *Пусть $\mu : D \to \mathbb{C}$ – измеримая в жордановой области $D$ функция, такая что $|\mu(z)| < 1$ п.в. и $K_\mu \in L^1(D)$. Предположим, что для всех $z_0 \in \overline{D}$ существует $\varepsilon_0 < d(z_0) := \sup_{z\in D} |z - z_0|$ и однопараметрическое семейство измеримых функций $\psi_{z_0,\varepsilon} : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, таких, что*

$$0 < I_{z_0}(\varepsilon) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{z_0,\varepsilon}(t)\, dt < \infty, \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \tag{5.40}$$

*и при $\varepsilon \to 0$*

$$\int\limits_{D(z_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} K_\mu(z) \cdot \psi^2_{z_0,\varepsilon}(|z - z_0|)\, dm(z) \;=\; o(I^2_{z_0}(\varepsilon))\,, \tag{5.41}$$

*где $D(z_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{z \in D : \varepsilon < |z - z_0| < \varepsilon_0\}$. Тогда уравнение Бельтрами (5.1) имеет регулярное решение $f$ задачи Дирихле (5.5) для любой непрерывной функции $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$.*

**Доказательство.** Пусть $F$ – регулярное гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (5.1) класса $W^{1,1}_{\rm loc}$, которое является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в $\overline{D}$ с $Q = K_\mu$ и которое существует по лемме 4.1 из [?] в силу условия (5.41). Заметим, что $\overline{\mathbb{C}} \setminus D^*$, где $D^* = F(D)$, не может состоять из единственной точки $\infty$, т.к. в противном случае граница $D^*$ являлась бы слабо плоской и по лемме 1 и теореме 3 из работы [54] $F$ должно было иметь гомеоморфное продолжение в $\overline{D}$, что невозможно, поскольку граница $D$ состоит более чем из одной точки. Кроме того, область $D^*$ односвязна, см., например, лемму 5.3 в [35] или лемму 6.5 в [252]. Таким образом, по теореме Римана, см., например, II.2.1 в [25], $D^*$ можно отобразить на единичный круг $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ с помощью конформного отображения $R$. Ввиду инвариантности модуля при конформных отображениях, $g := R \circ F$ вновь является регулярным гомеоморфным решением уравнения Бельтрами (5.1), которое является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в $\overline{D}$ с $Q = K_\mu$ и отображает $D$ на $\mathbb{D}$. Более того, по лемме 1 и теореме 3 в [54], $g$ допускает продолжение до гомеоморфизма $g_* : \overline{D} \to \overline{\mathbb{D}}$, поскольку $\mathbb{D}$ имеет слабо плоскую границу, а жорданова область $D$ локально связна на границе.

Будем искать решение исходной задачи Дирихле (5.5) в виде $f = h \circ g$, где $h$ – аналитическая функция в $\mathbb{D}$, с граничным условием

$$\lim_{z \to \zeta} \operatorname{Re} h(z) = \varphi(g_*^{-1}(\zeta)) \qquad \forall\, \zeta \in \partial\mathbb{D}\,.$$

Как известно, аналитическая функция $h$ восстанавливается в $\mathbb{D}$ с помощью формулы Шварца, см., например, § 8, Гл. III, часть 3 в [30], по её действительной части на границе с точностью до чисто мнимой аддитивной постоянной:

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \varphi \circ g_*^{-1}(\zeta) \cdot \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta}\,.$$

Как легко видеть, функция $f = h \circ g$ дает искомое регулярное решение задачи Дирихле (5.5) для уравнения Бельтрами (5.1). Лемма доказана. □

Напомним, что функция $\psi : D \to \mathbb{R}$, $\psi \in L^1_{\rm loc}(D)$, имеет **ограниченное среднее колебание** по Джону–Ниренбергу, сокр. $\psi \in {\rm BMO}$,

если
$$\|\psi\|_* = \sup_{B\subset D} \frac{1}{|B|} \int\limits_B |\psi(z) - \psi_B|\, dm(z) < \infty, \tag{5.42}$$
где точная верхняя грань берётся по всем кругам $B \subset D$, а $\psi_B$ – среднее значение функции $\psi$ в круге $B$. Пишем $\psi \in \mathrm{BMO}(\overline{D})$, если $\psi \in \mathrm{BMO}(G)$, где $G$ – область в $\mathbb{C}$, содержащая $\overline{D}$.

Напомним также, что функция $\psi : D \to \mathbb{R}$ имеет **конечное среднее колебание** в точке $z_0 \in D$, пишем $\psi \in \mathrm{FMO}(z_0)$, если
$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \fint_{B(z_0,\,\varepsilon)} |\psi(z) - \widetilde{\psi}_\varepsilon|\, dm(z) < \infty, \tag{5.43}$$
где $B(z_0,\,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$, а $\widetilde{\psi}_\varepsilon$ – среднее значение $\psi$ в $B(z_0,\,\varepsilon)$, см. [35]. Пишем $\psi \in \mathrm{FMO}(D)$, если (5.43) выполнено для каждой точки $z_0 \in D$. Также пишем $\psi \in \mathrm{FMO}(\overline{D})$, если $\psi \in \mathrm{FMO}(G)$, где $G$ – область в $\mathbb{C}$, содержащая $\overline{D}$.

Как известно, $L^\infty(D) \subset \mathrm{BMO}(D) \subset L^p_{\mathrm{loc}}(D)$ для всех $p \in [1, \infty)$. Однако, $\mathrm{FMO}(D)$ не является подклассом $L^p_{\mathrm{loc}}(D)$ ни для какого $p > 1$, хотя $\mathrm{FMO}(D) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(D)$, см., напр., [252], с. 211. Таким образом, FMO существенно шире $\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}$.

Точка $z_0 \in D$ называется **точкой Лебега** функции $\psi : D \to \mathbb{R}$, если $\psi$ интегрируема в окрестности $z_0$ и
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \fint_{B(z_0,\,\varepsilon)} |\psi(z) - \psi(z_0)|\, dm(z) = 0. \tag{5.44}$$
Известно, что для функции $\psi \in L^1(D)$ почти все точки $D$ являются ее точками Лебега.

По лемме 5.5 с выбором $\psi_{z_0,\,\varepsilon}(t) \equiv 1/t \log \frac{1}{t}$, см. следствие 2.3 в [35], получаем следующий результат.

**Теорема 5.7.** *Пусть $\mu : D \to \mathbb{C}$ – измеримая в жордановой области $D$ функция, такая что $|\mu(z)| < 1$ п.в. и*
$$K_\mu(z) \leqslant Q(z) \in \mathrm{FMO}(\overline{D}). \tag{5.45}$$
*Тогда для любой непрерывной функции $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ уравнение Бельтрами (5.1) имеет регулярное решение $f$ задачи Дирихле (5.5).*

**Следствие 5.3.** *В частности, заключение теоремы 5.7 остается в силе, если $K_\mu(z) \leqslant Q(z) \in \mathrm{BMO}(\overline{D})$.*

По следствию 2.1 в [35] из теоремы 5.7 также имеем:

**Следствие 5.4.** *Заключение теоремы 5.7 также справедливо, если*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \fint_{B(z_0,\,\varepsilon)} K_\mu(z)\,dm(z) < \infty \qquad \forall\ z_0 \in \overline{D}.$$

Здесь и далее подразумевается, что $K_\mu$ продолжена нулем вне области $D$.

**Теорема 5.8.** *Пусть $\mu : D \to \mathbb{C}$ – измеримая в жордановой области $D$ функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. такая, что $K_\mu \in L^1(D)$ и*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{||K_\mu||_1(z_0,\,r)} = \infty \qquad \forall\ z_0 \in \overline{D}, \tag{5.46}$$

*где $||K_\mu||_1(z_0,\,r) = \int_{S(z_0,\,r)} K_\mu(z)\,|dz|$ – нормы в $L^1$ функции $K_\mu$ на окружностях $S(z_0,\,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$, $0 < r < \delta(z_0) < d(z_0)$, $d(z_0) = \sup_{z\in D} |z - z_0|$. Тогда уравнение Бельтрами (5.1) имеет регулярное решение $f$ задачи Дирихле (5.5) для любой непрерывной функции $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$.*

**Доказательство.** Теорема 5.8 следует из леммы 5.5 при специальном выборе

$$\psi_{z_0,\,\varepsilon}(t) \equiv \psi_z(t) = \begin{cases} 1/\left[tk_{z_0}(t)\right], & t \in (0,\,\varepsilon_0), \\ 0, & t \in [\varepsilon_0,\,\infty), \end{cases}$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon(z_0)$ и $k_{z_0}(t)$ – среднее значение $K_\mu(z)$ на окружности $S(z_0, t)$. $\Box$

**Следствие 5.5.** *В частности, заключение теоремы 5.8 имеет место, если*

$$k_{z_0}(\varepsilon) = O\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad \forall\ z_0 \in \overline{D}$$

*при $\varepsilon \to 0$, где $k_{z_0}(\varepsilon)$ – среднее значение функции $K_\mu$ на окружности $S(z_0,\,\varepsilon)$.*

Из теоремы 5.8, привлекая также теорему 3.1 из работы [291], имеем следующий результат.

**Теорема 5.9.** *Пусть $\mu : D \to \mathbb{C}$ – измеримая в жордановой области $D$ функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. такая, что*

$$\int\limits_{D} \Phi(K_\mu(z))\, dm(z) < \infty, \tag{5.47}$$

*где $\Phi : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ – неубывающая выпуклая функция, с условием*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} = \infty \tag{5.48}$$

*для некоторого $\delta > \Phi(0)$. Тогда уравнение Бельтрами (5.1) имеет регулярное решение задачи Дирихле (5.5) для любой непрерывной функции $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$.*

**Следствие 5.6.** *В частности, заключение теоремы 5.9 имеет место, если при некотором $\alpha > 0$*

$$\int\limits_{D} e^{\alpha K_\mu(z)}\, dm(z) < \infty. \tag{5.49}$$

**Замечание 5.2.** По теореме Стоилова о факторизации, см., например, [101], любое регулярное решение $f$ задачи Дирихле для уравнения Бельтрами (5.1) с $K_\mu \in L^1_{loc}(D)$ может быть представлено в виде композиции $f = h \circ F$, где $h$ – аналитическая функция, а $F$ – гомеоморфное регулярное решение класса $W^{1,1}_{\rm loc}$. Таким образом, по теореме 5.1 из [293], условие (5.48) является не только достаточным, но и необходимым для того, чтобы любое уравнение Бельтрами (5.1) с интегральными ограничениями на дилатацию вида (5.47) имело регулярные решения задачи Дирихле (5.5) для любой непостоянной непрерывной функции $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$.

Полагая $H(t) = \log \Phi(t)$, заметим, что по предложению 1.4 при $p = 1$ условие (5.48) эквивалентно любому из следующих условий:

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty} H'(t)\, \frac{dt}{t} = \infty, \tag{5.50}$$

или

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty} \frac{dH(t)}{t} = \infty, \tag{5.51}$$

или

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty} H(t)\,\frac{dt}{t^2} = \infty \tag{5.52}$$

для некоторого $\Delta > 0$, а также каждому из равенств:

$$\int\limits_{0}^{\delta} H\left(\frac{1}{t}\right)\,dt = \infty \tag{5.53}$$

для некоторого $\delta > 0$,

$$\int\limits_{\Delta_*}^{\infty} \frac{d\eta}{H^{-1}(\eta)} = \infty \tag{5.54}$$

для некоторого $\Delta_* > H(+0)$.

Здесь интеграл в (5.51) понимается как интеграл Лебега–Стилтьеса, а интегралы в (5.49), (5.52)–(5.54) – как обычные интегралы Лебега.

## 5.7. Псевдорегулярные решения в многосвязных областях

Как впервые заметил Боярский, см., например, § 6 главы 4 в [12], в случае многосвязных областей задача Дирихле для уравнений Бельтрами, вообще говоря, не имеет решений в классе непрерывных (однозначных) в $\mathbb{C}$ функций. Поэтому естественно возникает вопрос: нельзя ли в этом случае существование решения задачи Дирихле получить в более широком классе? Оказывается можно, если решение задачи будем искать в классе функций, имеющих некоторое количество заранее фиксированных изолированных полюсов внутри области $D$. Точнее, при $\varphi(\zeta) \not\equiv \mathrm{const}$ **псевдорегулярное решение** такой задачи есть непрерывное в $\overline{\mathbb{C}}$, дискретное и открытое отображение $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ (вне полюсов) с якобианом $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2 \neq 0$ п.в., удовлетворяющее условию (5.5) и п.в. (5.1).

Рассуждая аналогично случаю односвязных областей и применяя теорему V.6.2 из [25] об отображениях конечносвязных областей на круговые области, а также теорему 4.14 в [12], получаем следующие результаты.

**Теорема 5.10.** *Пусть $D$ – ограниченная область в $\mathbb{C}$, граница которой состоит из $n \geqslant 2$ попарно непересекающихся жордановых кривых,* *и пусть* $\mu : D \to \mathbb{C}$ *– измеримая функция с* $|\mu(z)| < 1$ *п.в. такая, что*

$$K_\mu(z) \leqslant Q(z) \in \mathrm{FMO}(\overline{D}). \tag{5.55}$$

*Тогда уравнение Бельтрами (5.1) имеет псевдорегулярное решение задачи Дирихле (5.5) для любой непрерывной функции* $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$, $\varphi(\zeta) \not\equiv \mathrm{const}$, *с полюсами в* $p \geq n-1$ *предписанных внутренних точках* $D$.

**Следствие 5.7.** *В частности, заключение теоремы 5.10 остается в силе, если* $K_\mu(z) \leqslant Q(z) \in \mathrm{BMO}(\overline{D})$.

**Следствие 5.8.** *Заключение теоремы 5.10 также имеет место, если*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \fint_{B(z_0,\,\varepsilon)} K_\mu(z)\,dm(z) < \infty \qquad \forall\ z_0 \in \overline{D}.$$

**Теорема 5.11.** *Пусть* $D$ *– ограниченная область в* $\mathbb{C}$, *граница которой состоит из* $n \geqslant 2$ *попарно непересекающихся жордановых кривых, и пусть* $\mu : D \to \mathbb{C}$ *– измеримая функция с* $|\mu(z)| < 1$ *п.в. такая, что* $K_\mu \in L^1(D)$ *и*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{\|K_\mu(z_0,r)\|_1(r)} = \infty \qquad \forall\ z_0 \in \overline{D}, \tag{5.56}$$

*где* $\|K_\mu\|_1(z_0,r) = \int_{\gamma_r} K_\mu(z)|dz|$ *– нормы в* $L^1$ *функции* $K_\mu$ *на окружностях* $S(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| = r\}$, $0 < r < \delta(z_0) < d(z_0)$, $d(z_0) = \sup_{z\in D}|z-z_0|$. *Тогда уравнение Бельтрами (5.1) имеет псевдорегулярное решение задачи Дирихле (5.5) для любой непрерывной функции* $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$, $\varphi(\zeta) \not\equiv \mathrm{const}$, *с полюсами в* $p \geq n-1$ *предписанных внутренних точках* $D$.

**Следствие 5.9.** *В частности, заключения теоремы 5.11 имеют место, если*

$$k_{z_0}(\varepsilon) = O\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad \forall\ z_0 \in \overline{D}$$

*при* $\varepsilon \to 0$, *где* $k_{z_0}(\varepsilon)$ *– среднее значение функции* $K_\mu$ *на окружности* $S(z_0,\,\varepsilon)$.

**Теорема 5.12.** *Пусть* $D$ *– ограниченная область в* $\mathbb{C}$, *граница которой состоит из* $n \geqslant 2$ *попарно непересекающихся жордановых кривых, и пусть* $\mu : D \to \mathbb{C}$ *– измеримая функция с* $|\mu(z)| < 1$ *п.в. такая, что*

$$\int\limits_D \Phi(K_\mu(z))\,dm(z) < \infty, \tag{5.57}$$

*где* $\Phi : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *– неубывающая выпуклая функция с условием*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} = \infty \tag{5.58}$$

*для некоторого* $\delta > \Phi(0)$. *Тогда уравнение Бельтрами (5.1) имеет псевдорегулярное решение задачи Дирихле (5.5) для любой непрерывной функции* $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$, $\varphi(\zeta) \not\equiv \mathrm{const}$, *с полюсами в* $p \geq n-1$ *предписанных внутренних точках* $D$.

**Следствие 5.10.** *В частности, заключение теоремы 5.12 имеет место, если при некотором* $\alpha > 0$

$$\int\limits_{D} e^{\alpha K_\mu(z)}\, dm(z) < \infty. \tag{5.59}$$

## 5.8. Многозначные решения в многосвязных областях

В многосвязных областях $D \in \mathbb{C}$, помимо псевдорегулярных решений, задача Дирихле (5.5) для уравнений Бельтрами (5.1) допускает многозначные решения в духе теории многозначных аналитических функций. Говорим, что дискретное и открытое отображение $f : B(z_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{C}$, где $B(z_0, \varepsilon_0) \subset D$ является **локальным регулярным решением** уравнения (5.1), если $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, $J_f \neq 0$ и $f$ удовлетворяет (5.1) п.в. Два локальных регулярных решения $f_0 : B(z_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{C}$ и $f_* : B(z_*, \varepsilon_*) \to \mathbb{C}$ уравнения (5.1) будем называть **продолжением друг друга**, если существует конечная цепь таких решений $f_i : B(z_i, \varepsilon_i) \to \mathbb{C}$, $i = \overline{1, m}$, что $f_1 = f_0$, $f_m = f_*$ и $f_i(z) \equiv f_{i+1}(z)$ при $z \in E_i := B(z_i,\, \varepsilon_i) \cap B(z_{i+1},\, \varepsilon_{i+1}) \neq \varnothing$, $i = \overline{1, m-1}$. Совокупность локальных регулярных решений $f_j : B(z_j, \varepsilon_j) \to \mathbb{C}$, $j \in J$, будем называть **многозначным решением уравнения** (5.1) в $D$, если круги $B(z_j,\, \varepsilon_j)$ накрывают всю область $D$ и $f_j$ попарно являются продолжениями друг друга в этой совокупности. Многозначное решение (5.1) будем называть **многозначным решением задачи Дирихле** (5.5), если $u(z) = \mathrm{Re} f(z) = \mathrm{Re} f_j(z)$, $z \in B(z_j, \varepsilon_j)$, $j \in J$, является однозначной функцией в $D$, которая удовлетворяет условию (5.5).

Аналогично предыдущим параграфам, доказательство существования многозначных решений задачи Дирихле (5.5) для уравнений Бельтрами (5.1) в многосвязных областях редуцируются к задаче Дирихле для гармонических функций в круговых областях, см., например, § 3 главы VI в [25].

**Теорема 5.13.** *Пусть $D$ – ограниченная область в $\mathbb{C}$, граница которой состоит из конечного числа попарно непересекающихся жордановых кривых, и пусть $\mu : D \to \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в., удовлетворяющая посылкам теорем 5.10–5.12 или следствий 5.7–5.9. Тогда уравнение Бельтрами (5.1) имеет многозначное решение задачи Дирихле (5.5) для любой непрерывной функции $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$.*

**Замечание 5.3.** Можно показать, что имеет место аналог известной теоремы о монодромии для аналитических функций, состоящий в том, что любое многозначное решение уравнения Бельтрами (5.1) в односвязной области $D$ является его регулярным однозначным решением.

# Глава 6. К теории отображений с ограничениями интегрального типа

Глава 6 посвящена изучению свойств классов регулярных решений вырожденных уравнений Бельтрами с ограничениями интегрального типа на дилатации (см. работы [55, 57, 58]).

## 6.1. Введение

В данной главе рассмотриваются отображения класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ с ограничениями на дилатацию интегрального типа. Различные классы отображений, квазиконформных в среднем изучались в работах Альфорса Л., Гольберга А., Гутлянского В.Я., Зорича В., Иванца Т., Кругликова В.И., Крушкаля С.Л., Кудьявина В.С., Кюнау Р., Мартина Г., Миклюкова В.М., Перовича М., Песина И.Н., Рязанова В.И. и других авторов, см., напр., [252] и дальнейшие ссылки там. Ряд из них посвящен вопросам компактности и сходимости таких классов. Отметим, что в последнее время был получен целый ряд новых теорем существования гомеоморфных решений для вырожденных уравнений Бельтрами (см., например, монографии [188] и [252], а также обзоры [189]) и [306]), что открыло широкое поле исследований в данном направлении.

Пусть $D$ – область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т.е. связное открытое подмножество $\mathbb{C}$. **Уравнениями Бельтрами** называются уравнения вида

$$f_{\overline{z}} = \mu(z)\cdot f_z\,, \tag{6.1}$$

где $\mu(z) : D \to \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в., $f_{\overline{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + if_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - if_y)/2$, $z = x + iy$, $f_x$ и $f_y$ – частные производные отображения $f$ по $x$ и $y$, соответственно. Функция $\mu$ называется **комплексным коэффициентом** и

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}$$

– **максимальной дилатацией** или просто **дилатацией** уравнения (6.1). Уравнение Бельтрами (6.1) называется **вырожденным**, если $K_\mu \notin L^\infty$.

Напомним, что отображение $f : D \to \mathbb{C}$ называется **регулярным в точке** $z_0 \in D$, если $f$ в этой точке имеет полный дифференциал и его якобиан $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \neq 0$ (см., напр., I.1.6 в [239]). В дальнейшем гомеоморфизм $f$ класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ называется **регулярным**, если $J_f(z) > 0$ п.в. Наконец, **регулярным решением** уравнения Бельтрами (6.1) в области $D$ называется регулярный гомеоморфизм, который удовлетворяет (6.1) п.в. в $D$. Отметим, что понятие регулярного решения впервые введено в работе [139].

Всюду далее $S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$, $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, $A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, ${\rm dist}(E, F)$ – евклидово расстояние между множествами $E$ и $F$ в $\mathbb{C}$. Обозначим через $h$ **сферическое (хордальное)** расстояние между точками $z_1$ и $z_2$ в $\overline{\mathbb{C}}$: $h(z_1, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}$, $h(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}$, $z_1$, $z_2 \neq \infty$. В дальнейшем $dm(z)$ отвечает мере Лебега в $\mathbb{C}$, а через $dS(z) = (1 + |z|^2)^{-2}\, dm(z)$ обозначается **элемент сферической площади** в $\overline{\mathbb{C}}$, соответственно, через $L^1_s$ – класс всех функций $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, интегрируемых в $\mathbb{C}$ относительно сферической площади. **Сферическим диаметром множества** $E$ в $\overline{\mathbb{C}}$ называется величина $h(E) = \sup\limits_{z_1, z_2 \in E} h(z_1, z_2)$. Пусть $E, F \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ – произвольные множества. Обозначим через $\Delta(E, F, D)$ семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{C}}$, которые соединяют $E$ и $F$ в $D$, т.е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$, и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$.

Напомним, что борелева функция $\rho : \overline{\mathbb{C}} \to [0, \infty]$ называется **допустимой** для семейства кривых $\Gamma$ в $\overline{\mathbb{C}}$, пишут $\rho \in {\rm adm}\, \Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(z)\, |dz| \geqslant 1$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. **Модуль** семейства кривых $\Gamma$ определяется равенством

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in {\rm adm}\, \Gamma} \int\limits_{D} \rho^2(z)\, dm(z)\,.$$

Следующее понятие мотивированно кольцевым определением квазиконформности по Герингу и тесно связано с решением вырожденных уравнений Бельтрами на плоскости (см. [252]). Пусть $Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Говорят, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ является **кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в точке** $z_0 \in D$, если соотношение

$$M(\Delta(f(S_1), f(S_2), f(D))) \leqslant \int\limits_{A} Q(z)\, \eta^2(|z - z_0|)\, dm(z) \tag{6.2}$$

выполнено для любого кольца $A = A(z_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$, окружностей $S_i = S(z_0, r_i)$, $i = 1, 2$, и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что $\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1$.

Понятие кольцевого $Q$-гомеоморфизма может быть распространено в бесконечность стандартным образом. Именно, пусть $\infty \in D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$. Гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ называется **кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в** $\infty$, если отображение $\widetilde{f}(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ является кольцевым $Q'$-гомеоморфизмом в нуле с $Q'(z) = Q\left(\frac{1}{z}\right)$. Иначе говоря, отображение $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ – кольцевой $Q$-гомеоморфизм в $\infty$, если

$$M\left(\Delta\left((f(S(R_1)), f(S(R_2)), f(R)\right)\right) \leqslant \int\limits_{R} Q(w) \cdot \eta^2\left(|w|\right) dm(w)$$

для любого кольца $R = \{w \in \mathbb{C} : R_1 < |w| < R_2\}$ в $D$ с $0 < R_1 < R_2 < \infty$, $S(R_i) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R_i\}$, $i = 1, 2$, и для каждой измеримой функции $\eta : (R_1, R_2) \to [0, \infty]$ такой, что $\int\limits_{R_1}^{R_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1$.

## 6.2. Теоремы сходимости

Функция $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ называется **строго выпуклой**, если она является выпуклой, неубывающей и

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty \tag{6.3}$$

(см. [80], с. 37). В дальнейшем **непрерывность** функции $\Phi$ понимается относительно топологии $\overline{\mathbb{R}^+} = [0, \infty]$.

Следующий результат является обобщением теоремы 1 в [83].

**Лемма 6.1.** *Пусть $f$, $f_n : D \to \mathbb{C}$ – сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ и $f_n \to f$ при $n \to \infty$ локально равномерно. Тогда для любого открытого множества $\Omega \subset D$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} \Phi\left(K_\mu(z)\right) \Psi(z)\, dm(z) \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \int\limits_{\Omega} \Phi\left(K_{\mu_n}(z)\right) \Psi(z)\, dm(z) \tag{6.4}$$

*для любой непрерывной строго выпуклой функции $\Phi : [1, \infty] \to \overline{\mathbb{R}^+}$ и равномерно непрерывной функции $\Psi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, такой что $1/\Psi$ локально ограничено в $\mathbb{C}$.*

**Доказательство.** Ввиду леммы Фату и счетной аддитивности интеграла (см., напр., теоремы I(12.7) и I(12.10) в [88]), утверждение достаточно доказать для ограниченных множеств $\Omega$. На таком множестве по условию леммы функция $\Psi(z)$ ограничена сверху и $\Psi(z) \geqslant C > 0$ для всех $z \in \Omega$.

Пусть $K(z, h) \subset \Omega$ – квадрат с центром в точке $z$ и длиной стороны $h$, ребра которого ориентированы параллельно осям координат. Из равномерной непрерывности $\Psi(z)$ следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любых $z, z' \in \Omega$ из того, что $z \in K(z', h)$, $h < \delta(\varepsilon)$, следует неравенство $|\Psi(z) - \Psi(z')| < \varepsilon$.

Система квадратов $K(z, h)$, $z \in \Omega$, $h < \delta(\varepsilon)$, образует покрытие множества $\Omega$ в смысле Витали и по теореме Витали (см., напр., теорему IV(3.1) в [88]) можно выбрать последовательность непересекающихся квадратов $E_m = K(z_m, h_m) \subseteq \Omega$, $m = 1, 2, \ldots$, из указанного покрытия, такую что $\operatorname{mes}\{\Omega \setminus \cup E_m\} = 0$.

Согласно теореме 1 в [83], при $\varepsilon < C$, получаем, что

$$\int\limits_{E_m} \Phi\left(K_\mu(\zeta)\right) \Psi(\zeta)\, dm(\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant (\Psi(z_m) - \varepsilon) \int\limits_{E_m} \Phi\left(K_\mu(\zeta)\right)\, dm(\zeta) + 2\varepsilon \int\limits_{E_m} \Phi\left(K_\mu(\zeta)\right)\, dm(\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant (\Psi(z_m) - \varepsilon) \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_{E_m} \Phi\left(K_{\mu_n}(\zeta)\right)\, dm(\zeta) + 2\varepsilon \int\limits_{E_m} \Phi\left(K_\mu(\zeta)\right)\, dm(\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_{E_m} \Phi\left(K_{\mu_n}(\zeta)\right) \Psi(\zeta)\, dm(\zeta) + 2\varepsilon \int\limits_{E_m} \Phi\left(K_\mu(\zeta)\right)\, dm(\zeta)\,.$$

Из последнего неравенства, согласно счетной аддитивности интеграла и леммы Фату, имеем, что

$$\int\limits_{\Omega} \Phi\left(K_\mu(z)\right) \left(\Psi(z) - 2\varepsilon\right)\, dm(z) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} \Phi\left(K_{\mu_n}(z)\right) \Psi(z)\, dm(z)\,,$$

откуда в силу произвольного выбора $\varepsilon$ получаем неравенство (6.4). $\square$

Прежде чем перейти к формулировке и доказательству одной из основных теорем параграфа, приведем некоторые определения и замечания.

В дальнейшем мы используем функцию множества $\mathcal{M}(\Omega)$, заданную на произвольных открытых множествах $\Omega$ в $\mathbb{C}$, которую всегда можно доопределить (и переопределить) на произвольных множествах $E$ в $\mathbb{C}$, полагая

$$\mathcal{M}_*(E) = \inf_{\Omega \supseteq E} \mathcal{M}(\Omega)\,. \tag{6.5}$$

Заметим, что функция множества $\mathcal{M}_*(E)$ является монотонной по включению и полунепрерывной справа, т.е. если $E = \bigcap E_n$, то

$$\mathcal{M}_*(E) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \mathcal{M}_*(E_n) \tag{6.6}$$

и существует такая последовательность (открытых) множеств $\Omega_n \supseteq E$, для которой

$$\mathcal{M}_*(E) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{M}_*(\Omega_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{M}(\Omega_n)\,. \tag{6.7}$$

Таким образом, произвольная функция $\mathcal{M}(\Omega)$ открытого множества $\Omega$ в $\mathbb{C}$ допускает регулярную замену $\mathcal{M}_*$ со свойствами (6.5)–(6.7).

Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ – непрерывная функция. Говорят, что $f$ обладает $N$-свойством по Лузину, если для любого $E \subset D$

$$\operatorname{mes} E = 0 \Rightarrow \operatorname{mes} f(E) = 0\,.$$

Говорят, что функция $f$ обладает $N^{-1}$-свойством, если для любого $E \subset \mathbb{C}$

$$\operatorname{mes} E = 0 \Rightarrow \operatorname{mes}\left\{f^{-1}(E)\right\} = 0\,.$$

**Теорема 6.1.** *Пусть $f_n : D \to \mathbb{C}$ – последовательность регулярных решений уравнения Бельтрами с комплексными коэффициентами $\mu_n$. Предположим, что для каждого открытого множества $\Omega \subset D$ и некоторой локально конечной функции множества $\mathcal{M}(\Omega)$*

$$\int\limits_{\Omega} \Phi\left(K_{\mu_n}(z)\right)\, dS(z) \leqslant \mathcal{M}(\Omega)\,, \tag{6.8}$$

*где $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – непрерывная строго выпуклая функция.*

*Если $f_n \to f$ равномерно на каждом компактном множестве в $D$, где $f : D \to \mathbb{C}$ – гомеоморфизм, то $f$ является регулярным решением уравнения (6.1) с комплексным коэффициентом $\mu$, таким что*

$$\int\limits_{\Omega} \Phi\left(K_{\mu}(z)\right) dS(z) \leqslant \mathcal{M}(\Omega) \tag{6.9}$$

*для любого открытого множества* $\Omega \subset D$.

**Доказательство.** Покажем, что предельная функция $f$ последовательности $f_n$ принадлежит классу $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$. Согласно лемме 2.1 в [289], для доказательства этого факта достаточно показать, что $\partial f_n$ и $\overline{\partial} f_n$ равностепенно ограничены в $L^1_{\rm loc}$ и имеют локально равностепенно абсолютно непрерывные неопределенные интегралы.

Итак, пусть $C$ – произвольное компактное множество в $D$ и пусть $V$ – открытое множество с компактным замыканием $\overline{V}$ в $D$, такое что $C \subset V$, скажем $V = \{z \in D : {\rm dist}(z, C) < r\}$, где $r < {\rm dist}(C, \partial D)$. Заметим далее, что

$$|\overline{\partial} f_n| \leqslant |\partial f_n| \leqslant |\partial f_n| + |\overline{\partial} f_n| = K^{1/2}_{\mu_n}(z) \cdot J^{1/2}_{f_n}(z) \quad \text{п.в.}$$

Следовательно, согласно неравенству Гельдера и лемме III.3.3 в [239]

$$\int\limits_{E} |\partial f_n|\, dm(z) \leqslant \left| \int\limits_{E} K_{\mu_n}(z)\, dm(z) \right|^{1/2} |f_n(C)|^{1/2}$$

для любого измеримого множества $E \subseteq C$. Отсюда, поскольку $f_n$ сходится к $f$ равномерно на $C$, получаем

$$\int\limits_{E} |\partial f_n|\, dm(z) \leqslant \left| \int\limits_{E} K_{\mu_n}(z)\, dm(z) \right|^{1/2} |f(V)|^{1/2} \tag{6.10}$$

для всех достаточно больших $n$. Заметим, что условие (6.8) по теореме 3.1.2 в [80] влечет равномерную ограниченность $K_{\mu_n}$ в $L^1_{\rm loc}$ и локально равностепенную абсолютную непрерывность неопределенных интегралов $\int K_{\mu_n}\, dm(z)$. Таким образом, из (6.10) получаем, что $\frac{\partial f_n}{\partial x}$, $\frac{\partial f_n}{\partial y}$ равностепенно ограничены в $L^1_{\rm loc}$ и имеют локально равностепенно абсолютно непрерывные неопределенные интегралы. Согласно лемме 2.1 в [289], $f$ принадлежит $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$.

Заметим, что из локально равномерной сходимости $f_n \to f$ последовательности $f_n$ следует локально равномерная сходимость $f_n^{-1} \to f^{-1}$ (см., напр., лемму 3.1 в [220]).

Поскольку $f_n$ принадлежит $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$ и $J_{f_n}(z) > 0$ п.в., $K_\mu \in L^1_{\rm loc}$, то $g_n = f_n^{-1} \in W^{1,2}_{\rm loc}(f_n(D))$ (см. теоремы 1.1 и 1.3 в [202]).

Таким образом, после замен переменных (см., напр., леммы III.2.1 и III.3.2, теоремы III.3.1 и III.6.1 в [239]), для больших $n$ мы имеем

$$\int\limits_{B} |\partial g_n|^2\, dm(w) = \int\limits_{g_n(B)} \frac{dm(z)}{1 - |\mu_n(z)|^2} \leqslant \int\limits_{B^*} K_{\mu_n}(z)\, dm(z)\,,$$

где $B^*$ и $B$ – подобласти с компактным замыканием в $D$ и $D' = f(D)$, соответственно, такие что $g(\overline{B}) \subset B^*$, $g = f^{-1}$. Из последнего неравенства имеем, что нормы $\|f_n^{-1}\|$ равностепенно ограничены в $W^{1,2}_{\rm loc}(f(D))$, и, следовательно, $f^{-1} \in W^{1,2}_{\rm loc}(f(D))$ (см. теорему III.3.5 в [77], а также более раннюю теорему 1 в [103]). Тогда отображение $f$ имеет $N^{-1}$-свойство (см. теорему III.6.1 в [239]) и поэтому $J_f \neq 0$ п.в. в $D$ (см. теорему 1 в [71]).

Соотношение (6.9) следует из леммы 6.1. $\Box$

Для дальнейших рассуждений нам понадобится лемма о связи гомеоморфных $W^{1,1}_{\rm loc}$ решений уравнения Бельтрами и кольцевых $Q$-гомеоморфизмов, которая была получена в работе [241] (ср. теорему 3.1 в [294], а также лемму 20.9.1 в [128]) для случая на плоскости. Во второй части данной монографии приведен ее аналог для случая в пространстве (см. следствие 8.10).

**Лемма 6.2.** Пусть $f$ – гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (6.1) класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ с локально интегрируемой дилатацией $K_\mu$. Тогда $f$ является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в каждой точке $z_0 \in D$ с $Q = K_\mu$.

Следующая теорема сходимости дополняет теорему 6.1.

**Теорема 6.2.** *Пусть $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – непрерывная строго выпуклая функция, такая что*

$$\int\limits_{\sigma}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} = \infty \tag{6.11}$$

*при некотором $\sigma > \Phi(0)$ и пусть $\mathcal{M}(\Omega)$ – локально конечная функция открытого множества $\Omega$ в $D \subseteq \mathbb{C}$. Если $f_n : D \to \mathbb{C}$ – последовательность гомеоморфных решений уравнения Бельтрами класса $W^{1,1}_{\rm loc}$, удовлетворяющих условию (6.8), $\mu_n = \mu_{f_n}$, такая что $f_n(z_1) = z_1$, $f_n(z_2) = z_2$ и $f_n \to f$ равномерно на каждом компактном подмножестве в $D$, то предельное отображение $f$ – гомеоморфизм.*

**Доказательство.** Положим $A = A(z_0, r_1, r_2)$ для произвольной точки $z_0 \in D$ и $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$. Ввиду условия (6.8) по теореме 3.1.2 в [80] найдется число $\Psi_A < \infty$, такое что

$$\int\limits_{A} K_{\mu_n}(z)\, dm(z) \leqslant \Psi_A\,, \tag{6.12}$$

так как $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – строго выпуклая функция.

По лемме 6.2 отображение $f_n$ является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом с $Q = K_{\mu_n}$, $\mu_n = \mu_{f_n}$, во всех точках области $D$. По лемме 7.3 в [252] получаем, что

$$\frac{2\pi}{M\left(\Delta\left(f_n(S_1), f_n(S_2), f_n(A)\right)\right)} \geqslant \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r k_{z_0,\,n}(r)}\,, \tag{6.13}$$

где $k_{z_0,n}(r)$ – среднее значение $K_{\mu_n}(z)$ по окружности $|z - z_0| = r$, $S_j = S(z_0, r_j)$, $j = 1, 2$.

Далее, найдется измеримое подмножество $X$ множества чисел $r$ из $[r_1, r_2]$ меры $(r_2 - r_1)/2$, на котором

$$\int\limits_0^{2\pi} K_{\mu_n}\left(z_0 + re^{i\varphi}\right)\, d\varphi \leqslant \frac{8\Psi_A}{(r_2 - r_1)\,(r_2 + 3r_1)}\,.$$

Действительно, в противном случае имеем

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_0^{2\pi} K_{\mu_n}\left(z_0 + re^{i\varphi}\right)\, d\varphi r\, dr > \frac{8\Psi_A}{(r_2 - r_1)\,(r_2 + 3r_1)} \int\limits_{r_1}^{(r_2+r_1)/2} r\, dr = \Psi_A\,,$$

что противоречит (6.12).

Следовательно, для любого $A$ найдется $q$, определенное ниже, такое, что для всех $n$

$$\frac{2\pi}{M\left(\Delta\left(f_n(S_1), f_n(S_2), f_n(A)\right)\right)} \geqslant 2\pi \int\limits_X \frac{dr/r}{\int\limits_0^{2\pi} K_{\mu_n}\left(z_0 + re^{i\varphi}\right) d\varphi} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\pi\,(r_2 + 3r_1)\,(r_2 - r_1)}{4\Psi_A} \int\limits_{(r_1+r_2)/2}^{r_2} \frac{dr}{r} = q > 0\,.$$

Поэтому по лемме 1 в [143], см. также эту работу в приложении к монографии [188], $f(z)$ – гомеоморфизм. □

## 6.3. Теоремы нормальности

Пусть $D$ – область в $\mathbb{C}$, $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – неубывающая выпуклая функция, $\mathcal{M}(\Omega)$ – произвольная функция открытого множества $\Omega$ в $D$, а $\Delta > 0$.

Обозначим через $\mathfrak{F}^{\mathcal{M}}_{\Phi,\Delta}$ класс всех регулярных решений $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ уравнения Бельтрами (6.1) с $h\left(\overline{\mathbb{C}} \setminus f(D)\right) \geqslant \Delta$ и комплексными коэффициентами $\mu$, такими что

$$\int\limits_{\Omega} \Phi\left(K_\mu(z)\right) dS(z) \leqslant \mathcal{M}(\Omega) \tag{6.14}$$

для любого открытого множества $\Omega$ в $D$.

Семейство $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений из $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$ называется **нормальным**, если каждая последовательность отображений $f_n$ из $\mathfrak{F}$ имеет подпоследовательность $f_{n_k}$, которая сходится к непрерывному отображению $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ равномерно на каждом компактном множестве $K \subset \mathbb{C}$. Нормальность тесно связана со следующим понятием. Семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ называется **равностепенно непрерывным в точке** $z_0 \in D$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое что $h\left(f(z), f(z_0)\right) < \varepsilon$ для всех $f \in \mathfrak{F}$ и $z \in D$ с $|z - z_0| < \delta$. Семейство $\mathfrak{F}$ называется **равностепенно непрерывным**, если $\mathfrak{F}$ – равностепенно непрерывно в каждой точке $z_0 \in \mathbb{C}$.

Для каждой неубывающей функции $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$, обратную функцию $\Phi^{-1} : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ можно определить следующим образом:

$$\Phi^{-1}(\tau) = \inf_{\Phi(t) \geqslant \tau} t\,.$$

Здесь inf равен $\infty$, если множество элементов $t \in \overline{\mathbb{R}^+}$, таких что $\Phi(t) \geqslant \tau$, является пустым.

**Теорема 6.3.** *Пусть функция $\Phi$ удовлетворяет условию (6.11). Тогда класс $\mathfrak{F}^{\mathcal{M}}_{\Phi,\Delta}$ образует нормальное семейство для любого $\Delta > 0$ и любой локально конечной функции множества $\mathcal{M}(\Omega)$.*

**Доказательство.** Пусть $f$ – отображение из класса $\mathfrak{F}^{\mathcal{M}}_{\Phi,\Delta}$. Без ограничения общности будем считать, что $\Phi(0) > 0$. По лемме 6.2 отображение $f_n$ является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом с $Q = K_{\mu_n}$, $\mu_n = \mu_{f_n}$, во всех точках области $D$.

Согласно критерию Арцела–Асколи (см. п. 20.4 в [320]) достаточно показать, что отображения из $\mathfrak{F}^{\mathcal{M}}_{\Phi,\Delta}$ равностепенно непрерывны в каждой точке $z_0 \in D$. Из теоремы 7.3 в [252] следует, что

$$h\left(f(z), f(z_0)\right) \leqslant \frac{32}{\Delta} \exp\left\{-\int\limits_{|z-z_0|}^{\rho} \frac{dr}{rk_{z_0}(r)}\right\} \tag{6.15}$$

для любого $z \in B(z_0, \rho)$ и $\rho = \rho(z_0) < \mathrm{dist}(z_0, \partial D)$, такого что $\mathcal{M}(B(z_0, \rho)) < \infty$, где $k_{z_0}(r)$ – среднее значение $K_\mu(z)$ по окружности $|z - z_0| = r$. После замены $t = r/\rho$, интеграл справа в (6.15) оценивается следующим образом (см. лемму 3.1 в [282]):

$$\int\limits_{|z-z_0|}^{\rho} \frac{dr}{rk_{z_0}(r)} = \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dt}{tk(t)} \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{eP(\varepsilon)}^{\frac{P(\varepsilon)}{\varepsilon^2}} \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)}\,,$$

где $\varepsilon = |z - z_0|/\rho$, $k(t) = k_{z_0}(\rho t)$ и

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi\rho^2\left(1 - \varepsilon^2\right)} \int\limits_{R} \Phi\left(K_\mu(\zeta)\right) dm(\zeta)\,,$$

где $R = \{\zeta \in \mathbb{C} : |z - z_0| < |\zeta - z_0| < \rho\}$ – кольцо с центром в точке $z_0$. Отметим, что

$$P(\varepsilon) \leqslant \frac{\beta(z_0)}{2\pi\left(1 - \varepsilon^2\right)} \int\limits_{R} \Phi\left(K_\mu(\zeta)\right) \frac{dm(\zeta)}{\left(1 + |\zeta|^2\right)^2}\,,$$

где $\beta(z_0) = (1 + (\rho(z_0) + |z_0|)^2)^2/\rho^2(z_0)$, поскольку $|\zeta| \leqslant |\zeta - z_0| + |z_0| \leqslant$ $\leqslant \rho(z_0) + |z_0|$ при $\zeta \in R$. Таким образом,

$$\Phi(0) \leqslant P(\varepsilon) \leqslant \frac{\beta(z_0)}{\pi}\mathcal{M}(R)\,,$$

если $\varepsilon \leqslant 1/\sqrt{2}$ и, в частности, если $\varepsilon \leqslant 1/2$. Следовательно,

$$h\left(f(z), f(z_0)\right) \leqslant \frac{32}{\Delta} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int\limits_{\beta(z_0)\mathcal{M}(R)}^{\frac{\Phi(0)\rho^2(z_0)}{|z-z_0|^2}} \frac{d\tau}{\tau\Phi^{-1}(r)} \right\} \tag{6.16}$$

для всех $z$, таких что $|z - z_0| < \rho(z_0)/2$. Таким образом, отображения $f \in \mathfrak{F}^{\mathcal{M}}_{\Phi,\Delta}$ равностепенно непрерывны в точке $z_0$. $\square$

## 6.4. Теоремы компактности

Семейство $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений называется **замкнутым**, если все предельные отображения последовательностей из $\mathfrak{F}$ относительно равномерной сходимости на компактах принадлежат $\mathfrak{F}$. Класс отображений $\mathfrak{F}$ называется **компактным**, если $\mathfrak{F}$ нормален и замкнут.

Пусть $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – неубывающая выпуклая функция, а $\mathcal{M}(\Omega)$ – функция открытого множества $\Omega$ в $\mathbb{C}$. Обозначим через $\mathfrak{F}^{\mathcal{M}}_{\Phi}$ класс всех регулярных решений $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ уравнения Бельтрами (6.1) с комплексными коэффициентами $\mu$, такими что

$$\int\limits_{\Omega} \Phi\left(K_{\mu}(z)\right) dS(z) \leqslant \mathcal{M}(\Omega) \tag{6.17}$$

и нормировками $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$.

Комбинируя теоремы 6.1, 6.2 и 6.3, получаем следующее заключение.

**Теорема 6.4.** *Пусть функция $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ непрерывна, строго выпукла и удовлетворяет условию (6.11), а функция $\mathcal{M}(\Omega)$ открытого множества $\Omega$ в $\mathbb{C}$ ограничена. Тогда класс $\mathfrak{F}^{\mathcal{M}}_{\Phi}$ является компактным.*

# Глава 7. К теории отображений с ограничениями теоретико-множественного типа

Глава 7 посвящена изучению свойств классов $Q(z)$-квазиконформных отображений с ограничениями теоретико-множественного типа на их комплексные характеристики (см. работы [56, 59, 60]).

## 7.1. Введение

Функция $f : D \to \mathbb{C}$ называется **абсолютно непрерывной на линиях**, пишут $f \in$ ACL, если для любого замкнутого прямоугольника $R$ в $D$, стороны которого параллельны координатным осям, $f|_R$ является абсолютно непрерывной на почти всех линейных сегментах в $R$, параллельных сторонам $R$ (см., например, [3, с. 27]).

Пусть $Q : D \to I = [1, \infty]$ – произвольная функция. Сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{C}$ класса ACL называется $Q(z)$-**квазиконформным** ($Q(z)$-к.к.) отображением, если почти всюду

$$K_{\mu_f}(z) := \frac{1 + |\mu_f(z)|}{1 - |\mu_f(z)|} \leqslant Q(z)\,, \tag{7.1}$$

где $\mu_f = f_{\overline{z}}/f_z$, если $f_z \neq 0$ и $\mu_f = 0$, если $f_z = 0$. Функцию $\mu_f$ принято называть **комплексной характеристикой**, а $K_{\mu_f}$ – **дилатацией отображения** $f$. Понятие $Q(z)-$к.к. отображения, впервые было введено в статье [302] для случая, когда $Q \in L^\infty$, т.е., фактически для $K-$к.к. отображений, где $K = ||Q||_\infty$.

В работах Андриян–Казаку К., Волковыского Л.И., Иоффе М.С., Крушкаля С.Л., Кюнау Р., Летинена М., Ренельта Г., Тейхмюллера О., Шиффера М., Шобера Г. и других авторов исследовались классы $Q(z)-$к.к. отображений, для которых почти всюду $\mu(z) \in \Delta_{q(z)}$, где $\Delta_{q(z)} = \{\nu \in \mathbb{C} : |\nu| \leqslant q(z)\}$, $q(z) = (Q(z) - 1)\,/\,(Q(z) + 1)$, а также классы с дополнительными ограничениями вида: $\mathcal{F}(\mu(z), z) \leqslant 0$ почти всюду, где $\mathcal{F}(\mu, z) : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Наконец, последняя из постановок Шиффера М. и Шобера Г. привела к рассмотрению классов с ограничениями общего теоретико–множественного вида:

$$\mu(z) \in M(z) \subseteq \Delta_{q(z)} \tag{7.2}$$

почти всюду. Однако все это развитие происходило, фактически, в рамках $K-$к.к. отображений, поскольку предполагалось, что

$$K := \operatorname{ess\,sup} Q(z) < \infty. \tag{7.3}$$

Теорема существования и единственности Ги Давида [160] позволила продвинуться дальше в указанном направлении. Именно, обозначим $\mathfrak{M}_M$ класс всех измеримых функций, удовлетворяющих условию (7.2), но где, вообще говоря, не выполнено (7.3). Через $H_M$ (соответственно $H_M^*$) обозначим совокупность всех ACL (соответственно регулярных) гомеоморфизмов $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ сохраняющих ориентацию с комплексными характеристиками из $\mathfrak{M}_M$ и нормировками $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$.

Говорят, что измеримая функция $Q(z) : \mathbb{C} \to [1, \infty]$ **экспоненциально ограничена по мере**, если существуют постоянные $T \geqslant 1$, $\gamma > 0$ и $c > 0$, такие что для всех $t \geqslant T$: $\operatorname{mes}\{z \in \mathbb{C} : Q(z) > t\} \leqslant ce^{-\gamma t}$. В работе [82], см. также [29], была доказана компактность класса $H_M$ с указанным ограничением на $Q(z)$. Заметим, что при этом ограничении классы $H_M$ и $H_M^*$ совпадают. В данной главе доказана компактность класса гомеоморфизмов $H_M^*$ с более общими условиями на $Q(z)$, что имеет важные приложения в теории вариационного метода.

## 7.2. Теоремы сходимости

Данная глава посвящена теоремам сходимости для уравнений Бельтрами с ограничениями теоретико-множественного типа на дилатацию.

Для формулировки основных результатов нам понадобятся некоторые элементы теории инвариантно-выпуклых множеств (см., например, [81] или [29]). Пусть $\mathcal{G}$ – группа всех дробно-линейных отображений $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на себя. Множество $M$ из $\mathbb{D}$ называется **инвариантно-выпуклым**, если все множества $g(M)$, $g \in \mathcal{G}$, являются выпуклыми. В частности, такие множества являются выпуклыми. **Инвариантно–выпуклой оболочкой** $\operatorname{inv\,co} M$ множества $M$ из $\mathbb{D}$, $\overline{M} \subseteq \mathbb{D}$, будем называть минимальное по включению замкнутое инвариантно–выпуклое множество, содержащее $M$.

Штребелем К. в работе [310] было показано, что если $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots,$ – последовательность $Q(z)$-к.к. отображений с $Q(z) \equiv$

$\equiv Q < \infty$ и $f_n \to f$ локально равномерно, где $f : D \to \mathbb{C}$ – гомеоморфизм, то $|\mu(z)| \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |\mu_n(z)|$ почти всюду. Следующая лемма уточняет область комплексного коэффициента предельного отображения и распространяет его на случай локально суммируемой $Q(z)$.

**Лемма 7.1.** *Пусть $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots,$ – последовательность $Q(z)$-к.к. отображений с $Q \in L^1_{\rm loc}$ и $f_n \to f$ локально равномерно при $n \to \infty$, где $f : D \to \mathbb{C}$ – гомеоморфизм. Тогда $f$ является $Q(z)$-к.к. отображением и $(f_n)_z \to f_z$, $(f_n)_{\overline{z}} \to f_{\overline{z}}$ при $n \to \infty$ слабо в $L^1_{\rm loc}$. Кроме того, для почти всех $z \in R_f$*

$$\mu(z) \in \operatorname{inv} \operatorname{co} M(z)\,, \tag{7.4}$$

*где $R_f$ – множество всех регулярных точек отображения $f$ и*

$$M(z) = \mathrm{Ls}_{n\to\infty}\{\mu_n(z)\}. \tag{7.5}$$

Здесь, $\mathrm{Ls}_{n\to\infty}\{\mu_n(z)\}$ обозначает верхний топологический предел множеств $\{\mu_n(z)\}$, т.е. множество всех точек накопления последовательности $\mu_n(z)$ (см. [46], с. 344).

**Доказательство.** Согласно теореме 3.1 и замечанию 3.1 в [289], а также следствию 5 в [83], $f$ является $Q(z)$-к.к. отображением и $(f_n)_z \to f_z$ и $(f_n)_{\overline{z}} \to f_{\overline{z}}$ слабо в $L^1_{\rm loc}$. Остается доказать (7.4).

В силу предложения 2 из [81], см. также следствие А2 в [29],

$$\operatorname{inv} \operatorname{co} M(z) = \bigcap_{m\in N(z)} K_m$$

почти всюду, где $K_m$, $m = 1, 2, \ldots,$ – некоторая перенумерация всех замкнутых кругов из $\mathbb{D}$, координаты центров и радиусы которых являются рациональными числами, а $N(z)$ – множество всех натуральных чисел $m = 1, 2, \ldots$, для которых $M(z) \subseteq K_m$. Поэтому достаточно показать, что $\mu(z) \in K_m$ при всех $m \in N(z)$ для почти всех $z \in R_f$.

Пусть $c_m$ – центр и $k_m$ – радиус круга $K_m$ в гиперболической метрике в $\mathbb{D}$ (см., например, [72], с. 128–129). Тогда при помощи дробно-линейного отображения $\mathbb{D}$ на себя

$$\gamma_m(\nu) = (\nu - c_m)/(1 - \nu\overline{c_m})$$

круг $K_m$ преобразуется в некоторый круг с центром в нуле. Евклидов радиус этого круга обозначим через $r_m$. Рассмотрим аффинные преобразования плоскости

$$z_m(\zeta) = \zeta - c_m\overline{\zeta}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

которые одновременно являются $Q_m$–к.к. отображениями $\mathbb{C}$ на себя, где $Q_m=(1+|c_m|)/(1-|c_m|)$.

Пусть $\mu^{(m)}$ и $\mu_n^{(m)}$ – комплексные характеристики отображений $f^{(m)}=$ $=f\circ z_m$ и $f_n^{(m)}=f_n\circ z_m$, $m,n=1,2,\ldots$, соответственно. Заметим, что $f_n^{(m)}(\zeta)$ являются $Q_m^*(\zeta)$-к.к. отображениями с $Q_m^*(\zeta):=Q_m\cdot Q(z_m(\zeta))\in$ $\in L^1_{\rm loc}$. Поскольку для каждого фиксированного $m=1,2,\ldots$, очевидно, что $f_n^{(m)}\to f^{(m)}$ локально равномерно при $n\to\infty$, то согласно теореме 3.1 и замечанию 3.1 в [289], а также следствию 5 в [83],

$$|\mu^{(m)}(\zeta)|\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}|\mu_n^{(m)}(\zeta)|\leqslant r_m$$

для всех $\zeta\in E^{(m)}\setminus e^{(m)}$, где $e^{(m)}$ – некоторое подмножество нулевой меры $E^{(m)}=z_m^{-1}(E_m)$, а $E_m$ – множество всех точек $z\in D$, для которых $M(z)\subseteq K_m$. Таким образом, при каждом $m=1,2,\ldots$,

$$|\gamma_m(\mu(z))|\leqslant r_m \tag{7.6}$$

для всех $z\in R_f\cap E_m\setminus e_m$, где $e_m=z_m(e^{(m)})$ – множество нулевой меры (см. [3], с. 36). Пусть $E=\cup e_m$. Тогда $E$ – множество нулевой меры и для любого $z\in R_f\setminus E$ неравенство (7.6) имеет место при всех $m\in N(z)$. Однако, (7.6) эквивалентно при $z\in R_f$ включению $\mu(z)\in K_m$ и тем самым включение (7.4) доказано для почти всех $z\in R_f$. $\square$

**Теорема 7.1.** *Пусть $f_n:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ – последовательность регулярных гомеоморфизмов, $f_n(0)=0$, $f_n(1)=1$, $f_n(\infty)=\infty$, сходящаяся локально равномерно в $\overline{\mathbb{C}}$ относительно сферической метрики к некоторому отображению $f$, причем $K_{\mu_{f_n}}(z)\leqslant Q(z)\in L^1_S$. Тогда $f$ – регулярный гомеоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$ с нормировками $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(\infty)=\infty$.*

При доказательстве теоремы 7.1 воспользуемся следующим равенством, которое легко проверить непосредственным вычислением, для $f=u+iv$:

$$|\partial f|^2+|\overline{\partial}f|^2=\frac{1}{2}\left(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2\right)\,. \tag{7.7}$$

**Доказательство.** Покажем, что $f$ – гомеоморфизм в $\mathbb{C}$. Полагая $g_n=f_n^{-1}$ и $u_n={\rm Re\,g_n}$, $v_n={\rm Im\,g_n}$ имеем, ввиду равенства (7.7) и теоремы 1.3 в [202], что

$$\begin{aligned} I_n:=\int\limits_{\mathbb{C}}\frac{|\nabla u_n|^2+|\nabla v_n|^2}{(1+|u_n|^2+|v_n|^2)^2}\,dm(\zeta)=2\int\limits_{\mathbb{C}}\frac{|\partial g_n|^2+|\overline{\partial}g_n|^2}{(1+|g_n|^2)^2}\,dm(\zeta)\leqslant\\ \leqslant 4\int\limits_{\mathbb{C}}|\partial g_n|^2\,\frac{dm(\zeta)}{(1+|g_n|^2)^2}=4\int\limits_{\mathbb{C}}\frac{1}{1-|\nu_n(\zeta)|^2}\,J_n(\zeta)\,\frac{dm(\zeta)}{(1+|g_n|^2)^2}\,, \end{aligned} \tag{7.8}$$

где $J_n$ обозначает якобиан отображения $g_n$, а $\nu_n$ – его комплексную дилатацию. Согласно теореме 1.3 в [202] имеем, что $g_n \in W^{1,2}_{\rm loc}$. Следовательно, $g_n$ локально абсолютно непрерывны и после замены переменных получаем, что

$$I_n \leqslant 4\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{1}{1-|\mu_n(z)|^2}\,\frac{dm(z)}{(1+|z|^2)^2} \leqslant I := 4\int\limits_{\mathbb{C}} Q(z)\,dS(z) < \infty \qquad (7.9)$$

(см. леммы III.2.1 и III.3.2, а также теоремы III.3.1 и III.6.1 в [239] и I.C(3) в [3]). Оценка (7.9) позволяет установить, что предельное отображение $f$ является локально гомеоморфным, а потому и просто гомеоморфизмом $\mathbb{C}$ на себя. Действительно, по теореме I.13.3 в [46] $f$ – непрерывное отображение как равномерный предел непрерывных отображений и, таким образом, последовательность $f_n$ образует равностепенно непрерывное семейство отображений (см., например, предложение 7.1 в [252]). Пусть

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t\right).$$

Тогда согласно теореме 9 в [103, с. 62], найдется $\delta > 0$, такое что

$$h\left(f_n(z_1), f_n(z_2)\right) > \varphi^{-1}\left(\exp\left\{-\frac{4\pi I_n}{h^2(z_1,z_2)}\right\}\right),$$

как только $h(z_1,z_2) < \delta$. Таким образом, при $n \to \infty$ получаем, что при $h(z_1,z_2) < \delta$

$$h\left(f(z_1), f(z_2)\right) > \varphi^{-1}\left(\exp\left\{-\frac{4\pi I}{h^2(z_1,\, z_2)}\right\}\right) > 0\,. \qquad (7.10)$$

Неравенство (7.10) влечет, что $f$ является локальным гомеоморфизмом и, следовательно, гомеоморфизмом в $\mathbb{C}$ (см., например, следствие из теоремы 17.2 в [111]). Применяя инверсию относительно единичной окружности, получаем, что $f$ – гомеоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$.

Покажем, что гомеоморфизм $f$ является регулярным в $\mathbb{C}$. Заметим, что из локально равномерной сходимости $f_n \to f$ последовательности $f_n$ следует, что $f_n^{-1} \to f^{-1}$ локально равномерно (см., например, лемму 3.1 в [220]). Таким образом, ввиду (7.9) по теореме 1 в [103], получаем, что $f^{-1} \in W^{1,2}_{\rm loc}(\mathbb{C})$. Условие $f^{-1} \in W^{1,2}_{\rm loc}(\mathbb{C})$ влечет $N^{-1}$-свойство $f$ (см., например, теорему III.6.1 в [239]) и, следовательно, $J_f(z) \neq 0$ почти всюду по теореме 1 в [71]. Наконец, $f \in W^{1,1}_{\rm loc}(\mathbb{C})$ согласно теореме 3.1 и замечанию 3.1 в [289], а также следствию 5 в [83]. $\Box$

Комбинируя лемму 7.1 и теорему 7.1, получаем следующее заключение.

**Следствие 7.1.** *В условиях теоремы 7.1, $f$ является $Q(z)$-к.к. отображением и*

$$\mu(z) \in \operatorname{inv} \operatorname{co} M(z) \tag{7.11}$$

*почти всюду, где $M(z)$ определено в (7.5).*

### 7.3. Теоремы нормальности

Следующие результаты следуют из леммы 6.2 и соответствующих теорем работы [86] (см. также в [252, гл. 7]).

**Лемма 7.2.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{C}$, $Q : D \to [1, \infty]$ – локально интегрируемая функция, и пусть $f : D \to D'$ – гомеоморфное $W^{1,1}_{\rm loc}$ решение уравнения Бельтрами (6.1) с $K_\mu(z) \leqslant Q(z)$ и $h(\overline{\mathbb{C}} \setminus f(D)) \geqslant \Delta > 0$. Если для некоторых $z_0 \in D$, $0 < \varepsilon_0 < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$ и $p < 2$,*

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} Q(z) \cdot \psi^2(|z - z_0|)\, dm(z) \leqslant c \cdot I^p(\varepsilon) \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\,, \tag{7.12}$$

*где $\psi(t) : (0, \infty) \to [0, \infty]$ – неотрицательная измеримая функция, $0 < I(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty\ \forall\ \varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0)$, то*

$$h(f(z), f(z_0)) \leqslant \frac{32}{\Delta} \exp\left\{-\left(\frac{2\pi}{c}\right) I^{2-p}(|z - z_0|)\right\}$$

*для всех $z \in B(z_0, \varepsilon_0)$.*

Если $\infty \in D$, то условие (7.12) в точке $\infty$ заменяем условием

$$\int\limits_{R_0<|z|<R} Q(z) \cdot \psi^2_\infty(|z|)\, \frac{dm(z)}{|z|^4} \leqslant c \cdot I^p_\infty(R) \quad \text{при } R \to \infty\,, \tag{7.13}$$

где $\psi_\infty(t)$ – неотрицательная измеримая функция на $(0, \infty)$, такая что $0 < I_\infty(R) = \int\limits_{R_0}^{R} \psi_\infty(t)\, dt < \infty$, $R \in (R_0, \infty)$.

**Следствие 7.2.** *При условиях леммы 7.2 для $p = 1$*

$$h(f(z), f(z_0)) \leqslant \frac{32}{\Delta}\ \exp\left\{-\frac{2\pi}{c}\, I(|z - z_0|)\right\}. \tag{7.14}$$

**Теорема 7.2.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{C}$ и пусть $f$ – гомеоморфное $W^{1,1}_{\rm loc}$ решение уравнения Бельтрами (6.1) с $K_\mu(z) \in L^1_{\rm loc}$, $z_0 \in D$ и $h(\overline{\mathbb{C}} \setminus f(D)) \geqslant \Delta > 0$. Тогда*

$$h(f(z), f(z_0)) \leqslant \frac{32}{\Delta}\ \exp\left\{-\int\limits_{|z-z_0|}^{\varepsilon(z_0)} \frac{dr}{rk_{z_0}(r)}\right\} \tag{7.15}$$

*для $z \in B(z_0, \varepsilon(z_0))$, где $\varepsilon(z_0) < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$ и $k_{z_0}(r)$ – среднее интегральное значение $K_\mu(z)$ по окружности $|z - z_0| = r$.*

**Следствие 7.3.** *Если*

$$k_{z_0}(r) \leqslant \log\frac{1}{r} \tag{7.16}$$

*для $r < \varepsilon(z_0) < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$, то*

$$h(f(z), f(z_0)) \leqslant \frac{32}{\Delta}\,\frac{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}{\log\frac{1}{|z-z_0|}} \tag{7.17}$$

*для всех $z \in B(z_0, \varepsilon(z_0))$.*

**Следствие 7.4.** *Если*

$$K_\mu(z) \leqslant \log\frac{1}{|z-z_0|}, \qquad z \in B(z_0, \varepsilon(z_0)), \tag{7.18}$$

*то (7.17) верно для всех $z \in B(z_0, \varepsilon(z_0))$.*

**Замечание 7.1.** Если вместо (7.16) и (7.18) мы имеем условия

$$k_{z_0}(r) \leqslant c \cdot \log\frac{1}{r} \tag{7.19}$$

и, соответственно,

$$K_\mu(z) \leqslant c \cdot \log\frac{1}{|z-z_0|}, \tag{7.20}$$

то

$$h(f(z), f(z_0)) \leqslant \frac{32}{\Delta}\ \left[\frac{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}{\log\frac{1}{|z-z_0|}}\right]^{1/c}. \tag{7.21}$$

Выбирая в лемме 7.2 $\psi(t) = 1/t$ и $p = 1$, получаем следующее заключение.

**Следствие 7.5.** *Пусть $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ – гомеоморфное $W^{1,1}_{\rm loc}$ решение уравнения Бельтрами (6.1) с $K_\mu(z) \in L^1_{\rm loc}$, такое что $f(0) = 0$ и*

$$\int\limits_{\varepsilon<|z|<1} K_\mu(z)\,\frac{dm(z)}{|z|^2} \leqslant c\log\frac{1}{\varepsilon}, \qquad \varepsilon \in (0,1). \tag{7.22}$$

*Тогда*

$$|f(z)| \leqslant 64\cdot|z|^{\frac{2\pi}{c}}. \tag{7.23}$$

**Теорема 7.3.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{C}$ и пусть $f : D \to D'$ – гомеоморфное $W^{1,1}_{\rm loc}$ решение уравнения Бельтрами (6.1) с $K_\mu(z) \in L^1_{\rm loc}$ и $h(\overline{\mathbb{C}}\backslash D') \geqslant \Delta > 0$. Если $K_\mu(z) \leqslant Q(z)$ п.в., где $Q$ имеет конечное среднее колебание в точке $z_0 \in D$, то*

$$h(f(z), f(z_0)) \leqslant \frac{32}{\Delta}\left\{\frac{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}{\log\frac{1}{|z-z_0|}}\right\}^{\beta_0} \tag{7.24}$$

*для некоторого $\varepsilon_0 < {\rm dist}(z_0, \partial D)$ и любой точки $z \in B(z_0, \varepsilon_0)$, где $\beta_0 > 0$ зависит только от функции $Q$.*

Согласно одной из версий теоремы Арцела-Асколи (см., напр., п. 20.4 в [320]), на основе полученных выше результатов, имеем соответствующие критерии нормальности для решений уравнений Бельтрами.

Пусть $D$ – область в $\mathbb{C}$, $Q : D \to [1,\infty]$ – измеримая функция. Обозначим через $\mathfrak{B}_{Q,\Delta}(D)$ класс всех гомеоморфных решений $f$ уравнения Бельтрами (6.1) класса $W^{1,1}_{\rm loc}$, таких что $K_\mu(z) \leqslant Q(z)$ п.в. в $D$ и $h(\overline{\mathbb{C}} \setminus f(D)) \geqslant \Delta > 0$.

**Лемма 7.3.** *Если $Q \in L^1_{\rm loc}$ удовлетворяет условию вида (7.12), то класс $\mathfrak{B}_{Q,\Delta}(D)$ образует нормальное семейство.*

Напомним, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ класса $L^1_{\rm loc}$ имеет **конечное среднее колебание в точке** $z_0 \in D$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \ \fint_{B(z_0,\varepsilon)} |\varphi(z) - \widetilde{\varphi}_\varepsilon(z_0)|\,dm(z) < \infty\,, \tag{7.25}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_\varepsilon(z_0) = \fint_{B(z_0,\varepsilon)} \varphi(z)\,dm(z) < \infty \tag{7.26}$$

– среднее значение функции $\varphi(z)$ по кругу $B(z_0,\varepsilon)$. Также говорят, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет **конечное среднее колебание в** $D$, сокр. $\varphi \in \mathrm{FMO}(D)$, если $\varphi$ имеет конечное среднее колебание в каждой точке $z_0 \in D$, см. [35].

Концепция конечного среднего колебания может быть распространена в бесконечность стандартным образом, см., например, статью [287] или монографию [188]. Именно, пусть даны область $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in D$, и функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$. Говорят, что $\varphi$ имеет **конечное среднее колебание в** $\infty$, если функция $\varphi^*(z) = \varphi\left(1/\overline{z}\right)$ имеет конечное среднее колебание в 0. Применяя обратную инверсию $z \to 1/\overline{z}$ относительно единичной окружности, после замен переменных, получаем следующее эквивалентное условие:

$$\int\limits_{|z|\geqslant R} |\varphi(z) - \widetilde{\varphi}_R|\,\frac{dm(z)}{|z|^4} = O\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad \text{при} \quad R \to \infty\,, \tag{7.27}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_R = \frac{R^2}{\pi}\int\limits_{|z|\geqslant R} \varphi(z)\,\frac{dm(z)}{|z|^4}\,.$$

В терминах сферической площади условие (7.27) может быть записано в следующем виде:

$$\overline{\lim_{r\to 0}}\,\frac{1}{S(B_r)}\int\limits_{B_r} |\varphi(z) - \varphi_r^*|\,dS(z) < \infty\,,$$

где $B_r$ – круг в сферической метрике с центром в $\infty$ радиуса $r$, $S(B_r)$ – его сферическая площадь и

$$\varphi_r^* = \frac{1}{S(B_r)}\int\limits_{B_r} \varphi(z)\,dS(z) < \infty$$

– среднее значение функции $\varphi$ по кругу $B_r$ по сферической мере.

По теореме 7.3 получаем.

**Теорема 7.4.** *Если $Q \in \mathrm{FMO}(D)$, то класс $\mathfrak{B}_{Q,\Delta}(D)$ образует нормальное семейство.*

Напомним, что точка $z_0 \in \mathbb{C}$ называется **точкой Лебега** функции $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$, если

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{|B(z_0,\varepsilon)|}\int\limits_{B(z_0,\varepsilon)} |\varphi(z) - \varphi(z_0)|\,dm(z) = 0\,. \tag{7.28}$$

Аналогично, $z_0 = \infty$ будем называть точкой Лебега функции $\varphi$, если 0 является точкой Лебега функции $\varphi^*(z) = \varphi(1/\overline{z})$, $\varphi^*(0) = \varphi(\infty)$, $\varphi^*(\infty) = \varphi(0)$, т.е.

$$\int\limits_{|z|\geqslant R} |\varphi(z) - \varphi(\infty)| \, \frac{dm(z)}{|z|^4} = O\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad \text{при } R \to \infty\,. \tag{7.29}$$

Другими словами, условие (7.29) эквивалентно условию, что $\varphi_r^* = \frac{1}{S(B_r)} \int\limits_{B_r} \varphi(z)\, dS(z) \to \varphi(\infty)$ при $r \to 0$ в среднем по сферической мере.

Как следствия предложения 1.3 и следствия 1.1 о достаточных условиях принадлежности функций классу FMO, из теоремы 7.4 получаем следующие два утверждения.

**Следствие 7.6.** *Класс $\mathfrak{B}_{Q,\Delta}(D)$ нормален, если каждая точка $z_0 \in D$ является точкой Лебега функции $Q(z)$.*

**Следствие 7.7.** *Класс $\mathfrak{B}_{Q,\Delta}(D)$ нормален, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, \frac{1}{|B(z_0,\varepsilon)|} \int\limits_{B(z_0,\varepsilon)} Q(z)\, dm(z) < \infty \qquad \forall\ z_0 \in D. \tag{7.30}$$

Здесь в случае $z_0 = \infty \in D$ вместо (7.30) должно быть условие

$$\int\limits_{|z|\geqslant R} Q(z) \frac{dm(z)}{|z|^4} = O\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad \text{при } R \to \infty\,. \tag{7.31}$$

Заметим также, что условие (7.31) эквивалентно условию

$$\overline{\lim_{r\to 0}} \frac{1}{S(B_r)} \int\limits_{B_r} Q(z)\, dS(z) < \infty\,. \tag{7.32}$$

**Теорема 7.5.** *Пусть $\Delta > 0$ и $Q : D \to [0,\infty]$ – локально интегрируемая функция, такая что*

$$\int\limits_0^{\varepsilon(z_0)} \frac{dr}{r q_{z_0}(r)} = \infty \qquad \forall\ z_0 \in D\,, \tag{7.33}$$

*где $\varepsilon(z_0) < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$ и $q_{z_0}(r)$ – среднее значение функции $Q(z)$ по окружности $|z - z_0| = r$. Тогда $\mathfrak{B}_{Q,\Delta}$ образует нормальное семейство.*

**Доказательство.** Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$. Для функции

$$\psi(t) = \begin{cases} (1/[tq_{z_0}(t)])\,, & t \in (0,\, \varepsilon_0)\,, \\ 0, & t \in (\varepsilon_0,\, \infty)\,, \end{cases}$$

имеем, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} Q(z)\cdot\psi^2(|z-z_0|)\,dm(z) = 2\pi\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{dr}{rq_{z_0}(r)}\,.$$

Таким образом, заключение теоремы следует из леммы 7.3 при условии (7.33). □

В теореме 7.5 в случае $\infty \in D$ вместо (7.33) должно быть условие

$$\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{dR}{Rq_{\infty}(R)} = \infty \tag{7.34}$$

для некоторого $\delta > 0$, где $q_{\infty}(R)$ – среднее значение функции $Q(z)$ по окружности $|z| = R$.

**Следствие 7.8.** *Если $q_{z_0}(r) = O\left(\log\frac{1}{r}\right)$ при $r \to 0$ в каждой точке $z_0 \in D$, то $\mathfrak{B}_{Q,\Delta}$ образует нормальное семейство.*

Здесь $q_{\infty}(R) = O\left(\log R\right)$ при $R \to \infty$.

**Теорема 7.6.** *Класс $\mathfrak{B}_{Q,\Delta}$ является равностепенно непрерывным и, следовательно, нормальным семейством отображений, если $Q$ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{D}\Phi\left(Q(z)\right)\,dS(z) \leqslant M \tag{7.35}$$

*для некоторого $M \in (0,\infty)$ и неубывающей выпуклой функции $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \to \overline{\mathbb{R}^+}$ с условием*

$$\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau\Phi^{-1}(\tau)} = \infty \tag{7.36}$$

*для некоторого $\sigma > \Phi(0)$.*

## 7.4. Теоремы компактности

Говорят, что семейство компактных множеств в $M(z) \subseteq \mathbb{D}$, $z \in \mathbb{C}$, **измеримо по параметру** $z$, если для любого замкнутого множества $M_0 \subseteq \mathbb{C}$ множество точек $E_0 = \{z \in \mathbb{C} : M(z) \subseteq M_0\}$ измеримо по Лебегу (см. [29]). В дальнейшем мы используем функции

$$Q_M(z) := \frac{1 + q_M(z)}{1 - q_M(z)}, \quad q_M(z) := \max_{\nu \in M(z)} |\nu| , \tag{7.37}$$

которые измеримы для измеримых семейств $M(z)$.

Из следствия 7.1 получаем следующее заключение.

**Следствие 7.9.** *Пусть $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, – семейство компактных инвариантно-выпуклых множеств в $\mathbb{D}$, измеримое по параметру, и $Q_M \in L^1_S$. Тогда класс $H^*_M$ замкнут относительно равномерной сходимости в $\overline{\mathbb{C}}$ по сферической метрике.*

Из результатов предыдущих двух параграфов получаем ряд теорем компактности для классов решений уравнения Бельтрами с ограничениями теоретико–множественного типа на комплексный коэффициент.

**Лемма 7.4.** *Пусть $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, – семейство компактных инвариантно-выпуклых множеств в $\mathbb{D}$, измеримое по параметру, такое что $Q_M \in L^1_S$ и удовлетворяет условиям вида (7.12) и (7.13). Тогда класс $H^*_M$ компактен.*

**Теорема 7.7.** *Пусть $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, – семейство компактных инвариантно-выпуклых множеств в $\mathbb{D}$, измеримое по параметру. Если $Q_M \in \mathrm{FMO}(\overline{\mathbb{C}})$, то $H^*_M$ компактен.*

**Следствие 7.10.** *Пусть $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, – семейство компактных инвариантно-выпуклых множеств в $\mathbb{D}$, измеримое по параметру. Если каждая точка $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ является точкой Лебега для функции $Q_M$, то класс $H^*_M$ компактен.*

**Следствие 7.11.** *Пусть $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, – семейство компактных инвариантно-выпуклых множеств в $\mathbb{D}$, измеримое по параметру. Если $Q_M$ удовлетворяет условиям (7.30) и (7.32), то класс $H^*_M$ компактен.*

**Теорема 7.8.** *Пусть $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, – семейство компактных инвариантно-выпуклых множеств в $\mathbb{D}$, измеримое по параметру. Предположим, что функция $Q_M \in L^1_S$ удовлетворяет условиям (7.33) и (7.34). Тогда класс $H^*_M$ компактен.*

**Следствие 7.12.** *Пусть* $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, *– семейство компактных инвариантно-выпуклых множеств в* $\mathbb{D}$, *измеримое по параметру. Если* $q_{z_0}(r) = O\left(\log \frac{1}{r}\right)$ *при* $r \to 0$ *в каждой точке* $z_0 \in \mathbb{C}$ *и* $q_\infty(R) = O\left(\log R\right)$ *при* $R \to \infty$, *то класс* $H_M^*$ *компактен.*

**Теорема 7.9.** *Пусть* $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, *– семейство компактных инвариантно-выпуклых множеств в* $\mathbb{D}$, *измеримое по параметру, и пусть*

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \Phi\left(Q_M(z)\right)\, dS(z) < \infty\,, \tag{7.38}$$

*где* $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *– неубывающая выпуклая функция, удовлетворяющая условию (7.36). Тогда класс* $H_M^*$ *компактен.*

В заключение отметим, что одним из важных приложений теорем компактности является теория вариационного метода. Дело в том, что в компактных классах всегда гарантируется существование экстремальных отображений для любых непрерывных, в том числе нелинейных, функционалов. Кроме того, как правило, в компактных классах удается показать выпуклость множества комплексных характеристик, что значительно упрощает построение вариаций. В этой связи в работах [28, 61, 242] были построены вариации для классов $H_M^*$ и $\mathfrak{F}_\Phi^{\mathcal{M}}$, и на этой основе получены вариационные принципы максимума и другие необходимые условия экстремума в указанных классах для дифференцируемых по Гато функционалов общего вида.

# Часть III. К теории отображений классов Орлича–Соболева в пространстве

Как было показано в части II, на плоскости любой гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ является как кольцевым, так и нижним $Q$-гомеоморфизмом с $Q$, равным дилатации отображения. В пространствах $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, аналогичные результаты устанавливаются для классов Орлича-Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условиями типа Кальдерона на функцию $\varphi$ и, в частности, для классов Соболева $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$. Это позволяет и здесь применить теорию кольцевых и нижних $Q$-гомеоморфизмов.

## Глава 8. К общей теории классов Орлича–Соболева

### 8.1. Введение

Прежде всего, напомним некоторые определения, связанные с пространствами Соболева $W^{1,p}$, $p \in [1,\infty)$. Пусть $U$ – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Символом $C_0^\infty(U)$ будем обозначать совокупность всех функций $\varphi : U \to \mathbb{R}$ с компактным носителем, имеющих непрерывные частные производные произвольного порядка. Пусть $u$ и $v : U \to \mathbb{R}$ – локально интегрируемые функции. Полагаем $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Функция $v$ называется **обобщенной производной** функции $u$ по переменной $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, пишем $u_{x_i}$, если

$$\int\limits_U u\,\varphi_{x_i}\,dm(x) = -\int\limits_U v\,\varphi\,dm(x) \quad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(U)\,. \tag{8.1}$$

Здесь $m$ обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$. **Класс Соболева** $W^{1,p}(U)$ определяется как семейство всех функций $u : U \to \mathbb{R}$ в $L^p(U)$, имеющих все обобщённые производные первого порядка, принадлежащие классу $L^p(U)$. Говорят, что функция $u : U \to \mathbb{R}$ принадлежит пространству $W^{1,p}_{\rm loc}(U)$, если $u \in W^{1,p}(U_*)$ для любого открытого множества $U_*$ с компактным замыканием в $U$. В дальнейшем мы используем обозначение $W^{1,p}_{\rm loc}$ вместо $W^{1,p}_{\rm loc}(U)$, если недоразумение невозможно. Аналогичное определение может быть приведено для вектор-функции $f : U \to \mathbb{R}^m$, где принадлежность отображения классу Соболева определяется принадлежностью этому классу всех координатных функций отображения.

Понятие обобщенной производной было введено Соболевым в $\mathbb{R}^n$ (см., напр., [98]) и теперь развивается в более общих пространствах (см., напр., [18, 79, 117, 193, 197, 200, 201, 247, 252, 315]). Напомним также, что непрерывная функция $f$ принадлежит $W^{1,p}_{\rm loc}$ тогда и только тогда, когда $f \in {\rm ACL}^p$, т.е., если $f$ – локально абсолютно непрерывна на п.в. прямых, параллельных координатным осям и если все первые частные производные $f$ являются локально интегрируемыми в степени $p$ в области задания, см., напр., 1.1.3 в [257].

В работах академика Ю.Г. Решетняка и его учеников, С.К. Водопьянова, В.М. Гольдштейна и других, в своё время была развита теория отображений с ограниченным искажением, которая уже давно стала классикой теории отображений, см., напр., монографии [16, 24, 77], а также сравнительно недавнюю статью [14]. Напомним, что непрерывное отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$ открытого множества $U$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, называется **отображением с ограниченным искажением**, если $f \in W^{1,n}_{\rm loc}$, его якобиан $J_f(x) = \det f'(x)$ не меняет знак в $U$, и

$$\|f'(x)\|^n \leqslant K\,|J_f(x)| \qquad \text{п.в.} \tag{8.2}$$

для некоторого числа $K \in [1, \infty)$, где $f'(x)$ якобиева матрица $f$, $\|f'(x)\|$ – её матричная норма: $\|f'(x)\| = \sup |f'(x) \cdot h|$, а супремум берётся над всеми вектор-столбцами $h$ в $\mathbb{R}^n$ единичной длины. В иностранной литературе такие отображения принято называть квазирегулярными (см., напр., [199, 248, 277]).

Сейчас развивается теория отображений с конечным искажением. Гомеоморфизм $f$ открытого множества $U$ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, называется **отображением с конечным искажением**, если $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$ и

$$\|f'(x)\|^n \leqslant K(x) \cdot J_f(x) \qquad \text{п.в.} \tag{8.3}$$

для некоторой конечной функции $K(x) \geq 1$, где $\|f'(x)\|$ - операторная норма матрицы Якоби $f'$ отображения $f$ в $x$: $||f'(x)|| = \sup\limits_{h\in\mathbb{R}^n, |h|=1} |f'(x)\cdot h|$, и $J_f(x)$ – его якобиан, т.е. $\det f'(x)$. **Внешняя дилатация** отображения

$f$ в точке $x$ определяется равенством

$$K_f(x) = \frac{\|f'(x)\|^n}{|J_f(x)|}\,, \tag{8.4}$$

если $J_f(x) \neq 0$, $K_f(x) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_f(x) = \infty$ в остальных точках, включая точки без первых частных производных. Далее мы также используем дилатацию

$$P_f\,(x) = K_f^{\frac{1}{n-1}}(x)\ . \tag{8.5}$$

Напомним, что впервые понятие отображения с конечным искажением введено в случае плоскости для $f \in W^{1,2}_{\rm loc}$ в работе [212]. Впоследствии это условие было заменено требованием $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$, предполагавшим однако дополнительно, что $J_f \in L^1_{\rm loc}$, см., напр., монографию [210], а также дальнейшие ссылки в монографии [252]. Заметим, что условие $J_f \in L^1_{\rm loc}$ излишне в случае гомеоморфизмов. Действительно, для каждого гомеоморфизма $f$ между областями $D$ и $D'$ в $\mathbb{R}^n$, имеющего п.в. частные производные в $D$, существует множество $E$ лебеговой меры ноль, такое что $f$ обладает $(N)$-свойством Лузина в $D \setminus E$ и

$$\int\limits_A J_f(x)\, dm(x) = |f(A)| \tag{8.6}$$

для каждого измеримого по Лебегу множества $A \subset D \setminus E$ (см., напр., пункты 3.1.4, 3.1.8 и 3.2.5 в [108]).

На основе (8.6) устанавливается следующее полезное утверждение.

**Предложение 8.1.** *Пусть $f$ – ACL гомеоморфное отображение области $D$ из $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$(i) \quad f \in W^{1,1}_{\rm loc}\,, \quad \textit{если} \quad P_f \in L^1_{\rm loc}\ ,$$

$$(ii) \quad f \in W^{1,\frac{n}{2}}_{\rm loc}\,, \quad \textit{если} \quad K_f \in L^1_{\rm loc}\ ,$$

$$(iii) \quad f \in W^{1,n-1}_{\rm loc}\,, \quad \textit{если} \quad K_f \in L^{n-1}_{\rm loc}\ ,$$

$$(iv) \quad f \in W^{1,p}_{\rm loc},\ p > n-1\,, \quad \textit{если} \quad K_f \in L^{\gamma}_{\rm loc},\ \gamma > n-1\ ,$$

$$(v) \quad f \in W^{1,p}_{\rm loc},\ p = n\gamma/(1+\gamma) \geqslant 1\,, \quad \textit{если} \quad K_f \in L^{\gamma}_{\rm loc},\ \gamma \geqslant 1/(n-1)\,.$$

*Эти заключения и оценки (8.7) имеют место также для всех ACL отображений $f : D \to \mathbb{R}^n$ с $J_f \in L^1_{\rm loc}$.*

**Доказательство.** Действительно, по неравенству Гельдера на компактном множестве $C$ в $D$ и на основе (8.6), получаем следующие оценки для норм первых частных производных:

$$\|\partial_i f\|_p \leqslant \|f'\|_p \leqslant \|K_f^{1/n}\|_s \cdot \|J_f^{1/n}\|_n \leqslant \|K_f\|_\gamma^{1/n} \cdot |f(C)|^{1/n} < \infty\,, \qquad (8.7)$$

если $K_f \in L^\gamma_{\rm loc}$ для некоторого $\gamma \in (0,\infty)$, поскольку $\|f'(x)\| = K_f^{1/n}(x)\times$ $\times J_f^{1/n}(x)$ п.в., где $\frac{1}{p} = \frac{1}{s} + \frac{1}{n}$ и $s = \gamma n$, т.е. $\frac{1}{p} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)$. □

Иногда мы будем использовать оценку (8.7) для получения необходимых нам утверждений без каких-либо комментариев.

В дальнейшем, $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $m$ – мера Лебега $\mathbb{R}^n$. Следуя Орличу, см., напр., [265] и [266], для заданной выпуклой возрастающей функции $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\varphi(0) = 0$, обозначим символом $L_\varphi$ пространство всех функций $f : D \to \mathbb{R}$, таких что

$$\int\limits_D \varphi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\, dm(x) < \infty \qquad (8.8)$$

при некотором $\lambda > 0$, см. также монографию [42]. Пространство $L_\varphi$ называется **пространством Орлича**. Другими словами, $L_\varphi$ есть конус над классом всех функций $g : D \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\int\limits_D \varphi\left(|g(x)|\right)\, dm(x) < \infty, \qquad (8.9)$$

см. [133], который называется **классом Орлича**.

**Классом Орлича–Соболева** $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(D)$ называется класс всех локально интегрируемых функций $f$, заданных в $D$, с первыми обобщенными производными, градиент $\nabla f$ которых локально в области $D$ принадлежит классу Орлича. Заметим, что по определению $W^{1,\varphi}_{\rm loc} \subset W^{1,1}_{\rm loc}$. Далее, если $f$ – локально интегрируемая вектор-функция $n$ вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $f_i \in W^{1,1}_{\rm loc}$, $i = 1, \ldots, m$, и

$$\int\limits_D \varphi\left(|\nabla f(x)|\right)\, dm(x) < \infty, \qquad (8.10)$$

где $|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^m \sum\limits_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$, то также пишем $f \in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$. Используем также обозначение $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в случае более общих функций $\varphi$, чем в классах

Орлича, всегда предполагавших выпуклость функции $\varphi$. Отметим, что классы Орлича–Соболева сейчас, как и ранее, изучаются в самых разных аспектах многими авторами, см., напр., [6, 116, 145, 149, 161, 183, 205, 208, 217, 219, 223, 233, 235, 236, 264, 313] и [322].

## 8.2. Предварительные сведения

В данной главе $H^k$, $k \geqslant 0$, обозначает **$k$-мерную меру Хаусдорфа** в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Именно, если $A$ – множество в $\mathbb{R}^n$, то

$$H^k(A) \quad = \quad \sup_{\varepsilon>0} H^k_\varepsilon(A), \tag{8.11}$$

$$H^k_\varepsilon(A) \quad = \quad \inf \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_i)^k\,, \tag{8.12}$$

где инфимум в (8.12) берётся по всем покрытиям $A$ множествами $A_i$ с $\operatorname{diam} A_i < \varepsilon$, см., напр., [206] и [256]. Известно, что внешняя мера Лебега $m(A)$ для произвольного множества $A$ в $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет соотношению $m(A) = \Omega_n \cdot 2^{-n} H^n(A)$, где $\Omega_n$ – объём единичного шара в $\mathbb{R}^n$, см. [299]. Напомним, что $H^k$ является **внешней мерой в смысле Каратеодори**, т.е.,

(1) $H^k(X) \leqslant H^k(Y)$ при $X \subset Y$,

(2) $H^k\left(\bigcup\limits_i X_i\right) \leqslant \sum\limits_i H^k(X_i)$ для каждой последовательности множеств $X_i$,

(3) $H^k(X \cup Y) = H^k(X) + H^k(Y)$ при $\operatorname{dist}(X, Y) > 0$.

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется **измеримым** относительно меры $H^k$, если для каждого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ выполнено условие $H^k(X) = H^k(X \cap E) + H^k(X \setminus E)$. Хорошо известно, что произвольное борелевское множество является измеримым относительно любой внешней меры в смысле Каратеодори; см., напр., теорему II (7.4) в [88]. Кроме того, $H^k$ является регулярной по Борелю, т.е., для каждого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ существует борелевское множество $B \subset \mathbb{R}^n$, такое что $X \subset B$ и $H^k(X) = H^k(B)$; см., напр., теорему II (8.1) в [88] и разд. 2.10.1 в [108]. Последнее влечет, что для каждого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ с $H^k(X) < \infty$ существуют борелевские множества $B_*$ и $B^* \subset \mathbb{R}^n$ такие, что $B_* \subset E \subset B^*$ и $H^k(B^* \setminus B_*) = 0$, см., напр., разд. 2.2.3 в [108]. В частности, $H^k(B^*) = H^k(E) = H^k(B_*)$.

Если $H^{k_1}(A) < \infty$, то $H^{k_2}(A) = 0$ для любого $k_2 > k_1$ (см., напр., разд. 1.B гл. VII в [206]). Величина

$$\dim_H A = \sup_{H^k(A)>0} k$$

называется **хаусдорфовой размерностью** множества $A$. В работе [178] было показано, что для любых $p$ и $q \in (0,n)$ найдется множество $A$ такое, что $\dim_H A = p$, которое может быть отображено при помощи квазиконформного отображения $f$ пространства $\mathbb{R}^n$ на множество $B$ с $\dim_H B = q$, см. также [129] и [134].

Напомним, что $k$**-мерным направлением** $\Gamma$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется класс эквивалентности всех $k$-мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$, которые могут быть получены одна из другой при помощи параллельного переноса. Каждая $(n-k)$-мерная плоскость $\mathcal{T}$, ортогональная $k$-мерной плоскости $\mathcal{P}$ пересекает $\mathcal{P}$ в единственной точке $X(\mathcal{P})$. Пусть $E$ – подмножество $\Gamma$. Тогда $X(E)$ будет обозначать множество всех точек $X(\mathcal{P})$, $\mathcal{P} \in E$. Ясно, что $(n-k)$-мерная мера множества $X(E)$ не зависит от выбора плоскости $\mathcal{T}$; обозначим ее символом $\mu_{n-k}(E)$. В дальнейшем будем говорить, что некоторое свойство имеет место для почти каждой плоскости $\Gamma$, если множество $E$, состоящее из всех плоскостей $\mathcal{P}$, для которых это свойство нарушается, таково, что $\mu_{n-k}(E) = 0$.

Следующее замечательное свойство функций $f$ класса Соболева $W^{1,p}_{\rm loc}$ доказано в монографии [24], см. теорему 5.5 разд. 5.5 гл. II, и может быть распространено на классы Орлича–Соболева. Ниже приведенное утверждение непосредственно следует из теоремы Фубини и известного критерия принадлежности функций классу Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ в терминах пространства ACL (функций, абсолютно непрерывных на линиях), см., напр., разд. 1.1.3 в [257], а также комментарии во введении.

**Предложение 8.2.** *Пусть $U$ – открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f : U \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, – отображение класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(U)$, где $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ – возрастающая функция. Тогда, для почти всех гиперплоскостей $\mathcal{P}$, параллельных фиксированной координатной гиперплоскости $\mathcal{P}_0$, сужение отображения $f$ на множество $\mathcal{P} \cap U$ является отображением класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\mathcal{P} \cap U)$.*

**Доказательство.** Прежде всего по теореме 5.5 раздела 5.5, главы II в [24] $f|_{\mathcal{P}} \in W^{1,1}_{\rm loc}$ на почти всех гиперплоскостях $\mathcal{P}$, параллельных фиксированной координатной гиперплоскости $\mathcal{P}_0$.

Таким образом, остаётся показать, что для почти всех гиперплоскостей $\mathcal{P}$, параллельных фиксированной координатной гиперплоскости $\mathcal{P}_0$, и произвольного компакта $K \subset \mathcal{P} \cap U$ выполнено условие

$$\int\limits_K \varphi\left(|\nabla g(z)|\right)\, dm_{n-1}(z) < \infty,$$

где $g := f|_{\mathcal{P}\cap U}$. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что гиперплоскость $\mathcal{P}_0$ образована $n-1$ векторами $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1, 0)$ (доказательство для остальных гиперплоскостей проводится аналогично).

Пусть $C$ – произвольный сегмент, такой что $\overline{C} \subset U$, $C = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1 < x_1 < b_1, \ldots, a_n < x_n < b_n\}$. Тогда по теореме Фубини (см., напр., теорему 8.1 гл. III в [88]) получаем, что

$$\infty > \int\limits_C \varphi(|\nabla f(x)|) dm(x) \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_C \varphi\left(\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x)\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}}(x)\right)^2}\right) dm(x) =$$

$$= \int\limits_{a_n}^{b_n} \left(\int\limits_{\mathcal{P}_t \cap C} \varphi(|\nabla g_t(z)|)\, dm_{n-1}(z)\right) dt\,,$$

где $g_t(z) := f(z, t)$, $z = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ и $\mathcal{P}_t$ обозначает гиперплоскость перпендикулярную $n$-ой оси с $x_n = t$. Отсюда следует, что для почти всех $t \in [a_n, b_n]$

$$\int\limits_{\mathcal{P}_t \cap C} \varphi(|\nabla g_t(z)|)\, dm_{n-1}(z) < \infty\,. \tag{8.13}$$

Покроем $U$ при помощи всех сегментов $C_m$, $m = 1, 2, \ldots$, $C_m = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1^{(m)} < x_1 < b_1^{(m)}, \ldots, a_n^{(m)} < x_1 < b_n^{(m)}\}$, с рациональными $a_k^{(m)}$ и $b_k^{(m)}$, такими что $\overline{C_m} \subset U$. Пусть $G_m$ состоит из таких чисел $t \in (a_n^{(m)}, b_n^{(m)})$, для которых $\varphi(|\nabla g_t(z)|) \notin L^1(\mathcal{P}_t \cap C_m)\}$. Для произвольного $t \in \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} G_m$ выберем гиперплоскость $\mathcal{P}_t$ и произвольный компакт $K \subset \mathcal{P} \cap U$. Заметим, что по доказанному выше $m_1\left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} G_m\right) = 0$ и что для компакта $K$ найдутся номера $s_1, \ldots s_k \in \mathbb{N}$ такие, что $K \subset \bigcup\limits_{l=1}^{k} C_{s_l}$. По построению получаем, что

$$\int\limits_{\mathcal{P}_t\cap K}\varphi(|\nabla g_t(z)|)dm_{n-1}(z)\leqslant\sum\limits_{l=1}^{k}\int\limits_{\mathcal{P}_t\cap C_{s_l}}\varphi(|\nabla g_t(z)|)dm_{n-1}(z)<\infty\,.$$

Таким образом, получаем $\int\limits_K\varphi\left(|\nabla g_t(z)|\right)\,dm_{n-1}(z)\,<\,\infty$ для почти всех гиперплоскостей $\mathcal{P}_t$, параллельных гиперплоскости $\mathcal{P}_0$ и произвольного компакта $K\subset\mathcal{P}_t\cap U$, что и требовалось доказать. □

Заметим, что здесь класс $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ корректно определен для почти всех $k$-мерных плоскостей, поскольку частные производные являются борелевскими функциями; кроме того, классы Соболева являются инвариантными относительно преобразований квазиизометрии независимой переменной и, в частности, относительно вращений систем координат, см., напр., разд. 1.1.7 в [257].

Приведем также известную теорему Вяйсяля-Фаделя, см. [163] и [319], которая позволяет распространить хорошо известные теоремы Меньшова-Геринга-Лехто на плоскости, а также теорему Вяйсяля в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, см., напр., [176], [259] и [316], о дифференцируемости почти всюду открытых отображений класса Соболева, на открытые отображения классов Орлича–Соболева в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$. Напомним, что отображение $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ называется **открытым**, если образ любого открытого множества в $\Omega$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.

**Предложение 8.3.** *Пусть $\Omega$ – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, и $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ – непрерывное открытое отображение. Если $f$ имеет почти всюду полный дифференциал на $\Omega$ на почти всех гиперплоскостях параллельных координатным относительно $n-1$ переменных, то $f$ имеет полный дифференциал почти всюду в $\Omega$ относительно всех $n$ переменных.*

Наконец, приведем следующий фундаментальный результат Кальдерона (см. [145], с. 208).

**Предложение 8.4.** *Пусть $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ – возрастающая функция, такая что $\varphi(0)=0$ и для некоторого натурального $k\geqslant 2$*

$$A:=\int\limits_0^{\infty}\left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{k-1}}dt<\infty. \tag{8.14}$$

*Предположим, что* $f : D \to \mathbb{R}$ – *непрерывная функция, заданная в области* $D \subset \mathbb{R}^k$ *класса* $W^{1,\varphi}(D)$. *Тогда для любого куба* $C \subset D$, *рёбра которого ориентированы вдоль координатных осей, выполняется условие*

$$\operatorname{diam} f(C) \leqslant \alpha_k A^{\frac{k-1}{k}} \left[ \int\limits_C \varphi\left(|\nabla f|\right)\, dm(x) \right]^{\frac{1}{k}}, \tag{8.15}$$

*где* $\alpha_k$ – *некоторая постоянная, зависящая только от* $k$.

Заметим, что лемма 3.2 в [217] фактически является переформулировкой этого результата Кальдерона без какой-либо ссылки на его работу. По–видимому, прошло достаточно много времени, чтобы работа [145], будучи опубликованной в малодоступном журнале, оказалась забытой.

**Замечание 8.1.** Здесь не существенно, что $\varphi$ – (строго!) возрастающая. Действительно, пусть $\varphi$ – только неубывающая. Переходя в случае необходимости к новой функции

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon(t) := \varphi(t) + \sum_i \varphi_i^{(\varepsilon)}(t),$$

где

$$\varphi_i^{(\varepsilon)}(t) := \varepsilon\, \frac{2^{-i}}{(b_i - a_i)} \int\limits_0^t \chi_i(t)\, dt,$$

$\chi_i$ – характеристические функции интервалов $(a_i, b_i)$ постоянства функции $\varphi$, мы видим, что $\varphi(t) \leqslant \tilde{\varphi}_\varepsilon(t) \leqslant \varphi(t) + \varepsilon$ и, таким образом, условие (8.10) на $C$ и условие (8.14) выполнены для (строго!) возрастающей функции $\tilde{\varphi}_\varepsilon$. Устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем оценку (8.15).

Функция $(t/\varphi(t))^{1/(k-1)}$ может иметь в нуле неинтегрируемую особенность. Однако, ясно, что поведение функции $\varphi$ вблизи нуля не существенно для оценки (8.15). Действительно, мы можем применить оценку (8.15) с заменами $A \mapsto A_*$ и $\varphi \mapsto \varphi_*$, где

$$A_* := \left[\frac{1}{\varphi(t_*)}\right]^{\frac{1}{k-1}} + \int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{k-1}} dt < \infty, \tag{8.16}$$

$\varphi_*(0) = 0$, $\varphi_*(t) \equiv \varphi(t_*)$ при $t \in (0, t_*)$ и $\varphi_*(t) = \varphi(t)$ при $t \geqslant t_*$, если $\varphi(t_*) > 0$. Поэтому, в частности, нормировка $\varphi(0) = 0$ в предложении 8.4, очевидно, также не имеет никакого значения.

## 8.3. Дифференцируемость открытых отображений

Начнем со следующего результата, восходящего к Кальдерону, см. [145], сравни также с работой [307]. В отличие от [145], это утверждение будет доказано здесь на основе предложения 8.4 из теоремы Степанова, см. [308], см. также [243].

**Лемма 8.1.** *Пусть $\Omega$ – открытое множество в $\mathbb{R}^k$, $k \geqslant 2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\Omega)$, где $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ – неубывающая функция, такая что при некотором $t_* \in (0,\infty)$*

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{k-1}} dt < \infty\ . \tag{8.17}$$

*Тогда $f$ имеет полный дифференциал почти всюду в $\Omega$.*

**Доказательство.** Для заданного $x \in \Omega$, полагаем

$$L(x,f) = \limsup_{y\to x} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}.$$

По теореме Степанова доказательство сводится к установлению неравенства $L(x,f) < \infty$ почти всюду в $\Omega$.

Обозначим через $C(x,r)$ ориентированный куб с центром в точке $x$, такой, что шар $B(x,r)$ вписан в $C(x,r)$, где $r = |x-y|$. Тогда

$$L(x,f) = \limsup_{y\to x} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{r\to 0} \frac{\mathrm{diam}\ (f\,(B(x,r)))}{r} \leqslant \limsup_{r\to 0} \frac{\mathrm{diam}\ (f\,(C(x,r)))}{r}.$$

В силу предложения 8.4 и замечания 8.1, а также по теореме Лебега о дифференцируемости неопределенного интеграла, см. теорему IV(6.3) в [88],

$$L(x,f) \leqslant \gamma_{k,m}\, A_*^{\frac{k-1}{k}} \limsup_{r\to 0} \left[\frac{1}{r^k} \int\limits_{C(x,r)} \varphi_*\left(|\nabla f|\right)\, dm(x)\right]^{\frac{1}{k}} < \infty$$

для почти всех $x \in \Omega$, где $A_*$ и $\varphi_*$ определены в замечании 8.1. □

Комбинируя лемму 8.1 и предложение 8.2, получаем следующее утверждение.

**Следствие 8.1.** *Пусть $\Omega$ – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\Omega)$, где $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ – неубывающая функция, такая что при некотором $t_* \in (0,\infty)$*

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty \ . \tag{8.18}$$

*Тогда на почти каждой гиперплоскости $\mathcal{P}$, параллельной произвольной фиксированной гиперплоскости $\mathcal{P}_0$, отображение $f|_{\mathcal{P}}$ имеет почти всюду полный дифференциал.*

Комбинируя следствие 8.1 с результатом Вяйсяля-Фаделя, см. предложение 8.3 выше, мы получаем основной результат настоящей главы.

**Теорема 8.1.** *Пусть $\Omega$ – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – непрерывное открытое отображение класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\Omega)$, где $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ – неубывающая функция, удовлетворяющая условию (8.18). Тогда отображение $f$ имеет почти всюду полный дифференциал в $\Omega$.*

**Замечание 8.2.** В частности, заключение теоремы 8.1 имеет место, если $f \in W^{1,p}_{\rm loc}$ при некотором $p > n-1$. Последнее утверждение – результат Вяйсяля, см. лемму 3 в [319]. Теорема 8.1 является также распространением в пространство хорошо известной теоремы Меньшова–Геринга–Лехто на плоскости, см., напр., [176, 259] и [239].

Соответствующие результаты для слабо монотонных отображений $f$ с производными в классах Лоренца $L^{n-1,1}$ могут быть найдены в работе [264]. В работе [217] было показано, что функции в $\mathbb{R}^n$ с обобщенными производными из класса Лоренца $L^{k,1}$ как раз можно описать как функции классов Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ при условии Кальдерона (8.17) для $\varphi$. Таким образом, для открытых отображений результат работы [264] следует из результата Кальдерона о дифференцируемости.

В работе [145] Кальдероном показана точность условия (8.17) для наличия свойства дифференцируемости п.в. у непрерывных отображений $f \in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в случае выпуклых $\varphi$. Однако, теорема 8.1 показывает, что, в этом случае, мы можем использовать более слабое условие (8.18) для получения дифференцируемости почти всюду непрерывных **открытых** отображений $f$.

Условие (8.18) является не только достаточным, но и необходимым для дифференцируемости п.в. непрерывных открытых отображений $f \in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ из $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Более того, если функция $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ является неубывающей, выпуклой и такой, что

$$\int\limits_1^\infty \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt = \infty, \tag{8.19}$$

то существует гомеоморфизм $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, в классе $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, не являющийся дифференцируемым почти всюду. Действительно, если $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ – функция из конструкции Кальдерона при $k = n-1$, и $\varphi_n(t) = \varphi(t+n)$, то

$$\int\limits_1^\infty \left[\frac{t}{\varphi_n(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt = \infty \tag{8.20}$$

и $g(x,y) = (x, y + f(x))$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y \in \mathbb{R}$, есть искомый пример в силу условия $|\nabla g| \leqslant n + |\nabla f|$ и ввиду монотонности функции $\varphi$. Следовательно, требование (8.18) уже не может быть ослаблено даже для гомеоморфизмов.

## 8.4. Условие Лузина и свойство Сарда на поверхностях

**Теорема 8.2.** *Пусть $\Omega$ – открытое множество в $\mathbb{R}^k$, $k \geqslant 2$, и пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, – непрерывное отображение класса $W^{1,\varphi}(\Omega)$, где $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ – неубывающая функция, такая что при некотором $t_* \in (0,\infty)$*

$$A := \int\limits_{t_*}^\infty \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{k-1}} dt < \infty\ . \tag{8.21}$$

*Тогда для каждого измеримого множества $E \subset \Omega$ выполняется условие*

$$H^k(f(E)) \leqslant \gamma_{k,m}\, A_*^{k-1} \int\limits_E \varphi_*\left(|\nabla f|\right)\, dm(x)\ , \tag{8.22}$$

*где $\gamma_{k,m} = (m\alpha_k)^k$, $\alpha_k$ – постоянная из (8.15), зависящая только от $k$, $A_* = A + 1/[\varphi(t_*)]^{1/(k-1)}$, $\varphi_*(0) = 0$, $\varphi_*(t) \equiv \varphi(t_*)$ при $t \in (0, t_*)$ и $\varphi_*(t) = \varphi(t)$ при $t \geqslant t_*$.*

Доказательство теоремы 8.2 основано на следующей лемме.

**Лемма 8.2.** *Пусть $\Omega$ – открытое множество в $\mathbb{R}^k$, $k \geqslant 2$, и пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, – непрерывное отображение класса $W^{1,\varphi}(\Omega)$, где $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ – неубывающая функция с условием (8.21). Тогда для каждого куба $C \subset \Omega$ с рёбрами, параллельными координатным осям,*

$$\operatorname{diam} f(C) \leqslant m\alpha_k\, A_*^{\frac{k-1}{k}} \left[ \int\limits_C \varphi_*\left(|\nabla f|\right)\, dm(x) \right]^{\frac{1}{k}}, \qquad (8.23)$$

*где $\alpha_k$ – постоянная из (8.15), зависящая только от $k$, а величины $A_*$ и $\varphi_*$ определены в теореме 8.2.*

**Доказательство.** Покажем справедливость (8.23) индукцией по $m = 1, 2, \ldots$. Действительно, при $m = 1$ соотношение (8.23) имеет место ввиду предложения 8.4 и замечания 8.1. Предположим, что (8.23) справедливо при некотором $m = l$ и докажем это при $m = l + 1$. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_l, v_{l+1})$ в $\mathbb{R}^{l+1}$, а также вектора $\vec{V_1} = (v_1, v_2, \ldots, v_l, 0)$ и $\vec{V_2} = (0, 0, \ldots, 0, v_{l+1})$. По неравенству треугольника $|\vec{V}| = |\vec{V_1} + \vec{V_2}| \leqslant |\vec{V_1}| + |\vec{V_2}|$. Таким образом, обозначая через $\mathrm{Pr}_1\, \vec{V} = \vec{V_1}$ и $\mathrm{Pr}_2\, \vec{V} = \vec{V_2}$ проекции векторов из $\mathbb{R}^{l+1}$ на координатную гиперплоскость $y_{l+1} = 0$ и на $(l+1)$-ю координатную ось в $\mathbb{R}^{l+1}$, соответственно, мы получаем, что $\operatorname{diam} f(C) \leqslant \operatorname{diam} \mathrm{Pr}_1 f(C) + \operatorname{diam} \mathrm{Pr}_2 f(C)$, и, применяя (8.23) при $m = l$ и $m = 1$, мы приходим к неравенству (8.23) при $m = l + 1$ ввиду монотонности функции $\varphi$. Доказательство леммы 8.2 завершено. $\Box$

**Доказательство теоремы 8.2.** Ввиду счетной аддитивности интеграла и меры, не ограничивая общности рассуждений, мы можем считать, что множество $E$ ограничено и что $\overline{E} \subset \Omega$, т.е., что $\overline{E}$ – компакт в $\Omega$. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $\omega \subset \Omega$ такое, что $E \subset \omega$ и $|\omega \setminus E| < \varepsilon$, см. теорему III (6.6) в [88]. Учитывая замечание, сделанное выше, мы можем считать, что $\overline{\omega}$ компакт и, следовательно, отображение $f$ равномерно непрерывно в $\omega$. Следовательно, $\omega$ может быть покрыто счетными набором замкнутых ориентированных кубов $C_i$, лежащих в $\omega$, внутренности которых попарно не пересекаются, и таких, что $\operatorname{diam} f(C_i) < \delta$ для каждого предписанного заранее $\delta > 0$ и $\left|\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \partial C_i\right| = 0$. Тогда в силу леммы 8.2 получаем, что

$$H^k_\delta(f(E)) \leqslant H^k_\delta(f(\omega)) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left[\operatorname{diam} f(C_i)\right]^k \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_{k,m} A_*^{k-1} \int\limits_{\omega} \varphi_* \left(|\nabla f|\right)\, dm(x).$$

Наконец, ввиду абсолютной непрерывности неопределенного интеграла, произвольности $\varepsilon$ и $\delta > 0$ приходим к (8.22). □

**Следствие 8.2.** *При условиях теоремы 8.2, отображение $f$ обладает $N$-свойством Лузина, более того, $f$ является абсолютно непрерывным относительно $k$-мерной хаусдорфовой меры.*

**Замечание 8.3.** Заметим, что $H^k(\mathbb{R}^m) = 0$ при $m < k$, следовательно, соотношение (8.22) в этом случае, очевидно, выполнено даже и без требования (8.21). Однако, (8.21) является необходимым при $m \geqslant k$. Хорошо известно, что каждый гомеоморфизм пространства $\mathbb{R}^k$ на себя, принадлежащий классу $W^{1,k}_{\rm loc}$, обладает $N$-свойством, см. лемму III.6.1 в [239] при $k = 2$ и [76] при $k > 2$. Аналогичное заключение справедливо также и для непрерывных открытых отображений, см. [244]. С другой стороны, существуют примеры гомеоморфизмов класса $W^{1,p}_{\rm loc}$ при всех $p < k$, не обладающих $N$-свойством, см. [70]. Кроме того, Кезари в работе [148] было показано, что непрерывные плоские отображения $f : D \to \mathbb{R}^2$ класса $\mathrm{ACL}^p$, $p > 2$, обладают $N$-свойством, и что существуют примеры непрерывных отображений класса $\mathrm{ACL}^2$, не обладающих $N$-свойством. Соответствующие примеры непрерывных отображений $f \in W^{1,k}_{\rm loc}$ в $\mathbb{R}^k$ при $k \geqslant 3$ могут быть найдены в работе [244]. То, что непрерывные отображения $f$ в классах Соболева $W^{1,p}_{\rm loc}$, $p > k$, в $\mathbb{R}^k$, $k \geqslant 3$, удовлетворяют $N$-условию Лузина, было установлено в работе [245], см. также работу [138]. Соответствующие результаты для непрерывных отображений с производными в классах Лоренца можно найти в работе [217].

По теореме 8.2, см. также теорему VII.3 в [206], мы получаем следующее заключение типа Сарда.

**Следствие 8.3.** *При условиях теоремы 8.2, если $|\nabla f| = 0$ на измеримом множестве $E \subset \Omega$, то $H^k(f(E)) = 0$ и поэтому $\dim_H f(E) \leqslant k$ и $\dim f(E) \leqslant k-1$.*

**Замечание 8.4.** Впервые утверждение такого рода было получено Сардом в работе [298] для множества **критических точек** $x$ отображения $f$, т.е. когда $J_f(x) = 0$. Затем аналогичные проблемы изучались многими авторами для **критических точек ранга** $r$, т.е. при условии $\mathrm{rank}\ f'(x) \leqslant r$ и, в частности, для **суперкритических точек**, когда $f'(x)$ – нулевая матрица, см., напр., [21, 132, 151, 152, 184, 194, 216, 262, 269, 300, 301] и [326]. В указанных выше работах, как правило, присутствует требование гладкости $f$, без которой аналогичные утверждения, вообще говоря, не верны.

В этой связи заметим, что наш результат для суперкритических точек, см. следствие 8.3, имеет место и без дополнительных требований на гладкость $f$. В частности, данное утверждение имеет место для всех непрерывных отображений $f$ класса $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > k$, см. по этому поводу прекрасный обзор по теоремам типа Сарда [137], относящийся, в том числе, к классам Соболева.

Далее $\nabla_k f$ обозначает $k$-мерный градиент сужения отображения $f$ на $k$-мерную плоскость $\mathcal{P}$. Комбинируя предложение 8.2 и следствие 8.2, получаем следующее утверждение.

**Предложение 8.5.** *Пусть $k = 2, \ldots, n-1$, $U$ – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, и пусть $f : U \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, – отображение класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(U)$, где $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ – неубывающая функция, такая что*

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{k-1}} dt < \infty. \tag{8.24}$$

*Тогда для каждого $k$-мерного направления $\Gamma$ и почти всех $k$-мерных плоскостей $\mathcal{P} \in \Gamma$, сужение отображения $f$ на множество $\mathcal{P} \cap U$ обладает $N$-свойством, более того, является локально абсолютно непрерывным относительно $k$-мерной хаусдорфовой меры. Кроме того, на почти всех $\mathcal{P} \in \Gamma$, $H^k(f(E)) = 0$, как только $\nabla_k f = 0$ на множестве $E \subset \mathcal{P}$.*

Наиболее важным для нас частным случаем предложения 8.5 является следующее утверждение.

**Теорема 8.3.** *Пусть $U$ – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ – неубывающая функция, такая что*

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty. \tag{8.25}$$

*Тогда любое непрерывное отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ обладает $N$-свойством, более того, локально абсолютно непрерывно относительно $(n-1)$-мерной хаусдорфовой меры на почти всех гиперплоскостях $\mathcal{P}$, параллельных произвольной фиксированной гиперплоскости $\mathcal{P}_0$. Кроме того, на почти всех таких $\mathcal{P}$, $H^{n-1}(f(E)) = 0$, если $|\nabla f| = 0$ на $E \subset \mathcal{P}$.*

Заметим, что, если условие вида (8.25) имеет место для некоторой неубывающей функции $\varphi$, то функция $\varphi_c(t) = \varphi(ct)$ при $c > 0$ также удовлетворяет соотношению (8.25). Кроме того, хаусдорфовы меры являются квазиинвариантными при квазиизометриях.

По свойству Линделефа в $\mathbb{R}^n$, см., напр., теорему Линделефа в разд. I.5.XI в [46], множество $U \setminus \{x_0\}$ для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ может быть покрыто счетным числом открытых сегментов сферических колец в $U \setminus \{x_0\}$ с центром в точке $x_0$, и каждый такой сегмент может быть отображен на прямоугольный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ посредством квазиизометрии. Следовательно, применяя теорему 8.3 к каждому такому параллелепипеду по отдельности, мы получаем следующее заключение.

**Следствие 8.4.** *При условии (8.25) любое непрерывное отображение $f \in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ обладает $N$-свойством относительно $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа, более того, локально абсолютно непрерывно на почти всех сферах $S$ с центром в заданной предписанной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, на почти всех таких сферах $S$ выполнено условие $H^{n-1}(f(E)) = 0$, как только $|\nabla f| = 0$ на множестве $E \subset S$.*

**Замечание 8.5.** Заметим, что условие (8.25) не влечет $N$-свойство отображения $f : U \to \mathbb{R}^n$ в $U$ относительно меры Лебега в $\mathbb{R}^n$. Последнее заключение следует, в частности, из примеров С.П. Пономарева, построившего гомеоморфизмы $f$, принадлежащие классу $W^{1,p}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ для произвольного $p < n$, и не обладающие $N$-свойством Лузина, см., напр., [70].

В частности, соотношение (8.25) имеет место для функций $\varphi(t) = t^p$, $p > n-1$, иначе говоря, указанные выше свойства имеют место для непрерывных отображений $f \in W^{1,p}_{\rm loc}$, $p > n-1$. Однако, это неверно для $p < n-1$. Более того, это неверно для гомеоморфизмов $f : U \to \mathbb{R}^n$ в классах $W^{1,p}_{\rm loc}$, $p < n-1$, как это следует из примеров Пономарева. Действительно, если $g(x)$ такой пример в $\mathbb{R}^{n-1}$, то $f(x,y) = (g(x),y)$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y \in \mathbb{R}$, не удовлетворяет $N$-свойству Лузина на каждой гиперплоскости $y = \mathrm{const}$. Случай $p = n-1$ исследовался в [159].

Если $m < n-1$, то $H^{n-1}(\mathbb{R}^m) = 0$ и $N$-свойство на п.в. гиперплоскостях для отображения $f$ в теореме 8.3 очевидно без условия (8.25). Однако, условие (8.25) является необходимым при $m \geqslant n-1$, см. замечание 8.3.

Связь условий типа Кальдерона (8.15) с $N$-свойством и дифференцируемостью впервые была обнаружена при изучении так называемых липшицианов в смысле Радо, см., напр., [145] и V.3.6 в [270], а также недавние работы [131, 217] и [272].

## 8.5. О компактных классах Орлича–Соболева

Напомним определения, связанные с нормальными и компактными семействами отображений в метрических пространствах. Пусть $(X, d)$ и $(X', d')$ – метрические пространства с метриками $d$ и $d'$, соответственно. Семейство $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений $f : X \to X'$ называется **нормальным**, если любая последовательность отображений $f_j \in \mathfrak{F}$ имеет подпоследовательность $f_{j_m}$, сходящуюся равномерно на каждом компактном множестве $C \subset X$ к непрерывному отображению $f$. Если при этом $\mathfrak{F}$ является **замкнутым** относительно локальной равномерной сходимости, т.е., $f \in \mathfrak{F}$, то семейство называется **компактным**.

Понятие нормальных семейств отображений тесно связано со следующим понятием. Семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f : X \to X'$ называется **равностепенно непрерывным в точке** $x_0 \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всех $f \in \mathfrak{F}$ и $x \in X$ при $d(x, x_0) < \delta$. Семейство $\mathfrak{F}$ называется **равностепенно непрерывным**, если $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно в каждой точке $x_0 \in X$.

Пусть $\varphi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – неубывающая функция, $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $M \in [0, \infty)$ и $x_0 \in D$. Обозначим через $\mathfrak{F}^{\varphi}_M$ семейство всех непрерывных отображений $f : D \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, класса $W^{1,1}_{\text{loc}}$ таких, что $f(x_0) = 0$ и

$$\int\limits_D \varphi\left(|\nabla f|\right)\, dm(x) \leqslant M\ . \tag{8.26}$$

Символом $\mathfrak{F}^{p}_M$ обозначим пространство $\mathfrak{F}^{\varphi}_M$ при $\varphi(t) = t^p$, $p \in [1, \infty)$. Полагаем

$$t_0 = \sup_{\varphi(t)=0} t\,, \quad t_0 = 0 \quad \text{если} \quad \varphi(t) > 0 \quad \forall\, t \in \overline{\mathbb{R}^+} \tag{8.27}$$

и

$$T_0 = \inf_{\varphi(t)=\infty} t\,, \quad T_0 = \infty \quad \text{если} \quad \varphi(t) < \infty \quad \forall\, t \in \overline{\mathbb{R}^+}\,. \tag{8.28}$$

Нами доказан следующий результат, см. теорему 4.1 в [284], сравни теорему 8.1 в [208].

**Теорема 8.4.** *Пусть* $\varphi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *– непостоянная непрерывная неубывающая выпуклая функция, такая, что для некоторых* $t_* \in (t_0, \infty)$ *и* $\alpha \in (0, 1/(n-1))$ *выполнено условие*

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left(\frac{t}{\varphi(t)}\right)^{\alpha} dt < \infty\,. \tag{8.29}$$

*Тогда семейство $\mathfrak{F}_M^{\varphi}$ является компактным относительно локальной равномерной сходимости в $\mathbb{R}^n$.*

Здесь непрерывность функции $\varphi$ подразумевается в смысле топологии расширенной положительной действительной оси $\overline{\mathbb{R}^+}$.

Перед доказательством теоремы напомним, что неубывающая выпуклая функция $\varphi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ называется **строго выпуклой** (см., напр., [80]), если

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \infty \,. \tag{8.30}$$

**Замечание 8.6.** Заметим, что непостоянная непрерывная неубывающая выпуклая функция $\varphi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$, удовлетворяющая условию (8.29) для некоторого $\alpha > 0$, является строго выпуклой. Действительно, функция $\varphi(t)/t$ – неубывающая, если $\varphi$ – выпуклая (см., напр., предложение I.4.5 в [141]). Таким образом, из (8.29) для $\alpha > 0$ следует (8.30).

Доказательство теоремы 8.4 основано на следующей лемме.

**Лемма 8.3.** *Пусть $\varphi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – непостоянная непрерывная неубывающая выпуклая функция, удовлетворяющая условию (8.29) при некотором $\alpha > 0$, и пусть $\tilde{\alpha} \in (\alpha, \infty)$. Тогда $\varphi$ допускает представление $\varphi = \psi \circ \tilde{\varphi}$, где $\psi$ и $\tilde{\varphi} : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – строго выпуклые и, кроме того, $\tilde{\varphi} \leqslant \varphi$ и функция $\tilde{\varphi}$ удовлетворяет соотношению (8.29) с показателем $\tilde{\alpha}$.*

**Доказательство.** Заметим, что выпуклая функция $\varphi$ является локально липшицевой на интервале $(0, T_0)$, где $T_0$ определено (8.28), при этом, $T_0 > t_0$ ввиду непрерывности и непостоянства функции $\varphi$. Следовательно, $\varphi$ – локально абсолютно непрерывна, дифференцируема за исключением конечного набора точек в данном невырожденном интервале и, кроме того, $\varphi'$ не убывает, см., напр., следствия 1-2 и предложение раздела I.4 в [141]. Таким образом, обозначив через $\varphi'_+(t)$ функцию, совпадающую с $\varphi'(t)$ в точках дифференцируемости $\varphi$, $\varphi'_+(t) = \lim\limits_{\tau\to t+0} \varphi'(\tau)$ в остальных точках интервала $[0, T_0)$ и $\varphi'_+(t) = \infty$ для всех $t \in [T_0, \infty]$, получаем

$$\varphi(t) = \varphi(0) \ + \int\limits_0^t \varphi'_+(\tau)\, d\tau \quad \forall\, t \in \overline{\mathbb{R}^+} \,. \tag{8.31}$$

Ввиду монотонности функции $\varphi'_+$, вычисляя ее среднее значение по отрезкам $[0, t]$ и $[t/2, t]$, соответственно, получаем из (8.31) двустороннюю оценку

$$\frac{1}{2}\, \varphi'_+\,(t/2) \leqslant \frac{\varphi(t) \ - \ \varphi(0)}{t} \leqslant \varphi'_+(t) \quad \forall\, t \in \overline{\mathbb{R}^+} \,. \tag{8.32}$$

Неравенства (8.32) показывают, что условие (8.29) эквивалентно следующему:

$$I\colon\ = \int\limits_{t_*}^{\infty} \frac{dt}{[\varphi'_+(t)]^{\alpha}} < \infty\,. \tag{8.33}$$

В силу монотонности $\varphi'_+$ из условия (8.33) вытекает, что $\varphi'_+(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Таким образом, величина $T_* = \sup\limits_{\varphi'_+(t)<1} t$ конечна, $T_* \in [t_0, T_0)$. Полагаем $\lambda = \alpha/\alpha_* \in (0,1)$.

Рассмотрим функции $\tilde{\varphi}(t) = \int\limits_0^t h(\tau)\,d\tau$ и $\psi(s) = \varphi(0) + \int\limits_0^s H(r)\,dr$, где $h(t) = \varphi'_+(t)$ при $t \in [0, T_*)$, $h(t) = [\varphi'_+(t)]^{\lambda}$ при $t \in [T_*, \infty]$, $H(s) = 1$ при $s \in [0, S_*)$, $S_* = \varphi_*(T_*)$, $H(s) = [\varphi'_+(\tilde{\varphi}^{-1}(s))]^{1-\lambda}$ при $s \in [S_*, S_0)$, $S_0 = \varphi_*(T_0)$, и $H(s) = \infty$ при $s \in [S_0, \infty]$.

По построению $\tilde{\varphi}(t) \leqslant \varphi(t)$ при всех $t \in \overline{\mathbb{R}^+}$, функции $\psi$ и $\tilde{\varphi}$, а также $\psi \circ \tilde{\varphi}$ – неубывающие и выпуклые (см., напр., предложение 8 раздела I.4 в [141]), и

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \frac{dt}{[\tilde{\varphi}'_+(t)]^{\tilde{\alpha}}} = I < \infty\,. \tag{8.34}$$

Таким образом, $\tilde{\varphi}$ удовлетворяет соотношению (8.29) с новым $\tilde{\alpha}$. По аналогии с (8.32)

$$\frac{\psi(s)\ -\ \psi(0)}{s} \geqslant \frac{1}{2}\ H\,(s/2) \quad \forall\ s \in \overline{\mathbb{R}^+}, \tag{8.35}$$

где правая часть последнего соотношения сходится к $\infty$ при $s \to \infty$. Таким образом, функция $\psi$ является строго выпуклой.

Несложные вычисления показывают, что

$$(\psi \circ \tilde{\varphi})'_+(t) = \psi'_+(\tilde{\varphi}(t)) \cdot \tilde{\varphi}'_+(t) = \varphi'_+(t)\,,$$

за исключением счетного множества точек в $\overline{\mathbb{R}^+}$, $\psi \circ \tilde{\varphi}(0) = \varphi(0)$ и, следовательно, $\psi \circ \tilde{\varphi} \equiv \varphi$ в силу (8.31). $\Box$

Теперь докажем основной результат этого раздела – теорему 8.4.

**Доказательство.** Прежде всего, покажем, что семейство отображений $\mathfrak{F}^{\varphi}_{M}$ является равностепенно непрерывным. Действительно, по лемме 8.3 функция $\varphi$ допускает представление $\varphi = \psi \circ \tilde{\varphi}$, где $\psi$ и $\tilde{\varphi} : \overline{\mathbb{R}^+} \to$

$\to \overline{\mathbb{R}^+}$ строго выпуклы и

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left(\frac{t}{\tilde{\varphi}(t)}\right)^{\frac{1}{n-1}} dt < \infty \tag{8.36}$$

для некоторых $t_* > t_0$. Кроме того, $\tilde{\varphi} \leqslant \varphi$ и, следовательно,

$$\int\limits_{D} \tilde{\varphi}\left(|\nabla f|\right)\, dm(x) \leqslant M\,. \tag{8.37}$$

Для точки $z_0 \in D$ и числа $\delta > 0$, обозначим через $C(z_0, \delta)$ $n$–мерный открытый куб с центром в точке $z_0$ с ребрами, параллельными осям координат и длиной ребра $\delta$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку функция $\psi$ – строго выпуклая, интеграл $\tilde{\varphi}(|\nabla f|)$, взятый по кубу $C(z_0, \delta) \subset D$, произвольно мал при достаточном малом $\delta > 0$ для всех $f \in \mathfrak{F}_M^{\varphi}$, см., напр., теорему III.3.1.2 [80]. Таким образом, применяя предложение 8.4 и замечание 8.1 к функции $\tilde{\varphi}$, получаем, что $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ для всех $z \in C(z_0, \delta)$ и некотором $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

Теперь покажем, что семейство $\mathfrak{F}_M^{\varphi}$ равномерно ограничено на компактах. Действительно, пусть $K$ – компакт в $D$. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $K$ – связное множество, содержащее точку $x_0$ из определения $\mathfrak{F}_M^{\varphi}$, см., напр., лемму 1 в [97]. Покроем $K$ набором кубов $C(z, \delta_z)$, $z \in K$, где число $\delta_z$ соответствует числу $\varepsilon := 1$ из первой части доказательства. Поскольку множество $K$ компактно, найдётся конечное число кубов $C_i = C(z_i, \delta_{z_i})$, $i = 1, 2, \ldots, N$ покрывающих $K$. Отметим, что $D_* := \bigcup\limits_{i=1}^{N} C_i$ является подобластью $D$, т.к. $K$ – связное множество. Следовательно, каждую точку $z_* \in K$ можно соединить с $x_0$ в $D_*$ ломаной с концами сегментов в точках $x_0, x_1, \ldots, x_k, z_*$ в указанном порядке, лежащих в кубах с номерами $i_1, \ldots, i_k$, $x_0 \in C(z_{i_1}, \delta_{z_{i_1}})$, $z_* \in C(z_{i_k}, \delta_{z_{i_k}})$ и $x_l \in C_{i_l} \cap C_{i_{l+1}}$, $l = 1, \ldots, k-1$, $k \leqslant N - 1$. В силу неравенства треугольника имеем

$$|f(z_*)| \leqslant \sum_{l=0}^{k-1} |f(x_l) - f(x_{l+1})| + |f(x_k) - f(z_*)| \leqslant N\,.$$

Поскольку $N$ зависит только от компакта $K$, то семейство отображений $\mathfrak{F}_M^{\varphi}$ равномерно ограничено на компактах и, следовательно, является нормальным семейством в силу теоремы Арцела–Асколи, см., напр., IV.6.7 в [19].

Наконец, покажем, что класс $\mathfrak{F}^{\varphi}_M$ замкнут. По замечанию 8.6 $\varphi$ строго выпукла. Тогда по теореме III.3.1.2 в [80] для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\int\limits_E |\nabla f|\, dm(x) \leqslant \varepsilon$ для каждого $f \in \mathfrak{F}^{\varphi}_M$ при $m(E) < \delta$. Пусть $f_j \in \mathfrak{F}^{\varphi}_M$ и $f_j \to f$ локально равномерно при $j \to \infty$. Тогда по лемме 2.1 в статье [289], см. лемму 2.11 в монографии [188], имеем, что $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. По теореме 3.3 главы III § 3.4 в монографии [77]

$$\int\limits_D \varphi(|\nabla f|)\, dm(x) \leqslant M\,, \tag{8.38}$$

т.е. класс $\mathfrak{F}^{\varphi}_M$ замкнут. Таким образом, класс $\mathfrak{F}^{\varphi}_M$ компактен. □

**Следствие 8.5.** *Класс $\mathfrak{F}^{p}_M$ компактен относительно локально равномерной сходимости для каждого $p \in (n, \infty)$.*

**Доказательство.** Действительно, как легко проверить, функция $\varphi(t) = t^p$ удовлетворяет условию теоремы 8.4 для произвольного $\alpha \in (1/(p-1), 1/(n-1))$. □

Отметим, что проблема равностепенной непрерывности отображений в классах $W^{1,p}$ при $p > n$ была исследована ещё в работе [138], см. также [209]. Однако, условие $p > n$ является слишком сильным требованием для отображений с конечным искажением как это было очевидно уже в плоском случае, см., напр., [139,160,188,252], хотя это условие естественно для квазиконформных отображений, см., напр., [10] и [173]. Мы вернемся к этому вопросу еще раз в параграфе 10.7 и усилим результаты в случае гомеоморфизмов.

## 8.6. Нижние и кольцевые $Q$-гомеоморфизмы

Отображения, которые мы начинаем рассматривать в настоящем разделе, не только являются интересными сами по себе, но и необходимы нам как аппарат для получения некоторых важных утверждений о классах Орлича–Соболева. В работе [171], разд. 13, Ф. Геринг определил $K$-квазиконформное отображение как гомеоморфизм, изменяющий модуль кольцевой области не более чем в $K$ раз. Следующее понятие мотивировано кольцевым определением Геринга.

Пусть $D$ и $D'$ – области в $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$, $Q : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ – измеримая по Лебегу функция. Гомеоморфизм $f : D \to D'$

будем называть **нижним $Q$-гомеоморфизмом в точке** $x_0$, если

$$M\left(f\left(\Sigma_{\varepsilon}\right)\right) \geqslant \inf_{\rho \in \operatorname{ext} \operatorname{adm} \Sigma_{\varepsilon}} \int\limits_{D \cap A_{\varepsilon}} \frac{\rho^n(x)}{Q(x)}\, dm(x) \tag{8.39}$$

для каждого кольца $A_\varepsilon = A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0\}$, $\varepsilon \in \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in (0, d_0)$, где

$$d_0 = \sup_{x \in D} |x - x_0|, \tag{8.40}$$

а $\Sigma_\varepsilon$ обозначает семейство всех пересечений сфер

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}, \qquad r \in (\varepsilon, \varepsilon_0),$$

с областью $D$. Указанное выше понятие может быть распространено в бесконечно удаленную точку, $x_0 = \infty \in \overline{D}$, стандартным образом при помощи инверсии $T(x) = x/|\,x|^2$, $T(\infty) = 0$, $T(0) = \infty$. Именно, гомеоморфизм $f : D \to D'$ называют **нижним $Q$-гомеоморфизмом в точке** $\infty \in \overline{D}$, если отображение $F = f \circ T$ является нижним $Q_*$-гомеоморфизмом в точке 0 при $Q_* = Q \circ T$.

Наконец, будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является **нижним $Q$-гомеоморфизмом в области** $D$, если $f$ является нижним $Q$-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$.

Приведём критерий нижнего $Q$-гомеоморфизма в $\mathbb{R}^n$, см. теорему 2.1 в статье [40], либо теорему 9.2 в монографии [252], см. также раздел 3.7 выше.

**Предложение 8.6.** *Пусть $D$ и $D'$ области в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$, и $Q : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ – измеримая по Лебегу функция. Тогда гомеоморфизм $f : D \to D'$ является нижним $Q$-гомеоморфизмом в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда*

$$M\left(f\left(\Sigma_{\varepsilon}\right)\right) \geqslant \ I \ : \ = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|\,Q\|_{\,n-1}(r)} \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\ \varepsilon_0 \in (0, d_0), \tag{8.41}$$

*где*

$$\|Q\|_{\,n-1}(r) = \left( \int\limits_{D(x_0, r)} Q^{n-1}(x)\, d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{n-1}} \tag{8.42}$$

*есть $L_{n-1}$-норма функции $Q$ над множеством $D(x_0,r) = D\cap S(x_0,r) = \{x\in D : |x-x_0| = r\}$.*

Заметим, что точная нижняя грань в правой части соотношения (8.39) достигается для функции

$$\rho_0(x) = \frac{Q(x)}{\|Q\|_{\,n-1}(|x|)}.$$

Далее, как обычно, $\Gamma(A,B,C)$ для множеств $A$, $B$ и $C$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ обозначает семейство всех кривых, соединяющих $A$ и $B$ в $C$.

Теперь пусть $D\subset\mathbb{R}^n$ и $D'\subset\overline{\mathbb{R}^n}$, $n\geqslant 2$, – две фиксированные области, а $Q:\mathbb{R}^n\to(0,\infty)$ – измеримая по Лебегу функция. Полагаем $S_i := S(x_0,r_i)$, $i=1,2$. Будем говорить, что гомеоморфизм $f: D\to D'$ является **кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в точке** $x_0\in\overline{D}$, если $f$ удовлетворяет соотношению

$$M\left(f\left(\Gamma(S_1,S_2,D)\right)\right) \leqslant \int\limits_{A\cap D} Q(x)\cdot\eta^n(|x-x_0|)\,dm(x) \tag{8.43}$$

для каждого кольца $A=A(x_0,r_1,r_2)$, $0<r_1<r_2<d_0=d(x_0,\partial D)$ и каждой измеримой по Лебегу функции $\eta:(r_1,r_2)\to[0,\infty]$, такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr\geqslant 1. \tag{8.44}$$

Понятие кольцевого $Q$-гомеоморфизма продолжается в $\infty$ стандартным образом, как и в случае нижних $Q$-гомеоморфизмов выше.

Понятие кольцевого $Q$-гомеоморфизма впервые было введено в работе [286] в связи с исследованием уравнений Бельтрами на плоскости, а позже было распространено на пространственный случай в работе [86], см. также монографию [252].

**Следствие 8.6.** *В $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, нижний $Q$-гомеоморфизм $f: D\to D'$ в точке $x_0\in\overline{D}$ с $Q$ интегрируемой в окрестности $x_0$ в степени $n-1$ является кольцевым $Q_*$-гомеоморфизмом в $x_0$ с $Q_* = Q^{n-1}$.*

**Доказательство.** Действительно, пусть $0<r_1<r_2<d(x_0,\partial D)$ и $S_i = S(x_0,r_i)$, $i=1,2$. Согласно равенствам Хессе и Цимера, см., напр., [204] и [327], см. также приложения А3 и А6 в [252],

$$M\left(f\left(\Gamma(S_1,S_2,D)\right)\right) \;\leqslant\; M^{1-n}(f\left(\Sigma\right))\ , \tag{8.45}$$

поскольку $f\,(\Sigma) \subset \Sigma\,(f(S_1), f(S_2), f(D))$, где $\Sigma$ обозначает совокупность всех сфер с центром в точке $x_0$, расположенных между сферами $S_1$ и $S_2$, а $\Sigma\,(f(S_1), f(S_2), f(D))$ состоит из всех $(n-1)$-мерных поверхностей в $f(D)$, отделяющих $f(S_1)$ и $f(S_2)$. Из соотношения (8.45) по предложению 8.6 получаем, что

$$M\,(f\,(\Gamma(S_1, S_2, D))) \ \leqslant \ I^{1-n}\ , \tag{8.46}$$

где интеграл $I$ определен в (8.41). Однако по лемме 3.7 в [86], см. также лемму 7.4 в [252],

$$I^{1-n} \ \leqslant \int\limits_{A\cap D} Q(x)\cdot\eta^n(|x-x_0|)\,dm(x) \tag{8.47}$$

для каждой измеримой по Лебегу функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, удовлетворяющей условию (8.44), где $A$ – кольцо $A(x_0, r_1, r_2)$. Наконец, из (8.46) и (8.47) получаем заключение следствия 8.6. $\Box$

**Следствие 8.7.** *При $n = 2$ любой нижний $Q$-гомеоморфизм $f : D \to D'$ в точке $x_0 \in \overline{D}$ с $Q$ интегрируемой в окрестности $x_0$ является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в точке $x_0$.*

**Замечание 8.7.** Неравенство (8.47), а, следовательно, и заключения следствий 8.6 и 8.7 остаются в силе, если функция $Q$ интегрируема в степени $n-1$ на почти всех сферах достаточно малых радиусов с центром в точке $x_0$.

Заметим также, что в определениях нижних и кольцевых $Q$-гомеоморфизмов функцию $Q$ достаточно задать только в области $D$ или продолжить нулем вне $D$.

В препринте [227] было впервые доказано, что каждый гомеоморфизм $f$ с конечным искажением на плоскости является нижним $Q$-гомеоморфизмом с $Q(x) = K_f(x)$, см. также теорему 1 в [37] и раздел 5.2 выше. В следующем разделе мы покажем, что аналогичное заключение справедливо для гомеоморфизмов $f$ с конечным искажением в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, классов Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, когда функция $\varphi$ удовлетворяет условию типа Кальдерона (8.25) и, в частности, классов Орлича–Соболева $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$.

## 8.7. Нижние $Q$-гомеоморфизмы и классы Орлича–Соболева

В настоящем разделе нами показано, каким образом развитые нами ранее теории отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности (нижних и кольцевых $Q$-гомеоморфизмов), опубликованные, например, в монографии [252], могут быть применены к широким классам отображений с конечным искажением, а также классам Орлича–Соболева и, в частности, к классам Соболева $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Напомним, что соответствующий плоский случай был изучен нами ранее в работах [37], [227] и [241], где установлено, что любой гомеоморфизм $f$ конечного искажения на плоскости является нижним $Q$-гомеоморфизмом с $Q(x) = K_f(x)$, см. часть II данной книги.

Напомним, что отображение $g : X \to Y$ между метрическими пространствами $X$ и $Y$ называется **липшицевым,** если $\text{dist}\,(g(x_1), g(x_2)) \leqslant M \cdot \text{dist}\,(x_1, x_2)$ для некоторой постоянной $M < \infty$ и всех $x_1$, $x_2 \in X$. Говорят, что отображение $g : X \to Y$ **билипшицево**, если, оно, во-первых, липшицево, во-вторых, $M^* \cdot \text{dist}\,(x_1, x_2) \leqslant \text{dist}\,(g(x_1), g(x_2))$ для некоторой постоянной $M^* > 0$ и всех $x_1$, $x_2 \in X$.

Следующее утверждение является ключевым для дальнейшего исследования.

**Теорема 8.5.** *Пусть $D$ и $D'$ – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ – неубывающая функция, такая что при некотором $t_* \in (0, \infty)$*

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty. \tag{8.48}$$

*Тогда любой гомеоморфизм $f : D \to D'$ конечного искажения класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ является нижним $Q$-гомеоморфизмом в произвольной точке $x_0 \in D$ с $Q(x) = K_f(x)$.*

**Доказательство.** Обозначим через $B$ (борелевское) множество всех точек $x \in D$, где отображение $f$ имеет полный дифференциал $f'(x)$ и $J_f(x) \neq 0$. Применяя теорему Кирсбрауна и используя единственность аппроксимативного дифференциала, см., напр., разд. 2.10.43 и теорему 3.1.2 в [108], заключаем, что множество $B$ представляет собой счетное объединение борелевских множеств $B_l$, $l = 1, 2, \ldots$, таких что отображения $f_l = f|_{B_l}$ являются билипшицевыми гомеоморфизмами, см., напр., лемму 3.2.2 и теоремы 3.1.4 и 3.1.8 в [108]. Без ограничения общности, можно считать, что множества $B_l$ попарно не пересекаются. Обозначим также через $B_*$ оставшееся множество всех точек $x \in D$, где $f$ имеет полный дифференциал, однако, $f' = 0$.

По построению множество $B_0 := D \setminus (B \cup B_*)$ имеет лебегову меру нуль, см. теорему 8.1. Следовательно, по теореме 3.6 имеем $\mathcal{A}_S(B_0) = 0$

для почти всех гиперповерхностей $S$ в $\mathbb{R}^n$ и, в частности, для почти всех сфер $S_r := S(x_0, r)$ с центром в точке $x_0 \in \overline{D}$. Таким образом, по следствию 8.4, получим $\mathcal{A}_{S_r^*}(f(B_0)) = 0$, а также $\mathcal{A}_{S_r^*}(f(B_*)) = 0$ для почти всех $S_r$, где $S_r^* = f(S_r)$.

Пусть $\Gamma$ обозначает семейство всех пересечений сфер $S_r$, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 < d_0 = \sup\limits_{x\in D} |x - x_0|$, с областью $D$. Для произвольной функции $\rho_* \in$ $\in \operatorname{adm} f(\Gamma)$, такой что $\rho_* \equiv 0$ вне $f(D)$, полагаем $\rho \equiv 0$ вне $D$ и на $B_0$, и

$$\rho(x) := \rho_*(f(x))\|f'(x)\| \qquad \text{при } x \in D \setminus B_0.$$

Рассуждая покусочно на каждом $B_l$, $l = 1, 2, \ldots$, согласно разд. 1.7.6 и лемме 3.2.2 в [108] мы получаем, что

$$\int\limits_{S_r} \rho^{n-1}\, d\mathcal{A} = \int\limits_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x))\|f'(x)\|^{n-1}\, d\mathcal{A} \geqslant 1$$

для почти всех $S_r$, и, следовательно, $\rho \in \operatorname{ext} \operatorname{adm} \Gamma$.

Используя замену переменных на каждом $B_l$, $l = 1, 2, \ldots$, см., напр., теорему 3.2.5 в [108], ввиду счетной аддитивности интеграла, получаем оценку

$$\int\limits_{D} \frac{\rho^n(x)}{K_f(x)}\, dm(x) \leqslant \int\limits_{f(D)} \rho_*^n(x)\, dm(x),$$

что и завершает доказательство. $\square$

**Следствие 8.8.** *Любой гомеоморфизм с конечным искажением в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, класса $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ при $p > n-1$ является нижним $Q$-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$ с $Q(x) = K_f(x)$.*

**Следствие 8.9.** *В частности, любой гомеоморфизм $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, такой что $K_f \in L^q_{\mathrm{loc}}$ при $q > n - 1$, является нижним $Q$-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$ с $Q(x) = K_f(x)$.*

Комбинируя теорему 8.5, следствия 8.6, 8.8 и 8.9, мы также получаем следующее заключение.

**Следствие 8.10.** *Любой гомеоморфизм $f \in W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ при условии (8.48) на функцию $\varphi$ и, в частности, любой гомеоморфизм $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ при $p > n-1$, с $K_f \in L^{n-1}(D)$ является кольцевым $Q_*$-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$ с $Q_*(x) = [K_f(x)]^{n-1}$. В частности, это верно для любого гомеоморфизма $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с дилатацией $K_f \in L^q_{\mathrm{loc}}(D)$ при $q > n-1$.*

**Замечание 8.8.** В силу замечания 8.7, в следствии 8.10 условие $K_f \in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$ можно заменить на условие интегрируемости $K_f$ в степени $n-1$ на почти всех сферах достаточно малых радиусов с центром в точках $x_0 \in \overline{D}$.

# Глава 9. Локальное и граничное поведение классов Орлича–Соболева

В данной главе приведены критерии равностепенной непрерывности, непрерывной и гомеоморфной продолжимости на границы и устранимости особенностей гомеоморфизмов $f$ в областях $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, классов Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$, при условии типа Кальдерона на функцию $\varphi$, в частности, классов Соболева $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ при $p > n-1$.

## 9.1. Равностепенно непрерывные семейства гомеоморфизмов

В разделе сформулированы теоремы о равносткпенной непрерывности для гомеоморфизмов классов Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$, удовлетворяющих условию (9.2), см. ниже, вообще говоря, более слабому, чем (8.29), в которых отсутствуют равномерные (даже локально в области) ограничения вида (8.26). Здесь всюду подразумевается, что функция $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ является неубывающей.

Напомним, что в расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$ используется **сферическая (хордальная) метрика** $h(x,y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, где $\pi$ – стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$h(x,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}, \quad h(x,y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}, \quad x \neq \infty \neq y.$$

Заметим, что, по определению, $h(x,y) \leqslant 1$ при всех $x$ и $y \in \overline{\mathbb{R}^n}$, а также, что при всех $x$, $y \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство $h(x,y) \leqslant |x-y|$. **Сферическим (хордальным) диаметром** множества $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ называется величина

$$h(E) = \sup_{x,y \in E} h(x,y). \tag{9.1}$$

Комбинируя следствие 8.10, см. также замечание 8.8, с результатами статьи [86] о равностепенно непрерывных и нормальных семействах кольцевых $Q$-гомеоморфизмов, см. также главу 7 в монографии [252], получаем следующие результаты.

**Теорема 9.1.** *Пусть $D$ и $D'$ – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $\varphi : (0,\infty) \to$ $\to (0,\infty)$ – неубывающая функция, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty. \tag{9.2}$$

*Пусть $f : D \to D'$ – гомеоморфизм класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с $K_f \in L^{n-1}_{\rm loc}$, такой что $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \geqslant \Delta > 0$. Тогда для каждого $x_0 \in D$ и $x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))$, $\varepsilon(x_0) < d(x_0) = {\rm dist}(x_0, \partial D)$, имеет место неравенство*

$$h(f(x), f(x_0)) \leqslant \frac{\alpha_n}{\Delta} \exp\left\{-\int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{r k_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}\right\}, \tag{9.3}$$

*где постоянная $\alpha_n$ зависит только от $n$, а $k_{x_0}(r)$ обозначает среднее интегральное значение функции $[K_f(x)]^{n-1}$ над сферой $S(x_0, r)$.*

**Замечание 9.1.** Оценка (9.3) может быть также записана в виде

$$h(f(x), f(x_0)) \leqslant \frac{\alpha_n}{\Delta} \exp\left\{-\ \omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{\|K_f\|_{n-1}(x_0, r)}\right\}, \tag{9.4}$$

где $\omega_{n-1}$ – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $\|K_f\|_{n-1}(x_0, r)$ – норма сужения $K_f$ на сфере $S(x_0, r)$ в пространстве $L^{n-1}\left(S(x_0, r)\right)$.

**Следствие 9.1.** *В частности, оценки (9.3) и (9.4) имеют место для гомеоморфизмов $f$, принадлежащих классам Соболева $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$ с $K_f \in L^{n-1}_{\rm loc}$ и гомеоморфизмов $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$ с $K_f \in L^{q}_{\rm loc}$ при $q > n-1$.*

**Следствие 9.2.** *Пусть для гомеоморфизма $f : D \to D'$ класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ при $r < \varepsilon(x_0) < \min\{e^{-1}, d(x_0)\}$ выполнено условие*

$$k_{x_0}(r) \leqslant \left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}. \tag{9.5}$$

*Тогда при всех $x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))$ имеет место оценка*

$$h(f(x), f(x_0)) \leqslant \frac{\alpha_n}{\Delta} \frac{\log \frac{1}{\varepsilon(x_0)}}{\log \frac{1}{|x-x_0|}}\ . \tag{9.6}$$

**Следствие 9.3.** *В частности, если для некоторого* $\varepsilon(x_0) < < \min\{e^{-1}, d(x_0)\}$,
$$K_f(x) \leqslant \log \frac{1}{|x-x_0|}\ , \tag{9.7}$$
*то оценка (9.6) имеет место всюду в шаре* $B(x_0, \varepsilon(x_0))$.

**Замечание 9.2.** Если вместо условий (9.5) и (9.7) потребовать, соответственно, выполнение неравенств
$$k_{x_0}(r) \leqslant c \cdot \left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1} \tag{9.8}$$
и
$$K_f(x) \leqslant c \cdot \log \frac{1}{|x-x_0|}, \tag{9.9}$$
то
$$h(f(x), f(x_0)) \leqslant \frac{\alpha_n}{\Delta}\ \left[\frac{\log \frac{1}{\varepsilon(x_0)}}{\log \frac{1}{|x-x_0|}}\right]^{1/c^{\frac{1}{n-1}}}. \tag{9.10}$$

**Теорема 9.2.** *Пусть* $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \geqslant 3$, $f(0) = 0$, *– гомеоморфизм класса* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *с условием (9.2) и*
$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<1} K_f^{n-1}(x)\ \frac{dm(x)}{|x|^n} \leqslant c \log \frac{1}{\varepsilon} \qquad \forall\ \varepsilon \in (0,1)\ . \tag{9.11}$$
*Тогда*
$$|f(x)| \leqslant \gamma_n \cdot |x|^{\beta_n}, \tag{9.12}$$
*где* $\gamma_n$ *– некоторая постоянная, зависящая только от* $n$, *и* $\beta_n = = (\omega_{n-1}/c)^{\frac{1}{n-1}}$, $\omega_{n-1}$ *– площадь единичной сферы в* $\mathbb{R}^n$.

**Теорема 9.3.** *Пусть* $D$ *и* $D'$ *– области в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, *и* $f : D \to D'$ *– гомеоморфизм класса* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *с условием (9.2), такой что* $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \geqslant \Delta > 0$ *и п.в.* $K_f(x) \leqslant Q(x)$ *при* $Q^{n-1} \in {\rm FMO}(x_0)$. *Тогда при некотором* $0 < \varepsilon_0 < {\rm dist}(x_0, \partial D)$
$$h(f(x), f(x_0)) \leqslant \frac{\alpha_n}{\Delta}\left\{\frac{\log \frac{1}{\varepsilon_0}}{\log \frac{1}{|x-x_0|}}\right\}^{\beta} \quad \forall\ x \in B(x_0, \varepsilon_0)\ , \tag{9.13}$$
*где постоянная* $\alpha_n$ *зависит только от* $n$, *а* $\beta$ *– только от функции* $Q$.

**Следствие 9.4.** *В частности, оценка (9.13) справедлива, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q^{n-1}(x)\,dm(x) < \infty\ . \tag{9.14}$$

Теперь, пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ – неубывающая функция, $Q:\mathbb{R}^n\to(0,\infty)$ – произвольная измеримая по Лебегу функция. Обозначим символом $\mathcal{O}^{\varphi}_{Q,\Delta}$ семейство всех гомеоморфизмов $f$ из $D$ в $\mathbb{R}^n$ с конечным искажением класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, таких что $h\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(D)\right)\geqslant\Delta>0$, $K_f(x)\leqslant Q(x)$ почти всюду. Обозначим также через $\mathcal{S}^p_{Q,\Delta}$, $p\geqslant 1$, семейство $\mathcal{O}^{\varphi}_{Q,\Delta}$ при $\varphi(t)=t^p$, а через $\mathcal{K}^p_{Q,\Delta}$ семейство всех гомеоморфизмов с конечным искажением, таких что $K_f\in L^p_{\rm loc}$, $p\geqslant 1$, $K_f(x)\leqslant Q(x)$ почти всюду, удовлетворяющих условию $h\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(D)\right)\geqslant\Delta>0$.

На основании предложения 1.6, а также результатов параграфа 8.9, получаем следующие теоремы.

**Теорема 9.4.** *Пусть $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ – неубывающая функция, удовлетворяющая условию (9.2). Если $Q^{n-1}\in{\rm FMO}$, то класс $\mathcal{O}^{\varphi}_{Q,\Delta}$ образует нормальное семейство отображений.*

**Следствие 9.5.** *При условии (9.2) класс $\mathcal{O}^{\varphi}_{Q,\Delta}$ образует нормальное семейство отображений, если выполнено условие*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q^{n-1}(x)\,dm(x) < \infty \qquad \forall\ x_0\in D. \tag{9.15}$$

**Следствие 9.6.** *В частности, классы $\mathcal{S}^p_{Q,\Delta}$ и $\mathcal{K}^p_{Q,\Delta}$ образуют нормальное семейство отображений при $p>n-1$, как только выполнено одно из двух условий: $Q^{n-1}\in{\rm FMO}$ или (9.15).*

**Теорема 9.5.** *Пусть $Q\in L^{n-1}_{\rm loc}$, $n\geqslant 3$, и при некотором $\varepsilon(x_0)<$ $<{\rm dist}(x_0,\partial D)$*

$$\int\limits_0^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{\|Q\|_{n-1}(x_0,r)} = \infty \qquad \forall\ x_0\in D\ , \tag{9.16}$$

*где $\|Q\|_{n-1}(x_0,r)$ обозначает норму функции $Q$ в пространстве $L^{n-1}$ над сферой $|x-x_0|=r$. Тогда при любом $\Delta>0$ классы $\mathcal{O}^{\varphi}_{Q,\Delta}$, $\mathcal{S}^p_{Q,\Delta}$ и $\mathcal{K}^p_{Q,\Delta}$*

*образуют нормальные семейства отображений, если $\varphi$ удовлетворяет условию (9.2) и, соответственно, если $p > n-1$.*

**Следствие 9.7.** *Классы $\mathcal{O}^{\varphi}_{Q,\Delta}$, $\mathcal{S}^{p}_{Q,\Delta}$ и $\mathcal{K}^{p}_{Q,\Delta}$ образуют нормальные семейства отображений, как только функция $\varphi$ удовлетворяет соотношению (9.2), либо, соответственно, $p > n-1$, а функция $Q^{n-1}(x)$ имеет лишь особенности логарифмического типа.*

Пусть, как и выше, $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ – неубывающая функция. Для неубывающей функции $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$, $M > 0$ и $\Delta > 0$, через $\mathcal{O}^{\Phi,\varphi}_{M,\Delta}$ обозначим семейство всех гомеоморфизмов с конечным искажением класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, таких что $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)\right) \geqslant \Delta > 0$ и

$$\int\limits_{D} \Phi\left([K_f(x)]^{n-1}\right) \frac{dm(x)}{\left(1+|x|^2\right)^n} \leqslant M. \tag{9.17}$$

Аналогично, $\mathcal{S}^{\Phi,p}_{M,\Delta}$, $p \geqslant 1$, обозначает классы $\mathcal{O}^{\Phi,\varphi}_{M,\Delta}$ при $\varphi(t) = t^p$. Наконец, $\mathcal{K}^{\Phi,p}_{M,\Delta}$, $p \geqslant 1$, обозначает класс всех гомеоморфизмов с конечным искажением, таких что $K_f \in L^p_{\rm loc}$, $p \geqslant 1$, для которых имеет место условие (9.17) и $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)\right) \geqslant \Delta > 0$.

Комбинируя теорему 4.1 работы [87] со следствием 8.10, получаем следующие результаты.

**Теорема 9.6.** *Пусть $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ – неубывающая выпуклая функция, такая что при некотором $\delta_0 > \Phi(0)$*

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty. \tag{9.18}$$

*Тогда классы $\mathcal{O}^{\Phi,\varphi}_{M,\Delta}$ при условии (9.2), а также классы $\mathcal{S}^{\Phi,p}_{M,\Delta}$ и $\mathcal{K}^{\Phi,p}_{M,\Delta}$ при $p > n-1$, являются равностепенно непрерывными, и, следовательно, образуют нормальное семейство отображений при любых $M \in (0,\infty)$ и $\Delta \in (0,1)$.*

**Замечание 9.3.** Как следует из работы [87], условие вида (9.18) является не только достаточным, но и необходимым для нормальности указанных классов.

## 9.2. Об областях с регулярными границами

Напомним, что область $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, называется **локально связной в точке** $x_0 \in \partial D$, если для каждой окрестности $U$ точки $x_0$ найдётся окрестность $V \subset U$ точки $x_0$, такая что множество $V \cap D$ является связным. Отметим, что каждая жорданова область $D$ в $\mathbb{R}^n$ является локально связной в каждой точке границы $\partial D$ (см., напр., [325], с. 66).

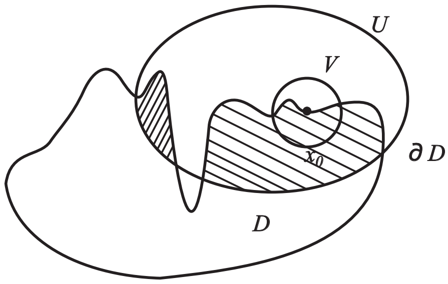


Рис. 1.

Говорят, что граница области $D$ является **слабо плоской в точке** $x_0 \in \partial D$, если для каждой окрестности $U$ точки $x_0$ и любого $P > 0$ найдётся окрестность $V \subset U$ точки $x_0$, такая что

$$M\left(\Gamma(E, F, D)\right) \geqslant P \tag{9.19}$$

для всех континуумов $E$ и $F$, лежащих в области $D$ и пересекающих $\partial U$ и $\partial V$. Также говорят, что граница области $D$ **слабо плоская**, если она является слабо плоской в каждой точке $\partial D$.

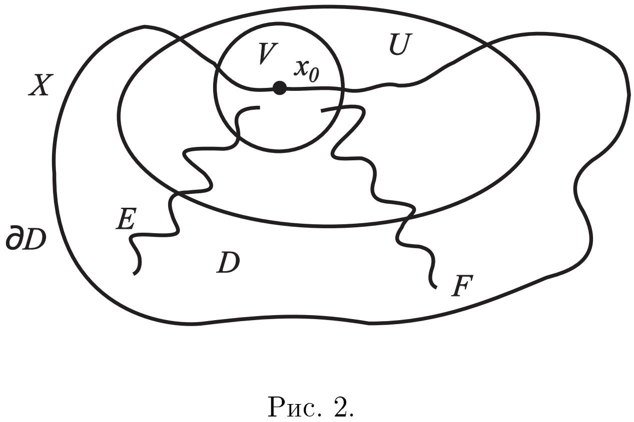


Рис. 2.

Наконец, говорят, что точка $x_0 \in \partial D$ является **сильно достижимой**, если для каждой окрестности $U$ точки $x_0$ найдётся компакт $E$, лежащий в области $D$, окрестность $V \subset U$ точки $x_0$ и некоторое число $\delta > 0$, такие что
$$M\left(\Gamma(E, F, D)\right) \geqslant \delta \tag{9.20}$$
для всех континуумов $F$, лежащих в области $D$ и пересекающих $\partial U$ и $\partial V$. Говорят, что граница области является **сильно достижимой**, если каждая её точка является сильно достижимой.

В определениях сильно достижимой и слабо плоской границы, в качестве окрестностей $U$ и $V$ точки $x_0$, можно брать открытые (замкнутые) шары с центром в точке $x_0$, либо окрестности точки $x_0$ из любой другой фундаментальной системы окрестностей. Приведенные выше понятия естественным образом могут быть распространены на случай расширенного пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$ и точки $x_0 = \infty$. В последнем случае в приведённых выше определениях необходимо брать соответствующие окрестности бесконечно удаленной точки.

Из определений следует, что, если область $D$ в $\mathbb{R}^n$ является слабо плоской в точке $x_0 \in \partial D$, то точка $x_0$ является сильно достижимой из $D$. Более того, было показано, что, если область $D$ в $\mathbb{R}^n$ является слабо плоской в точке $x_0 \in \partial D$, то $D$ является локально связной в этой точке, см., напр., лемму 5.1 в [40], либо лемму 3.15 в [252].

Понятия сильной достижимости и слабой плоскости, относящиеся к граничным точкам некоторой области в $\mathbb{R}^n$, впервые были введены в работе [39]. Данные понятия являются локализацией и обобщением соответствующих более ранних понятий, рассматривавшихся в предшествующих работах [250,251]. В связи с этим упомянем также свойства $P_1$ и $P_2$ по Вяйсяля, см. [320], а также свойства квазиконформной достижимости и квазиконформной плоскости по Някки, см., напр., в [261]. Заметим, что множество результатов, связанных с гомеоморфным продолжением на границу квазиконформных отображений и их обобщений, имеют место при условии слабой плоскости границ соответствующих областей. Условие сильной достижимости играет аналогичную роль для непрерывного продолжения отображений на границу. Ниже мы приводим некоторые важные результаты, полученные нами в сфере упомянутых выше исследований, см., напр., теорему 10.1 и лемму 6.1 в [40], лемму 5.3 в [35], см. также теорему 9.8 и леммы 9.4 и 6.5 в [252].

**Предложение 9.1.** *Пусть $D$ и $D'$ – ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $Q : D \to (0, \infty)$ – измеримая по Лебегу функция и $f : D \to D'$ – нижний $Q$-гомеоморфизм в $D$. Предположим, что область $D$ является локально связной на границе $\partial D$, а область $D'$ имеет слабо плоскую* *(соответственно, сильно достижимую) границу. Предположим, что при некотором $\delta(x_0)\in(0,d(x_0))$, $d(x_0)=\sup\limits_{x\in D}|x-x_0|$, выполнено условие*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)}\frac{dr}{\|\,Q\|_{n-1}(x_0,r)}=\infty\qquad\forall\ x_0\in\partial D,\tag{9.21}$$

*где $\|\,Q\|_{n-1}(x_0,r)$ определено равенством (8.42). Тогда отображение $f$ имеет гомеоморфное (соответственно, непрерывное) продолжение $\overline{f}$ на $\overline{D}$ и $\overline{f}$ отображает $\overline{D}$ на $\overline{D'}$.*

Область $D\subset\mathbb{R}^n$ называется областью **квазиэкстремальной длины**, сокр. **QED-областью**, см. [177], если при некоторой постоянной $K\geqslant 1$ и любых непересекающихся континуумов $E$ и $F$ в $D$ выполнено соотношение

$$M\left(\Gamma(E,F,\overline{\mathbb{R}^n}\right)\leqslant K\cdot M\left(\Gamma(E,F,D)\right).\tag{9.22}$$

Хорошо известно, см., напр., теорему 10.12 в [320], что для произвольных множеств $E$ и $F$ в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, пересекающих все сферы $S(x_0,\varrho)$, $\varrho\in(r,R)$, выполнено неравенство

$$M\left(\Gamma(E,F,\mathbb{R}^n)\right)\geqslant c_n\log\frac{R}{r}.\tag{9.23}$$

Следовательно, QED-области имеют слабо плоские границы. Один из примеров в [252], см. разд. 3.8, показывает, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно даже для односвязных плоских областей.

Область $D\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, называется **равномерной**, если каждая пара точек $x_1$ и $x_2\in D$ может быть соединена спрямляемой кривой $\gamma$ в области $D$, такой что

$$s(\gamma)\leqslant a\cdot|x_1-x_2|\tag{9.24}$$

и при всех $x\in\gamma$

$$\min_{i=1,2}s(\gamma(x_i,x))\leqslant b\cdot d(x,\partial D),\tag{9.25}$$

где символ $\gamma(x_i,x)$ обозначает часть кривой $\gamma$, ограниченную точками $x_i$ и $x$, см., напр., [254]. Хорошо известно, что каждая равномерная область является QED-областью, однако, существуют примеры QED-областей, не являющихся равномерными, см., напр., [177]. Ограниченные выпуклые области, а также области с гладкими границами являются наиболее простыми примерами равномерных областей, а, следовательно, и QED-областей, равно как и областей со слабо плоскими границами.

В теории отображений и дифференциальных уравнениях также часто встречаются так называемые липшицевы границы. Говорят, что область $D$ в $\mathbb{R}^n$ и ее граница являются **липшицевыми**, если любая точка $x_0 \in \partial D$ имеет окрестность $U$, которая с помощью некоторого билипшицева отображения $f$, см. раздел 8.7, переводится в единичный шар $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$, так что $\partial D \cap U$ переходит в пересечение $\mathbb{B}^n$ с гиперплоскостью, проходящей через начало координат. Заметим, что билипшицевы отображения $f$ являются квазиконформными, относительно которых модуль является квазиинвариантом. Поэтому липшицевы границы также являются слабо плоскими.

## 9.3. Непрерывное продолжение на границу

Всюду ниже предполагается, что $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ – неубывающая функция.

В силу теоремы 8.5, а также теоремы 6.1 в [40], см. лемму 9.4 в [252], имеем следующее утверждение.

**Лемма 9.1.** *Пусть $D$ и $D'$ – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $x_0 \in \partial D$ и*

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty. \tag{9.26}$$

*Предположим, что область $D$ локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, а граница области $D'$ сильно достижима. Пусть $f : D \to D'$ гомеоморфизм с конечным искажением, такой что $f \in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$. Если выполнено условие*

$$\int\limits_{0}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\| K_f\|_{n-1}(r)} = \infty, \tag{9.27}$$

*где $0 < \varepsilon_0 < d_0 = \sup\limits_{x \in D} |x - x_0|$ и*

$$\| K_f\|_{n-1}(r) = \| K_f\|_{n-1}(x_0, r) = \left(\int\limits_{D \cap S(x_0,r)} K_f^{n-1}(x)\, d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{9.28}$$

*то отображение $f$ продолжается в точку $x_0$ по непрерывности в $\overline{\mathbb{R}^n}$.*

В частности, из леммы 9.1 получаем следующее заключение.

**Следствие 9.8.** *Пусть $D$ и $D'$ – QED-области в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \partial D$, $f : D \to D'$ – гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условиями (9.26) и (9.27). Тогда отображение $f$ продолжается в точку $x_0$ по непрерывности в $\overline{\mathbb{R}^n}$.*

Здесь и в дальнейшем мы используем обозначение предельных множеств отображения $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ для множеств $X \subset \overline{D}$,

$$C(X, f) := \left\{ y \in \overline{\mathbb{R}^n} : \ y = \lim_{k\to\infty} f(x_k), \ x_k \to x_0 \in X, \ x_k \in D \right\}. \qquad (9.29)$$

Заметим, что для произвольного гомеоморфизма $f : D \to D'$ имеет место включение $C(\partial D, f) \subset \partial D'$, см., напр., предложение 13.5 в [252].

**Теорема 9.7.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $X \subset D$, и $f$ – гомеоморфизм области $D \setminus X$ в $\mathbb{R}^n$ с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (9.26). Предположим, что $X$ и $C(X, f)$ являются NED-множествами, $x_0 \in X$, и что выполнено условие (9.27), где $0 < \varepsilon_0 < d_0 = {\rm dist}\,(x_0, \partial D)$ и*

$$\| K_f \|_{n-1}(r) = \left( \int\limits_{S(x_0,r)} K_f^{n-1}(x)\, d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{n-1}}. \qquad (9.30)$$

*Тогда отображение $f$ продолжается в точку $x_0$ по непрерывности в $\overline{\mathbb{R}^n}$.*

Ввиду следствия 8.10, получаем также следующие следствия из результатов работы [54] для кольцевых $Q$-гомеоморфизмов, см. главу 2.

**Лемма 9.2.** *Пусть $D$ и $D'$ – ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $D$ локально связна в $x_0 \in \partial D$, и пусть $f : D \to D'$ – гомеоморфизм класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (9.26) такой, что $\partial D'$ сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества $C(x_0, f)$. Предположим, что*

$$\int\limits_{D(x_0,\varepsilon)} K_f^{n-1}(x) \cdot \psi^n(|x - x_0|)\, dm(x) = o\left(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)\right) \qquad (9.31)$$

*при $\varepsilon \to 0$ и некотором $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$, где $D(x_0, \varepsilon) = \{x \in D : \varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0\}$ и $\psi(t)$ – неотрицательная измеримая функция на $(0, \infty)$, такая что*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\ .$$

*Тогда $f$ имеет непрерывное продолжение в точку $x_0$.*

**Замечание 9.4.** Отметим также, что (9.31) выполнено, в частности, если

$$\int\limits_{|x-x_0|<\varepsilon_0} K_f^{n-1}(x)\cdot\psi^n(|x-x_0|)\,dm(x)<\infty \tag{9.32}$$

для некоторого $\varepsilon_0>0$ и $I(\varepsilon,\varepsilon_0)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$. Другими словами, для продолжимости по непрерывности $f$ в точку $x_0\in\partial D$ достаточно, чтобы интеграл (9.32) сходился для некоторой неотрицательной функции $\psi(t)$, которая локально интегрируема на $(0,\varepsilon_0]$, но имеет неинтегрируемую особенность в нуле.

**Теорема 9.8.** *Пусть $D$ и $D'$ – ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, $D$ локально связна в $x_0\in\partial D$, $\partial D'$ сильно достижима, и пусть $f:D\to\to D'$ – гомеоморфизм класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (9.26). Если*

$$k_{x_0}(r)=O\left(\left[\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\right) \tag{9.33}$$

*при $r\to 0$, где $k_{x_0}(r)$ – среднее интегральное значение $K_f^{n-1}$ над сферой $|x-x_0|=r$, то $f$ продолжим в точку $x_0$ по непрерывности в $\mathbb{R}^n$.*

**Теорема 9.9.** *Пусть $D$ и $D'$ – ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, $D$ локально связна в $x_0\in\partial D$, $\partial D'$ сильно достижима, и пусть $f:D\to\to D'$ – гомеоморфизм класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (9.26). Если $K_f^{n-1}(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке $x_0\in\overline{D}$, то $f$ продолжим в $x_0$ по непрерывности в $\mathbb{R}^n$.*

**Следствие 9.9.** *В частности, заключение теоремы 9.9 имеет место, если*

$$\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\ \fint_{B(x_0,\varepsilon)} K_f^{n-1}(x)\ dm(x)\ <\ \infty\ . \tag{9.34}$$

**Теорема 9.10.** *Пусть $D$ и $D'$ – ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, $D$ локально связна в $x_0\in\partial D$, $\partial D'$ сильно достижима, и пусть $f:D\to\to D'$ – гомеоморфизм класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (9.26). Если*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\,\frac{dm(x)}{|x-x_0|^n}=o\left(\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^n\right) \tag{9.35}$$

*при $\varepsilon\to 0$, то $f$ продолжим в точку $x_0$ по непрерывности в $\mathbb{R}^n$.*

**Замечание 9.5.** Выбирая в лемме 9.2 функцию $\psi(t) = 1/(t\log 1/t)$ вместо $\psi(t) = 1/t$, мы можем заменить условие (9.35) более слабым условием

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)\,dm(x)}{|x-x_0|\,\log\frac{1}{|x-x_0|}} = o\left(\left[\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^n\right) \tag{9.36}$$

и (9.33) условием

$$k_{x_0}(r) = o\left(\left[\log\frac{1}{r}\log\,\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\right). \tag{9.37}$$

Мы могли бы здесь привести целую шкалу соответствующих условий логарифмического типа, используя функции $\psi(t)$ вида $1/(t\,\log\cdots\log 1/t)$.

**Теорема 9.11.** *Пусть $D$ и $D'$ – ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $D$ локально связна на границе, а $D'$ имеет сильно достижимую границу и пусть $f : D \to D'$ – гомеоморфизм класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (9.26). Если*

$$\int\limits_D \Phi\left(K_f^{n-1}(x)\right)dm(x) < \infty \tag{9.38}$$

*для неубывающей выпуклой функции $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$, такой что*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \tag{9.39}$$

*при некотором $\delta > \Phi(0)$, то $f$ имеет непрерывное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \to \overline{D'}$.*

Условие (9.39) является не только достаточным, но и необходимым для непрерывного продолжения на границу отображений $f$ с интегральными ограничениями вида (9.38), см., напр., замечание 5.1 в работе [229].

## 9.4. Продолжение на границу обратных отображений

Следующая лемма о предельных множествах лежит в основе доказательства теоремы о продолжении на границу обратных гомеоморфизмов с конечным искажением. Эта лемма вытекает из леммы 9.1 в статье [40], см. лемму 9.5 в монографии [252], и теорему 8.5.

**Лемма 9.3.** *Пусть $D$ и $D'$ – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $z_1$ и $z_2$ – различные точки $\partial D$, $z_1 \neq \infty$, а $f$ – гомеоморфизм области $D$ на $D'$ класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (9.26). Предположим, что функция $K_f$ является интегрируемой на штриховых линиях*

$$D(r) = \{x \in D : |x - z_1| = r\} = D \cap S(z_1, r) \tag{9.40}$$

*для некоторого множества $E$ чисел $r < |z_1 - z_2|$, имеющего положительную линейную меру. Если $D$ локально связна в точках $z_1$ и $z_2$, а $\partial D'$ является слабо плоской, то*

$$C(z_1, f) \cap C(z_2, f) = \varnothing. \tag{9.41}$$

Из леммы 9.3 непосредственно следует, что справедлива следующая

**Теорема 9.12.** *Пусть $D$ и $D'$ области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $D$ локально связна на своей границе, а граница области $D'$ является слабо плоской и пусть $f : D \to D'$ – гомеоморфизм класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (9.26) и $K_f \in L^{n-1}(D)$. Тогда отображение $f^{-1}$ имеет продолжение в замыкание области $\overline{D'}$ по непрерывности в $\overline{\mathbb{R}^n}$.*

**Доказательство.** Действительно, ввиду теоремы Фубини, множество

$$E = \{r \in \mathbb{R} : K_f|_{D(r)} \in L^{n-1}(D(r))\} \tag{9.42}$$

имеет положительную лебегову меру, поскольку $K_f \in L^{n-1}(D)$. □

**Замечание 9.6.** Из приведенного доказательства следует, что в теореме 9.12 достаточно предполагать, что функция $K_f$ является интегрируемой в степени $n-1$ лишь в окрестности границы области $D$, и мы можем применить лемму 9.3.

Кроме того, ввиду теоремы 8.5, по теореме 9.2 в [40], см. также теорему 9.7 в [252], мы получаем справедливость следующего заключения. □

**Теорема 9.13.** *Пусть $D$ и $D'$ – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $D$ локально связна на своей границе, а граница области $D'$ является слабо плоской. Предположим, что $f : D \to D'$ – гомеоморфизм с конечным искажением класса $f \in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (9.26) и, кроме того,*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{\| K_f\|_{n-1}(x_0, r)} = \infty \qquad \forall\ x_0 \in \partial D \tag{9.43}$$

*при некотором* $\delta(x_0) < d(x_0) = \sup\limits_{x\in D} |x - x_0|$, *где величина* $\| K_f\|_{n-1}(x_0, r)$ *определена в (9.28). Тогда отображение* $f^{-1}$ *продолжается в замыкание области* $D'$ *по непрерывности в* $\overline{\mathbb{R}^n}$.

## 9.5. Гомеоморфное продолжение на границу

Комбинируя результаты предыдущих двух разделов, получаем следующие теоремы.

**Теорема 9.14.** *Пусть* $D$ *и* $D'$ *– ограниченные области в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, *область* $D$ *локально связна на своей границе, а область* $D'$ *имеет слабо плоскую границу. Предположим, что* $f : D \to D'$ *– гомеоморфизм с конечным искажением класса* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *с условием (9.26). Предположим, что*

$$\int\limits_{0}^{\delta(x_0)} \frac{dr}{\| K_f\|_{n-1}(x_0, r)} = \infty \qquad \forall\ x_0 \in \partial D \tag{9.44}$$

*при некотором* $\delta(x_0) < d(x_0) = \sup\limits_{x\in D} |x - x_0|$, *где величина* $\| K_f\|_{n-1}(x_0, r)$ *определена в (9.28). Тогда отображение* $f$ *имеет гомеоморфное продолжение* $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.

В качестве следствия из теоремы 9.14, мы получаем обобщение хорошо известной теоремы Геринга–Мартио о гомеоморфном продолжении на границу квазиконформных отображений между QED-областями, см. [177].

**Следствие 9.10.** *Пусть* $D$ *и* $D'$ *– ограниченные области со слабо плоскими границами в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, *отображение* $f : D \to D'$ *– гомеоморфизм с конечным искажением класса* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *с условием (9.26). Если условие (9.44) выполнено в каждой точке* $x_0 \in \partial D$, *то* $f$ *имеет гомеоморфное продолжение* $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.

В силу теоремы 8.5 мы получаем также следующий результат, см., напр., теорему 10.3 в [40] и теорему 9.10 в [252].

**Теорема 9.15.** *Пусть* $D$ *– ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $X \subset D$ *и* $C(X, f)$ *– NED-множества. Пусть* $f : D \setminus \{X\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *– гомеоморфизм с конечным искажением класса* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *с условием (9.26), такой что в каждой точке* $x_0 \in X$ *имеет место условие (9.44) при некотором*

$\delta(x_0) < \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$, *где*

$$\| K_f\|_{n-1}(x_0,r) = \left( \int\limits_{S(x_0,r)} K_f^{n-1}(x)\, dA \right)^{\frac{1}{n-1}} . \tag{9.45}$$

*Тогда отображение $f$ имеет гомеоморфное продолжение в $D$.*

**Замечание 9.7.** В частности, заключение теоремы 9.15 справедливо, если $X$ – замкнутое множество и

$$H^{n-1}(X) = 0 = H^{n-1}(C(X,f)). \tag{9.46}$$

Кроме того, условие (9.44) можно заменить на условие, что $K_f^{n-1}(x) \leqslant Q(x)$ п.в. для некоторой функции $Q : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ класса $\mathrm{FMO}(X)$ или на условие

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} K_f^{n-1}(x)\, dm(x) < \infty \qquad \forall\; x_0 \in X\,. \tag{9.47}$$

**Теорема 9.16.** *Пусть $D$ и $D'$ – ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $D$ локально связна на границе, а $D'$ имеет слабо плоскую границу и пусть $f : D \to D'$ – гомеоморфизм класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ с условием (9.26). Если*

$$\int\limits_D \Phi\left(K_f^{n-1}(x)\right) dm(x) < \infty \tag{9.48}$$

*для неубывающей выпуклой функции $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$, такой что*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \tag{9.49}$$

*при некотором $\delta > \Phi(0)$, то $f$ имеет гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.*

Заметим, что условие (9.49) является не только достаточным, но и необходимым для непрерывного продолжения на границу отображений $f$ с интегральными ограничениями вида (9.48) (см., напр., [229]).

**Лемма 9.4.** *Пусть $D$ и $D'$ – ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $D$ локально связна на границе, $\partial D'$ – слабо плоская, и пусть $f : D \to D'$ – гомеоморфизм класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ с условием (9.26). Предположим, что*

$$\int\limits_{D(x_0,\varepsilon)} K_f^{n-1}(x)\cdot\psi^n(|x-x_0|)\, dm(x) = o\left(I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)\right) \quad \forall\; x_0 \in \partial D \tag{9.50}$$

*при* $\varepsilon \to 0$ *и некотором* $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$, *где* $D(x_0, \varepsilon) = \{x \in D : \varepsilon < < |x-x_0| < \varepsilon_0\}$ *и* $\psi(t)$ *– неотрицательная измеримая функция на* $(0, \infty)$, *такая что*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\,.$$

*Тогда* $f$ *имеет гомеоморфное продолжение* $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.

**Теорема 9.17.** *Пусть* $D$ *и* $D'$ *– ограниченные области в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $D$ *локально связна в* $x_0 \in \partial D$, $\partial D'$ *– слабо плоская, и пусть* $f : D \to D'$ *– гомеоморфизм класса* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *с условием (9.26). Если* $K^{n-1}_f(x) \leq Q(x)$ *п.в., где* $Q \in FMO(\partial D)$, *то* $f$ *имеет гомеоморфное продолжение* $\overline{f} : \overline{D} \to \to \overline{D'}$.

**Следствие 9.11.** *В частности, заключение теоремы 9.17 имеет место, если*

$$\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} K^{n-1}_f(x)\, dm(x) < \infty \qquad \forall x_0 \in \partial D\,. \tag{9.51}$$

## 9.6. Устранение изолированных особенностей

Отметим, что произвольно большая степень интегрируемости дилатации $K_f$ не гарантирует продолжения по непрерывности в начало координат гомеоморфизма $f$ проколотого единичного шара $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, класса $W^{1,1}_{\rm loc}$, см. предложение 6.3 в [252]. Соответствующие условия имеют более тонкую природу.

По теореме 4.1 из статьи [40], см. также теорему 9.3 в монографии [252], и на основании теоремы 8.5, получаем следующее утверждение.

**Теорема 9.18.** *Пусть* $D$ *– область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $x_0 \in D$, *и пусть* $f$ *– гомеоморфизм* $D \setminus \{x_0\}$ *в* $\mathbb{R}^n$ *класса* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *с неубывающей функцией* $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, *такой что для некоторого* $t_* \in \mathbb{R}^+$

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty\,. \tag{9.52}$$

*Предположим, что*

$$\int\limits_{0}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{||K_f||_{n-1}(x_0,r)} = \infty\,, \tag{9.53}$$

*где* $\varepsilon_0 < \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$, *и*

$$||K_f||_{n-1}(x_0,r) = \left(\int\limits_{S(x_0,r)} K_f^{n-1}(x)\, d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{n-1}}\,. \tag{9.54}$$

*Тогда* $f$ *продолжается до гомеоморфизма* $D$ *в* $\overline{\mathbb{R}^n}$.

**Следствие 9.12.** *В частности, заключение теоремы 9.18 верно, если*

$$⨍_{|x-x_0|=r} K_f^{n-1}(x)\, d\mathcal{A} = O\left(\log^{n-1}\frac{1}{r}\right) \qquad \text{при} \;\; r\to 0\,. \tag{9.55}$$

Далее, по лемме 3.2 при $p=n$, получаем в качестве следствия теоремы 9.18 следующую общую лемму.

**Лемма 9.5.** *Пусть* $D$ *– область в* $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, $x_0\in D$, *и пусть* $f$ *– гомеоморфизм* $D\setminus\{x_0\}$ *в* $\mathbb{R}^n$ *класса* $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ *с условием (9.52) и* $K_f\in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}$. *Предположим, что*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} K_f^{n-1}(x)\cdot\psi^n_{x_0,\varepsilon}(|x-x_0|)\, dm(x) = o(I^n_{x_0}(\varepsilon)) \qquad \text{при} \;\; \varepsilon\to 0\,, \tag{9.56}$$

*где* $\varepsilon_0 < \mathrm{dist}\,(x_0,\partial D)$ *и* $\psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ *– семейство неотрицательных измеримых (по Лебегу) функций на* $(0,\infty)$, *таких что*

$$0 < I_{x_0}(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{x_0,\varepsilon}(t)\, dt < \infty \qquad \forall\; \varepsilon\in(0,\varepsilon_0)\,. \tag{9.57}$$

*Тогда* $f$ *продолжается до гомеоморфизма* $D$ *в* $\overline{\mathbb{R}^n}$.

В частности, выбирая в лемме 9.5 $\psi(t) = 1/(t\log 1/t)$, получаем по лемме 1.2 следующее заключение.

**Теорема 9.19.** *Пусть* $D$ *– область в* $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, $x_0\in D$, *и* $f$ *– гомеоморфизм* $D\setminus\{x_0\}$ *в* $\mathbb{R}^n$ *класса* $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ *с условием (9.52), такой что*

$$K_f^{n-1}(x) \leqslant Q(x) \qquad \text{п.в. в } D \tag{9.58}$$

*для функции* $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, $Q \in \mathrm{FMO}(x_0)$. *Тогда* $f$ *продолжается до гомеоморфизма* $D$ *в* $\overline{\mathbb{R}^n}$.

**Следствие 9.13.** *В частности, заключение теоремы 9.19 верно, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} K_f^{n-1}(x)\,dm(x) < \infty\,. \tag{9.59}$$

Аналогично, выбирая в лемме 9.5 функцию $\psi(t) = 1/t$, приходим к следующему утверждению.

**Теорема 9.20.** *Пусть* $D$ *– область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $x_0 \in D$, *и* $f$ *– гомеоморфизм* $D \setminus \{x_0\}$ *в* $\mathbb{R}^n$ *класса* $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ *с условием (9.52), такой что*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} K_f^{n-1}(x)\,\frac{dm(x)}{|x-x_0|^n} = o\left(\left[\log\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right]^n\right), \tag{9.60}$$

*где* $\varepsilon_0 < \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$. *Тогда* $f$ *продолжается до гомеоморфизма* $D$ *в* $\overline{\mathbb{R}^n}$.

**Следствие 9.14.** *В частности, условие (9.60) и утверждение теоремы 9.20 верны, если*

$$K_f(x) = o\left(\log\frac{1}{|x-x_0|}\right) \qquad \text{при} \quad x \to x_0\,. \tag{9.61}$$

*Это же верно, если*

$$k_f(r) = o\left(\left[\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\right) \qquad \text{при} \quad r \to 0\,, \tag{9.62}$$

*где* $k_f(r)$ *– среднее значение функции* $K_f^{n-1}(x)$ *по сфере* $|x - x_0| = r$.

**Замечание 9.8.** Выбирая в лемме 9.5 функцию $\psi(t) = 1/(t\log 1/t)$ вместо $\psi(t) = 1/t$, мы можем заменить (9.60) условием

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<1} \frac{K_f^{n-1}(x)\,dm(x)}{\left(|x-x_0|\log\frac{1}{|x-x_0|}\right)^n} = o\left(\left[\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^n\right), \tag{9.63}$$

а (9.62) заменить условием

$$k_f(r) = o\left(\left[\log\frac{1}{r}\log\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\right). \tag{9.64}$$

Таким образом, достаточно требовать, чтобы

$$k_f(r) = O\left(\left[\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\right). \tag{9.65}$$

Вообще говоря, мы можем здесь привести целый ряд соответствующих условий в терминах суперпозиций логарифмов.

Из теоремы 9.18 также как и из теоремы 1.1 при $p = n-1$ получаем следующий результат.

**Теорема 9.21.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $x_0 \in D$, и $f$ – гомеоморфизм $D \setminus \{x_0\}$ в $\mathbb{R}^n$ класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (9.52), такой что*

$$\int\limits_D \Phi(K_f^{n-1}(x))\, dm(x) < \infty \tag{9.66}$$

*для неубывающей выпуклой функции $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$. Если*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \tag{9.67}$$

*для некоторого $\delta > \Phi(0)$, то $f$ продолжается до гомеоморфизма $D$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$.*

**Замечание 9.9.** Отметим, что по теореме 5.1 и замечанию 5.1 в [229] условие (9.67) не только достаточно, но и необходимо для устранимости изолированных особенностей $f$ с интегральным ограничением (9.66).

Отметим, что предложению 1.4 условие (9.67) эквивалентно каждому из условий (1.21)–(1.26) при $p = n-1$ и, в частности, следующему условию

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \log\, \Phi(t)\, \frac{dt}{t^{n'}} = +\infty \tag{9.68}$$

для некоторого $\delta > 0$, где $\frac{1}{n'} + \frac{1}{n} = 1$, т.е., $n' = 2$ для $n = 2$, $n'$ строго убывает по $n$, и $n' = n/(n-1) \to 1$ при $n \to \infty$.

Наконец, отметим, что все результаты в этом параграфе справедливы, в частности, если $f \in W^{1,p}_{\rm loc}$, $p > n-1$ и, в частности, если $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$ и $K_f \in L^q_{\rm loc}$, $q > n-1$, см., напр., следствие 8.9.

## 9.7. Устранение NED-множеств

Замкнутое множество $X \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, называется **нуль-множеством экстремальных длин**, сокр. **NED-множеством**, если

$$M\left(\Gamma(E,F,\mathbb{R}^n)\right) = M\left(\Gamma(E,F,\mathbb{R}^n\backslash X)\right) \tag{9.69}$$

для произвольных непересекающихся континуумов $E$ и $F \subset \mathbb{R}^n\backslash X$.

**Замечание 9.10.** Известно (см. [318]), что, если $X \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, является NED-множеством, то

$$|X| = 0 \tag{9.70}$$

и $X$ локально не разбивает $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$\dim X \leqslant n-2\,, \tag{9.71}$$

см., напр., теорему VII.3 в [206], а также работу [1]. Обратно, если множество $X \subset \mathbb{R}^n$ является замкнутым, и

$$H^{n-1}(X) = 0\,, \tag{9.72}$$

то $X$ является NED-множеством, см. [318].

Заметим также, что дополнение NED-множества в $\mathbb{R}^n$ является важным случаем QED-области.

Как и ранее, через $C(X,f)$ обозначаем **предельное множество** отображения $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ для множества $X \subset \overline{D}$,

$$C(X,f)\colon = \left\{y \in \overline{\mathbb{R}^n} : y = \lim_{k\to\infty} f(x_k),\ x_k \to x_0 \in X,\ x_k \in D\right\}. \tag{9.73}$$

Отметим, что для любого гомеоморфизма $f : D \to D'$ справедливо включение $C(\partial D, f) \subseteq \partial D'$, см., напр., предложение 13.5 в [252].

По теореме 8.5 получаем следующее утверждение, см. теорему 10.3 в [40] или теорему 9.10 в [252].

**Теорема 9.22.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $X$ – множество в $D$, и пусть $f : D \setminus \{X\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ – гомеоморфизм конечного искажения класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (9.52). Предположим, что $X$ и $C(X,f)$ –* NED-*множества. Если*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{||\,K_f||_{n-1}(x_0,r)} = \infty \qquad \forall\ x_0 \in X\,, \tag{9.74}$$

*где* $\delta(x_0) < \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$ *и*

$$\|\, K_f\|_{n-1}(x_0, r) = \left( \int\limits_{|\,x-x_0|=r} K_f^{n-1}(x)\, d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{9.75}$$

*то* $f$ *имеет гомеоморфное продолжение из* $D$ *в* $\overline{\mathbb{R}^n}$.

**Замечание 9.11.** В частности, заключение теоремы 9.22 выполнено, если $X$ – замкнутое множество с

$$H^{n-1}(X) = 0 = H^{n-1}(C(X, f))\,. \tag{9.76}$$

Более того, по предложению 5.2 получаем теорема 9.22 верна, если выполнено хотя бы одно из условий (9.55)–(9.65) для дилатации $K_f$ в каждой точке $x_0 \in X$.

Из предложения 5.2 получаем также следующее следствие теоремы 9.22.

**Теорема 9.23.** *Пусть* $D$ *– область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $X$ *–* NED*-множество в* $D$, *и пусть* $f : D \setminus \{X\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *– гомеоморфизм конечного искажения класса* $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ *с условием (9.52), такой что предельное множество* $C(X, f)$ *также является* NED*-множеством, и пусть*

$$\int\limits_D \Phi(K_f^{n-1}(x))\, dm(x) < \infty \tag{9.77}$$

*для неубывающей выпуклой функции* $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$. *Если*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \tag{9.78}$$

*для некоторого* $\delta > \Phi(0)$, *то* $f$ *имеет гомеоморфное продолжение из* $D$ *в* $\overline{\mathbb{R}^n}$.

# Глава 10. Сходимость и компактность отображений классов Соболева

Данная глава является продолжением исследований, начатых в главе 1, см. также работы [233], [279] и [283]. В главе 1 были заложены основы теории сходимости для общих пространственных гомеоморфизмов. Там же на этой основе была развита теория компактности для так называемых кольцевых $Q$-гомеоморфизмов, играющих важную роль в теории отображений и в теории уравнений Бельтрами, см., напр., по этому поводу монографии [188], [252] и статьи [227], [233]. В главе 10 приведены соответствующие теоремы сходимости и компактности для отображений классов Орлича–Соболева и, в частности, для гомеоморфизмов классов Соболева, основанные на упомянутой теории кольцевых $Q$-гомеоморфизмов.

## 10.1. Введение

В главе 8, было установлено следующее свойство, см. следствие 9.3 в [233]. Гомеоморфизмы, заданные в областях пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, классов Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, где непостоянные непрерывные неубывающие функции $\varphi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ при некоторых $t_* \in (t_0, \infty)$, $t_0 = \sup\limits_{\varphi(0)=0} t$, удовлетворяют условию типа Кальдерона:

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty\,, \tag{10.1}$$

в частности, классов Соболева $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$, см. замечание 8.1, являются кольцевыми $Q_*$-гомеоморфизмами в каждой точке $x_0 \in D$ с $Q_*(x) = [K_f(x)]^{n-1}$. Таким образом, сопоставляя этот результат с результатами по сходимости кольцевых $Q$-гомеоморфизмов в секции 1.4, приходим к соответствующим результатам о сходимости гомеоморфизмов классов Соболева, а также Орлича–Соболева.

В дальнейшем нами используются обозначения $\mathrm{I}$, $\bar{\mathrm{I}}$, $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}^+$, $\overline{\mathbb{R}^+}$ и $\overline{\mathbb{R}^n}$ для $[1,\infty)$, $[1,\infty]$, $(-\infty,\infty)$, $[-\infty,\infty]$, $[0,\infty)$, $[0,\infty]$ и $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, соответственно.

Как и ранее, $\mathrm{B}(x,r)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $r>0$, обозначает открытый шар с центром в $x$ и радиусом $r$, т.е. $\mathrm{B}(x,r)=\{z\in\mathbb{R}^n:\ |z-x|<r\ \}$, и $\mathbb{B}^n=\mathrm{B}(0,1)$.

## 10.2. Сходимости гомеоморфизмов классов Орлича–Соболева

**Лемма 10.1.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, и пусть $f_j$, $j=1,2,\ldots,$ – последовательность гомеоморфизмов $D$ в $\mathbb{R}^n$ класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (10.1), сходящихся локально равномерно к отображению $f$ относительно сферической метрики. Пусть*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} K_f^{n-1}(x)\cdot\psi^n(|x-x_0|)\,dm(x)=o(I^n(\varepsilon,\varepsilon_0))\qquad\forall\ x_0\in D,\tag{10.2}$$

*где $o(I^n(\varepsilon,\varepsilon_0))/I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ равномерно относительно параметра $j=1,2,\ldots$ для $\varepsilon_0<\operatorname{dist}(x_0,\partial D)$ и измеримая функция $\psi(t):(0,\varepsilon_0)\to[0,\infty]$ удовлетворяет условию*

$$0<I(\varepsilon,\varepsilon_0):=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt<\infty\qquad\forall\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0)\,.\tag{10.3}$$

*Тогда отображение $f$ является либо постоянной в $\overline{\mathbb{R}^n}$, либо гомеоморфизмом в $\mathbb{R}^n$.*

**Замечание 10.1.** В частности, заключение леммы 10.1 справедливо для гомеоморфизмов $f_j$ классов $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p>n-1$, если $K^{n-1}_{f_j}(x)\le Q(x)$ п.в. в $D$ с измеримой функцией $Q:D\to(0,\infty)$, такой что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x-x_0|)\,dm(x)=o(I^n(\varepsilon,\varepsilon_0))\qquad\forall\ x_0\in D\,.\tag{10.4}$$

**Теорема 10.1.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, $f_j$, $j=1,2,\ldots,$ – последовательность гомеоморфизмов из $D$ в $\mathbb{R}^n$ класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (10.1) и $K^{n-1}_{f_j}(x)\leqslant Q(x)$ п.в. в $D$, где $Q\in{\rm FMO}$. Если $f_j\to f$ локально равномерно, то отображение $f$ является либо постоянной в $\overline{\mathbb{R}^n}$, либо гомеоморфизмом в $\mathbb{R}^n$.*

**Следствие 10.1.** *В частности, предельное отображение $f$ является либо постоянной в $\overline{\mathbb{R}^n}$, либо гомеоморфизмом из области $D$ в пространство $\mathbb{R}^n$, как только*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \ \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\,dm(x) < \infty \qquad \forall\ x_0\in D\,,$$

*либо когда каждая точка $x_0\in D$ является точкой Лебега функции $Q\in L^1_{\rm loc}$.*

**Теорема 10.2.** *Пусть область $D$ в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, $Q: D\to \bar{\mathrm{I}}$ – локально интегрируемая функция такая, что для некоторого $\varepsilon(x_0)<\operatorname{dist}(x_0,\partial D)$,*

$$\int\limits_0^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} = \infty \qquad \forall\ x_0\in D\,, \tag{10.5}$$

*где $q_{x_0}(r)$ обозначает среднее интегральное значение функции $Q(x)$ по сфере $|x-x_0|=r$. Пусть $f_j$, $j=1,2,\ldots,$ – последовательность гомеоморфизмов $D$ на $\mathbb{R}^n$ класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, где функция $\varphi$ удовлетворяет условию (10.1) и $K^{n-1}_{f_j}(x)\leqslant Q(x)$ п.в. в $D$. Если $f_j\to f$ локально равномерно, то отображение $f$ является либо постоянной в $\overline{\mathbb{R}^n}$, либо гомеоморфизмом из области $D$ в $\mathbb{R}^n$.*

**Следствие 10.2.** *В частности, заключение теоремы 10.2 имеет место, если*

$$q_{x_0}(r) = O\left(\log^{n-1}\frac{1}{r}\right) \qquad \forall\ x_0\in D\,.$$

**Следствие 10.3.** *В условиях теоремы 10.2 предельное отображение $f$ является либо постоянной в $\overline{\mathbb{R}^n}$, либо гомеоморфизмом в $\mathbb{R}^n$ при условии, что функция $Q$ имеет конечное среднее колебание, либо особенности логарифмического типа порядка не более, чем $n-1$ в каждой точке $x_0\in D$.*

**Теорема 10.3.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, а функция $Q: D\to$ $\to\bar{\mathrm{I}}$ локально интегрируема и*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)}{|x-x_0|^n}\,dm(x) = o\left(\log^n\frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad \forall\ x_0\in D \tag{10.6}$$

*при* $\varepsilon \to 0$ *для некоторого положительного* $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. *Пусть* $f_j$, $j = 1, 2, \ldots,$ *– последовательность гомеоморфизмов* $D$ *в* $\mathbb{R}^n$ *класса* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, *где функция* $\varphi$ *удовлетворяет условию (10.1) и* $K^{n-1}_{f_j}(x) \leqslant \leqslant Q(x)$ *п.в. в* $D$. *Если* $f_j \to f$ *локально равномерно, то отображение* $f$ *является либо постоянным в* $\overline{\mathbb{R}^n}$, *либо гомеоморфизмом в* $\mathbb{R}^n$.

Для произвольной неубывающей функции $\Phi : \bar{\rm I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ **обратная функция** $\Phi^{-1} : \overline{\mathbb{R}^+} \to \bar{\rm I}$ может быть определена по правилу

$$\Phi^{-1}(\tau) = \inf_{\Phi(t)\geqslant\tau} t\,.$$

Как обычно, здесь inf считаем равным $\infty$, если множество тех $t$ в $\bar{\rm I}$, для которых $\Phi(t) \geqslant \tau$, является пустым. Заметим, что функция $\Phi^{-1}$ также не убывает. Отметим, что если $h : \bar{\rm I} \to \bar{\rm I}$ – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм и $\varphi : \bar{\rm I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – неубывающая функция, то

$$(\varphi \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ \varphi^{-1}\,. \tag{10.7}$$

**Теорема 10.4.** *Пусть* $D$ *– область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $Q : D \to \bar{\rm I}$ *– измеримая функция и* $\Phi : \bar{\rm I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *– неубывающая выпуклая функция. Предположим, что*

$$\int\limits_D \Phi\left(Q(x)\right) \frac{dm(x)}{\left(1+|x|^2\right)^n} \leqslant M < \infty \tag{10.8}$$

*и для некоторого* $\delta > \Phi(1)$

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty\,. \tag{10.9}$$

*Далее, пусть* $f_j$, $j = 1, 2, \ldots,$ *– последовательность гомеоморфизмов из* $D$ *в* $\mathbb{R}^n$ *класса* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ *с условием (10.1) и* $K^{n-1}_{f_j}(x) \leqslant Q(x)$ *п.в. в* $D$. *Если* $f_j \to f$ *локально равномерно, то отображение* $f$ *является либо постоянным в* $\overline{\mathbb{R}^n}$, *либо гомеоморфизмом из* $D$ *в* $\mathbb{R}^n$.

**Замечание 10.2.** В условиях теоремы 10.4 можно считать, что функция $\Phi(t)$ является выпуклой не на всем отрезке $\bar{\rm I}$, а лишь на отрезке $[t_*, \infty]$ где $t_* = \Phi^{-1}(\delta)$. Действительно, каждая неубывающая функция $\Phi : \bar{\rm I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$, выпуклая на отрезке $[t_*, \infty]$, может быть заменена неубывающей выпуклой функцией $\Phi_* : \bar{\rm I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$, минорирующей функцию $\Phi$ следующим образом. Пусть $\Phi_*(t) \equiv 0$ при $t \in [1, t_*]$, $\Phi(t) = \varphi(t)$ при

$t \in [t_*, T_*]$ и $\Phi_* \equiv \Phi(t)$ при $t \in [T_*, \infty]$, где $\tau = \varphi(t)$ – прямая, проходящая через точку $(0, t_*)$ и касающаяся графика функции $\tau = \Phi(t)$ в точке $(T_*, \Phi(T_*))$, $T_* \in (t_*, \infty)$. По построению получаем, что $\Phi_*(t) \leqslant \Phi(t)$ при всех $T \in \overline{\mathrm{I}}$ и $\Phi_*(t) = \Phi(t)$ для всех $t \geqslant T_*$ и, следовательно, условия (10.8) и (10.9) справедливы для $\Phi_*$ при том же $M$ и каждого $\delta > 0$.

Более того, в теореме 10.4 можно предполагать, что функция $\Phi$ минорируется неубывающей выпуклой функцией $\Psi$ на отрезке $[T, \infty]$, такой что при некотором $T \in \mathrm{I}$ и $\delta > \Psi(T)$ выполнено условие

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \left[\Psi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \,. \tag{10.10}$$

Отметим, что условие (10.10) может быть записано в терминах функции $\psi(t) = \log \Psi(t)$:

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty} \psi(t)\ \frac{dt}{t^{n'}} = \infty \tag{10.11}$$

при некотором $\Delta > t_0 \in [T, \infty]$, где $t_0 := \sup\limits_{\psi(t) = -\infty} t$, $t_0 = T$, если $\psi(T) > > -\infty$ и $\frac{1}{n'} + \frac{1}{n} = 1$; т.е. $n' = 2$ для $n = 2$, $n'$ убывает по $n$ и $n' = n/(n-1) \to \to 1$ при $n \to \infty$, см. предложение 2.3 в [282]. Ясно, что если функция $\psi$ не убывает и выпукла, то функция $\Phi = e^{\psi}$ также неубывает и выпукла, однако, обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Тем не менее, заключение теоремы 10.4 справедливо, если $\psi^m(t)$, $t \in [T, \infty]$, выпукла и соотношение (10.11) выполнено для функции $\psi^m$ при некотором $m \in \mathbb{N}$, поскольку $e^{\tau} \geqslant \tau^m / m!$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

Заметим, что функция $\psi(t) = \alpha t^{\frac{1}{n-1}}$ при $\alpha \in (0, \infty)$ удовлетворяет соотношению (10.11), а функция $e^{\alpha t^{\frac{1}{n-1}}}$ выпукла на отрезке $[T, \infty]$ при $T \geqslant \left[\frac{n-2}{\alpha}\right]^{n-1}$, см., напр., 1.4.4 в [141].

**Следствие 10.4.** *В частности, заключение теоремы 10.4 справедливо, если для некоторого $\alpha > 0$ выполнено неравенство*

$$\int\limits_{D} e^{\alpha Q^{\frac{1}{n-1}}(x)} \frac{dm(x)}{\left(1 + |x|^2\right)^n} \leqslant M < \infty \,. \tag{10.12}$$

*Аналогичное заключение справедливо для произвольной функции $\Phi = e^{\psi}$, где $\psi(t)$ конечное произведение функции $\alpha t^{\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta \geqslant 1/(n-1)$, и некоторых функций вида $[\log(A_1 + t)]^{\alpha_1}$, $[\log\log(A_2 + t)]^{\alpha_2}$, … , $\alpha_m \geqslant -1$,*

*$A_m \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in [T, \infty]$, $\psi(t) \equiv \psi(T)$, $t \in [1, T]$ для достаточно большого $T \in \mathrm{I}$.*

**Замечание 10.3.** Как следует из леммы 10.1, заключения приведенных выше теорем о сходимости кольцевых $Q$-гомеоморфизмов $f_j$ остаются справедливыми для кольцевых $Q_j$−гомеоморфизмов $f_j$, если хотя бы одно из условий на $Q = Q_j$ в теоремах 10.1–10.4 и следствия 10.1–10.3 выполнено равномерно по параметру $j = 1, 2, \ldots$. Таким образом, заменяя приведенные выше условия на функцию $Q$ на соответствующие условия на функцию $K_{f_j}^{n-1}$, равномерные по параметру $j$, мы получаем более общие теоремы сходимости соболевских гомеоморфизмов без какой-либо поточечной мажоранты $Q(x)$ для $K_{f_j}^{n-1}(x)$. Ниже мы приводим некоторые из этих результатов в явной форме.

**Теорема 10.5.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, и пусть $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – неубывающая выпуклая функция, удовлетворяющая условию (10.9). Предположим, что $f_j$, $j = 1, 2, \ldots,$ – последовательность гомеоморфизмов из области $D$ в пространство $\mathbb{R}^n$ класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$, где $\varphi$ удовлетворяет условию (10.1), таких что*

$$\int\limits_D \Phi(K_{f_j}^{n-1}(x))\ \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \leqslant M < \infty \qquad \forall\ j = 1, 2, \ldots\,. \tag{10.13}$$

*Если $f_j \to f$ локально равномерно, то $f$ является либо постоянным в $\overline{\mathbb{R}^n}$, либо гомеоморфизмом в $\mathbb{R}^n$.*

Комментарии, сделанные в замечании 10.2 по поводу условия выпуклости функции $\Phi$ и ее миноранты в теореме 10.4, остаются в силе и по отношению к теореме 10.5. Таким образом, справедливо следующее заключение.

**Следствие 10.5.** *В частности, заключение теоремы 10.5 имеет место, если для некоторого $\alpha > 0$ выполнено условие*

$$\int\limits_D e^{\alpha K_f(x)} \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \leqslant M < \infty\,. \tag{10.14}$$

*Аналогичное заключение верно и для любой функции $\Phi = e^{\psi}$, где $\psi(t)$ – конечное произведение функции $\alpha t^{\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta \geqslant 1/(n-1)$, и некоторых функций вида $[\log(A_1 + t)]^{\alpha_1}$, $[\log\log(A_2 + t)]^{\alpha_2}$, $\ldots$ , $\alpha_m \geqslant -1$, $A_m \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in [T, \infty]$, $\psi(t) \equiv \psi(T)$, $t \in [1, T]$, где $T \in \mathrm{I}$ достаточно велико.*

**Замечание 10.4.** Заметим, что интегральные условия (10.13) и (10.8) на функции $K_f$ и $\Phi$ могут быть переписаны в других формах, которые иногда более удобны. А именно, из соотношения (10.7) при $h(t) = t^{\frac{1}{n-1}}$ и $\varphi(t) = \Phi(t^{n-1})$, $\Phi = \varphi \circ h$, следует, что пара условий (10.13) и (10.9) эквивалентна условиям

$$\int\limits_{D} \varphi(K_{f_j}(x))\,\frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \leqslant M < \infty \qquad \forall\, j = 1, 2, \ldots \tag{10.15}$$

и

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\varphi^{-1}(\tau)} = \infty \tag{10.16}$$

для некоторого $\delta > \varphi(1)$. Кроме того, по теореме 2.1 в [291] условия (10.15) и (10.16) при $\varphi = e^{\psi}$, в свою очередь, эквивалентны следующим условиям:

$$\int\limits_{D} e^{\psi(K_{f_j}(x))}\frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \leqslant M < \infty \qquad \forall\, j = 1, 2, \ldots \tag{10.17}$$

и

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty} \psi(t)\,\frac{dt}{t^2} = \infty \tag{10.18}$$

для некоторого $\Delta > t_0$, где $t_0 := \sup\limits_{\psi(t)=-\infty} t$, $t_0 = 1$ если $\psi(1) > -\infty$.

## 10.3. Нормальные семейства гомеоморфизмов

Ниже приведены некоторые критерии нормальности семейств гомеоморфизмов классов Орлича–Соболева.

Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, и пусть $\varphi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – непостоянная непрерывная неубывающая функция, $Q : D \to \bar{\mathrm{I}}$ – измеримая функция. Обозначим через $\mathcal{O}^{\varphi}_{Q,\Delta}$ семейство гомеоморфизмов $f$ класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$, таких что $K^{n-1}_f(x) \leqslant Q(x)$ п.в. и $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)\right) \geqslant \Delta > 0$. Кроме того, обозначим через $\mathcal{S}^p_{Q,\Delta}$ – класс $\mathcal{O}^{\varphi}_{Q,\Delta}$ с $\varphi(t) = t^p$, $p \geqslant 1$. Наконец, пусть $\mathcal{S}_{Q,\Delta}$ – семейство всех гомеоморфизмов $f$ области $D$ в $\mathbb{R}^n$ класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, таких что $K^{n-1}_f(x) \leqslant Q(x)$ п.в. и $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)\right) \geqslant \Delta > 0$. Здесь и далее через $h(A)$ будем обозначать сферический (хордальный) диаметр множества $A$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$.

**Лемма 10.2.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $\Delta > 0$ и $Q : D \to \bar{\mathrm{I}}$ – измеримая функция, удовлетворяющая условию (10.4). Тогда классы $\mathcal{O}^{\varphi}_{Q,\Delta}$, $\mathcal{S}^{p}_{Q,\Delta}$ и $\mathcal{S}_{Q,\Delta}$ образуют нормальные семейства отображений при условии, что функция $\varphi$ удовлетворяет соотношению (10.1), либо, соответственно, $p > n-1$ и $Q \in L^{\gamma}_{\mathrm{loc}}$, $\gamma > 1$.*

**Замечание 10.5.** Лемма 10.2 следует непосредственно из леммы 1.7 для $Q$-гомеоморфизмов. В частности, заключение леммы 10.2 выполнено при условии на функцию $Q$ из теорем 10.1–10.4 и следствий 10.1–10.3, см., напр., соответствующие критерии нормальности в работе [233]. По этому поводу, см. также параграф 1.4, где указаны взаимосвязи различных условий на функцию $Q$ с условием (10.4).

Кроме того, как следует из замечания 6.1 работы [283], заключения о равностепенной непрерывности и нормальности семейств кольцевых $Q$-гомеоморфизмов выполнены для переменных функций $Q$, однако, лишь в том случае, когда соответствующие условия на функцию $Q$ из леммы 10.1, теорем 10.1–10.4 и следствий 10.1–10.3 выполнены равномерно. Таким образом, заменяя упомянутые выше условия на функцию $Q$ соответствующими равномерными условиями на функцию $K_f^{n-1}$, получаем более широкий круг результатов о нормальности семейств гомеоморфизмов классов Соболева без какой-либо поточечной мажоранты $Q$ для $K_f^{n-1}$. Некоторые из подобных результатов в явной форме приведены ниже.

Пусть $\Phi : \bar{\mathrm{I}} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – неубывающая выпуклая функция. Для заданных чисел $\Delta \in (0,1)$ и $M \in (0,\infty)$ обозначим через $\mathcal{O}^{\varphi}_{\Phi}$ семейство всех гомеоморфизмов $f$ из области $D$ в $\mathbb{R}^n$ класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ таких, что $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)\right) \geqslant \Delta$ и

$$\int\limits_D \Phi(K_f^{n-1}(x))\ \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \leqslant M\,. \tag{10.19}$$

Далее, пусть $\mathcal{S}^{p}_{\Phi}$ – класс $\mathcal{O}^{\varphi}_{\Phi}$, где $\varphi(t) = t^p$, $p \geqslant 1$.

Кроме того, пусть $\mathcal{S}^{*}_{\Phi,\alpha}$, $\alpha \geqslant 1$, – семейство всех гомеоморфизмов $f$ из области $D$ в $\mathbb{R}^n$ класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ таких что $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)\right) \geqslant \Delta$ и

$$\int\limits_D \Phi(K_f^{\alpha}(x))\ \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \leqslant M\,. \tag{10.20}$$

Наконец, для заданной неубывающей функции $\psi : \bar{\mathrm{I}} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ такой, что при некоторых $m \in \mathbb{N}$ и $T \in \mathrm{I}$ функция $\psi^m\left(t^{\frac{1}{n-1}}\right)$ является выпуклой на отрезке $[T,\infty]$, обозначим через $\mathcal{S}_*^{\psi}$ семейство всех гомеоморфизмов $f$ из области $D$ в $\mathbb{R}^n$ класса Соболева $W_{\rm loc}^{1,1}$ таких, что $h\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(D)\right)\geqslant\Delta$ и

$$\int\limits_D e^{\psi(K_f(x))}\ \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n}\leqslant M\,. \tag{10.21}$$

Применяя к классу $\mathcal{S}_*^{\psi}$ замечание 1.8 (см. также замечание 6.1 из работы [283]), а также замечание 10.2, получаем следующее утверждение.

**Лемма 10.3.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$. Тогда классы $\mathcal{O}_{\Phi}^{\varphi}$ и $\mathcal{S}_*^{\psi}$, $\mathcal{S}_{\Phi}^{p}$ и $\mathcal{S}_{\Phi,\alpha}^{*}$ являются нормальными, если $\varphi$, $\Phi$ и $\psi$ удовлетворяют условиям (10.1), (10.9) и (10.18), соответственно, $p>n-1$ и*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{\alpha}}}=\infty\,,\quad \delta>\Phi(1)\,,\quad \alpha>n-1\,. \tag{10.22}$$

## 10.4. Классы Орлича–Соболева и интеграл Дирихле

В данном разделе будут приведены теоремы о принадлежности обратных отображений к классу гомеоморфизмов с ограниченным интегралом Дирихле, а также о равностепенной непрерывность и нормальности семейств обратных отображений.

Приведем необходимые сведения из теории отображений с ограниченным интегралом Дирихле. Следующее определение может быть найдено в § 2 гл. IV в [104]. Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$. Будем говорить, что непрерывное отображение $f:D\to\mathbb{R}^n$ принадлежит классу $BL_k^{n/2}$ в $D$, если $f\in W_{\rm loc}^{1,1}$ и

$$J(f,D)=\int\limits_D\left[\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2\right]^{n/2}dm(x)\leqslant k<\infty\,. \tag{10.23}$$

При этом, будем говорить, что $f\in BL^{n/2}$, если найдётся $k<\infty$, такое что $f\in BL_k^{n/2}$. Напомним, что **колебанием отображения** $f:D\to\mathbb{R}^n$ **на множестве** $E\subset D$ называется величина

$$\omega(E,f)=\sup\limits_{x_1,x_2\in E}|f(x_1)-f(x_2)|\,.$$

Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется **монотонным**, если для всякой области $G \subset D$ такой, что $\overline{G} \subset D$ выполнено условие $\omega(G, f) = \omega(\partial G, f)$. Отметим, что, в частности, каждый гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$ является монотонным отображением. Следующие определения могут быть найдены в монографии [2] (см. §, 1, с. 518 и § 3, с. 539). Сечение фиксированной сферы $S(a, r)$ в $\mathbb{R}^n$ всякой гиперплоскостью, не проходящей через её центр, будем называть **малой окружностью**. Очевидно, произвольная малая окружность разделяет сферу на две компоненты; та из них, которая не выходит за пределы полусферы, называется **сферическим кругом**. Пусть $K$ – сферический круг. Заметим, что существует единственная точка $O \in K$, называемая **центром сферического круга**, обладающая следующим свойством: длины дуг, соединяющих точку $O$ с произвольной точкой сферы вдоль сферы $S(a, r)$, постоянны. Эту длину дуги называют **сферическим радиусом круга** $K$.

Следующее утверждение доказано в монографии [104] (см. следствие в § 2 гл. IV, с. 120).

**Предложение 10.1.** *Пусть отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $BL^{n/2}$. Предположим, что найдутся $0 < r_1 < r_2$, такие что множество $S(a, r) \cap D$ не пусто при всех $r \in [r_1, r_2]$. Обозначим через $K_r$ открытый сферический круг сферического радиуса $R(r) \leqslant \frac{\pi r}{2}$, $K_r \subset S(a, r) \cap D$. Пусть почти всюду на $[r_1, r_2]$ определены измеримые функции $\Omega(r) \leqslant \omega(K_r, f)$ и $\alpha(r) > \frac{2R(r)}{\pi r}$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся $\overline{r} \in [r_1, r_2]$, для которого*

$$\Omega(\overline{r}) \leqslant (\alpha(\overline{r})(M_n + \varepsilon)J(f, D_{r_1,r_2}))^{1/n} \cdot \log^{-1/n}\left(\frac{r_2}{r_1}\right),$$

*где* $D_{r_1,r_2} := \bigcup\limits_{r\in[r_1,r_2]} S(a, r) \cap D$.

Следующая оценка искажения расстояния в классе $\in BL^{n/2}$ была опубликована в монографии [104] при $n = 3$. Мы приводим здесь полное доказательство этой оценки в случае произвольного $n \geqslant 2$, поскольку доказательство в [104] содержало неточности.

**Предложение 10.2.** *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ – монотонное отображение, принадлежащее классу $BL^{n/2}$, точки $x'$ и $x'' \in D$ удовлетворяют условию $|x'-x''| < 2$ и, кроме того, шар $B\left(\frac{x'+x''}{2}, \sqrt{\frac{|x'-x''|}{2}}\right)$ содержится в $D$ вместе со своим замыканием. Тогда*

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant (2M_nJ(f, D))^{1/n} \log^{-1/n} \frac{2}{|x' - x''|}\,, \tag{10.24}$$

*где $J(f, D)$ задаётся соотношением (10.23), а $M_n$ – некоторая постоянная, зависящая только от $n$.*

**Доказательство.** Полагаем $x_0 := \frac{1}{2}(x' + x'')$, $r := \frac{1}{2}|x' - x''|$, $r_0 := \sqrt{r}$ и рассмотрим сферу $S(x_0, t)$, $t \in [r, r_0]$. Поскольку $f$ непрерывно, а $S(x_0, t)$ – компакт в $\mathbb{R}^n$, найдутся точки $a, b \in S(x_0, t)$, для которых $\omega(S(x_0, t), f) = |f(a) - f(b)|$. Пусть $K_t$ – сферический круг радиуса $R \leqslant \pi t/2$, такой что $a$ и $b \in \overline{K_t}$. Тогда $\omega(S(x_0, t), f) \leqslant \omega(K_t, f)$ ввиду непрерывности $f$ и по предложению 10.1 для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся $\overline{r} \in [r, r_0]$ такое, что

$$\omega(S(x_0, \overline{r}), f) \leqslant [\alpha(\overline{r})(2(M_n + \varepsilon))J(f, D)]^{1/n} \cdot \log^{-1/n}\left(\frac{2}{|x' - x''|}\right), \quad (10.25)$$

где $M_n$ – некоторая постоянная. Поскольку отображение $f$ монотонно,

$$\omega(\overline{B(x_0, r)}, f) \leqslant \omega(B(x_0, \overline{r}), f) = \omega(S(x_0, \overline{r}), f)\,. \qquad (10.26)$$

Заметим, что $x'$, $x'' \in \overline{B(x_0, r)}$, и поэтому

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant \omega(\overline{B(x_0, r)}, f)\,. \qquad (10.27)$$

Таким образом, из соотношений (10.25)–(10.27) и произвольности $\varepsilon > 0$ в (10.25) получаем неравенство (10.24). $\square$

Используемое ниже определение аппроксимативного дифференциала отображения $f$ можно найти, напр., в разд. 3.1.2 в [108]. Пусть $A$ – невырожденная $(n \times n)$–матрица. Тогда её **присоединённая матрица** (обозначаемая символом $\mathrm{adj}\, A$) определяется из соотношения $A \cdot \mathrm{adj}\, A = I \det A$, т.е. $\mathrm{adj}\, A = A^{-1} \det A$.

Напомним, что **внутренней дилатацией** отображения $f$ в точке $x$ называется величина

$$K_I(x, f) = \frac{|J_f(x)|}{l\,(f'(x))^n}\,,$$

где $l\,(f'(x)) = \min\limits_{h \in \mathbb{R}^n, |h|=1} |f'(x)h|$, если $J_f(x) \neq 0$; $K_I(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$; $K_I(x, f) = \infty$ в остальных точках.

Напомним также, что **внешней дилатацией** отображения $f$ в точке $x$ называется величина

$$K_O(x, f) = \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x, f)|}\,,$$

если $J(x,f)\neq 0$; $K_O(x,f)=1$, если $f'(x)=0$; и $K_O(x,f)=\infty$ в остальных точках.

Одним из главных результатов настоящего раздела является следующая теорема.

**Теорема 10.6.** *Пусть $f\,:\,D\to D'$ – гомеоморфизм класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием типа Кальдерона (10.1) такой, что $K_O(x,f)\in L^{n-1}_{\rm loc}$. Тогда отображение $g:=f^{-1}$ принадлежит классу $W^{1,n}_{\rm loc}$ и*

$$\int\limits_{D'}\|g'(y)\|^n dm(y)=\int\limits_{D}K_I(x,f)dm(x)\,. \tag{10.28}$$

**Доказательство.** По теореме 1.2 в [224] отображение $f$ обладает $N^{-1}$-свойством. Так как по теореме 8.1 отображение $f$ дифференцируемо почти всюду, то по теореме 1 в [71] $J_f(x)\neq 0$ при почти всех $x\in D$. Заметим, что в каждой точке $x_0$ дифференцируемости отображения $f$ с $J_f(x_0)\neq 0$ выполнено неравенство

$$\|{\rm adj}\,f'(x_0)\|\leqslant\|f'(x)\|^{n-1} \tag{10.29}$$

(см. п. 2.1 § 1 гл. I в [77], с. 21). Далее, по неравенству Гёльдера

$$\|\partial_i f\|_{L_{n-1}(C)}\leqslant\|K_f\|^{\frac{1}{n}}_{L_{n-1}(C)}\cdot(m(f(C)))^{\frac{1}{n}}<\infty\,, \tag{10.30}$$

где $C$ – произвольный компакт в области $D$. Из (10.29) и (10.30) следует, что $\|{\rm adj}\,f'(x)\|\in L^1_{\rm loc}$. Кроме того, по теореме 8.3 отображение $f$ обладает $N$-свойством на почти всех гиперплоскостях. Следовательно, $f^{-1}\in W^{1,1}_{\rm loc}(f(D))$ по теореме 1 в [13]. Теперь, для того, чтобы показать включение $f^{-1}\in W^{1,n}(D')$, нам достаточно проверить, что $\|g'(y)\|^n\in L^1(D)$, т.е., что $\int\limits_{D'}\|g'(y)\|^n\,dm(y)<\infty$, где $g:=f^{-1}$ (см. теорему 2 разд. 1.1.3 в [63]).

Поскольку, как было установлено, $g\in W^{1,1}_{\rm loc}(D')$, при почти всех $y\in D'$ отображение $g$ имеет обычные частные производные (см. теорему 1 разд. 1.1.3 в [63]), вследствие чего $f$ почти всюду аппроксимативно дифференцируемо (см. теорему 3.1.4 в [108]). Так как $g$ является отображением с конечным искажением (см. теорему 1 в [13]), якобиева матрица $g'(y)$ нулевая при почти всех $y$ таких, что $J_g(y)=0$; таким образом, $\|g'(y)\|^n=K_g(y)\cdot J_g(y)$ при почти всех $y\in D'$ (согласно теории интеграла $0\cdot\infty=0$, см. § 3 гл. I в [88]).

Обозначим через $B$ (борелево) множество всех точек $y\in D'$, где отображение $g$ имеет обычные частные производные и $J_g(y)=\det g'(y)\neq$

$\neq 0$. По теореме 3.1.8 в [108] множество $B$ может быть разбито на не более чем счётное число борелевских множеств $B_l$, $l = 1, 2, \dots$, таких что отображение $g_l = g|_{B_l}$ является липшицевым. По теореме Кирсбрауна, см. теорему 2.10.43 в [108], каждое отображение $g_l$ может быть продолжено до липшицевского отображения $\widetilde{g_l} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, при этом по теореме Радемахера–Степанова $\widetilde{g_l}$ дифференцируемо почти всюду в $\mathbb{R}^n$ (см. теорему 3.1.6 в [108]) и, в силу единственности аппроксимативного дифференциала (см. разд. 3.1.2 в [108]), можно считать, что при всех $y \in B_l$ выполнено равенство $\widetilde{g_l}'(y) = g'(y)$. Также можно считать, что $\widetilde{g_l}$ – однолистные (взаимно однозначные) на $B_l$ (см., напр., лемму 3.2.2 в [108]) и что множества $B_l$ попарно не пересекаются.

Применяя теорему 3.2.5 в [108] на $B_l$, $l = 1, 2, \dots$, суммируя по всем $B_l$, учитывая $N^{-1}$-свойство отображения $f$, получаем

$$\int\limits_{D'} \|g'(y)\|^n \, dm(y) = \int\limits_{D'} K_g(y) \cdot J_g(y) \, dm(y) =$$

$$= \int\limits_{D'} K_g(g^{-1}(g(y))) \cdot J_g(y) \, dm(y) = \int\limits_{f^{-1}(D')} K_g\left(g^{-1}(x)\right) \, dm(x) \,. \qquad (10.31)$$

Отметим, что согласно введённым обозначениям $g'(g^{-1}(x)) = g'(f(x))$ и по теореме 4 гл. VIII § 3 в [33] $g'(f(x)) = (f'(x))^{-1}$ в каждой точке $x$ дифференцируемости и невырожденности отображения $f$. Значит, при почти всех $x \in D$.

$$\|g'\left(f(x)\right)\| = \frac{1}{l\left(f'(x)\right)} \,, \qquad J_g\left(f(x)\right) = \frac{1}{J_f(x)} \qquad (10.32)$$

(см. снова теорему 2.1 и соотношения (2.4)–(2.7) п. 2.1 § 1 гл. I в [77]). Таким образом, из (10.31) и (10.32) получаем (10.28). □

**Следствие 10.6.** *При условиях теоремы 10.6*

$$\int\limits_{D'} \|g'(y)\|^n dm(y) \leqslant \int\limits_{D} K_O^{n-1}(x, f) \, dm(x) \,. \qquad (10.33)$$

Доказательство вытекает из теоремы 10.6 и хорошо известного неравенства $K_I(x, f) \leqslant K_O^{n-1}(x, f)$ в произвольной точке $x \in D$ дифференцируемости отображения $f$ с $J_f(x) \neq 0$, см. п. 2.1 гл. I в [77]. □

**Следствие 10.7.** *В частности, равенство (10.28) и неравенство (10.33) имеют место, если $f \in W^{1,p}_{\rm loc}$ с некоторым $p > n-1$.*

**Доказательство.** Для справедливости заключения следствия 10.7 достаточно выбрать в теореме 10.6 и следствии 10.6 функцию $\varphi(t) = t^p$, $p > n-1$. $\Box$

Для произвольных областей $D \subset \mathbb{R}^n$ и $D' \subset \mathbb{R}^n$ обозначим символом $\mathcal{O}^{\varphi}_Q(D, D')$ семейство всех гомеоморфизмов $f : D \to D'$, $f(D) = D'$, с конечным искажением класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, таких что и $K_I(x, f) \leqslant Q(x)$ почти всюду.

Заметим, что при почти всех $x \in D$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}\right)^2\right]^{n/2} \leqslant n^{n/2}\cdot \|g'(y)\|^n\,, \tag{10.34}$$

поэтому из (10.28) вытекает следующее утверждение.

**Следствие 10.8.** *Пусть гомеоморфизм с конечным искажением $f \in \mathcal{O}^{\varphi}_Q(D, D')$, при этом выполнено условие Кальдерона (**??**) и, кроме того, $Q \in L^1(D)$. Тогда отображение $g := f^{-1}$ принадлежит классу $BL^{n/2}$ в $D'$ и*

$$\int\limits_{D'}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y)\right)^2\right]^{n/2} dm(y) \leqslant C(D, Q, n) < \infty\,,$$

*где постоянная $C(D, Q, n)$ зависит только от размерности пространства $n$ и $L^1$-нормы функции $Q$ в $D$. Более того, для любой точки $y_0 \in D'$ найдётся $\delta > 0$, $\delta < {\rm dist}\,(y_0, D')$, такое что для всех $x'$, $x'' \in B(y_0, \delta)$ и отображений $g$ таких, что $g^{-1} = f \in \mathcal{O}^{\varphi}_Q(D, D')$, выполнено неравенство*

$$|g(x') - g(x'')| \leqslant C_0(D, Q, n)\log^{-1/n}\frac{2}{|x'-x''|}\,, \tag{10.35}$$

*где постоянная $C_0(D, Q, n)$ зависит только от $n$ и $L^1$-нормы $Q$ в $D$.*

**Доказательство.** Из неравенств (10.28) и (10.34) вытекает, что

$$\int\limits_{D'}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}\right)^2\right]^{n/2} dm(y) \leqslant n^{n/2}\cdot\int\limits_{D} Q(x)\,dm(x) < \infty\,. \tag{10.36}$$

Значит, $g := f^{-1} \in BL^{n/2}(D')$. Соотношение (10.35), выполненное с некоторой постоянной $C_0(D, Q, n) < \infty$ (зависящей только от размерности пространства $n$ и $L^1$-нормы функции $Q$ в $D$), следует из (10.36) на основе предложения 10.2. $\square$

Из оценки (10.35) вытекает следующее важное

**Следствие 10.9.** *В условиях следствия 10.8 семейство всех отображений $g = f^{-1}$ таких, что $f \in \mathcal{O}^{\varphi}_{Q,}(D, D')$, образует равностепенно непрерывное, а, следовательно, и нормальное семейство отображений.*

## 10.5. Основная лемма

Следующая лемма была доказана ранее для отображений с ограниченным искажением в работе [186], лемма 4.7, а также для отображений с конечным искажением длины в монографии [252], лемма 8.6.

**Лемма 10.4.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и пусть $f_j$, $j = 1, 2, \ldots,$ – последовательность гомеоморфизмов из области $D$ в $\mathbb{R}^n$ класса $W^{1,1}_{\rm loc}$, сходящаяся локально равномерно к отображению $f : D \to \mathbb{R}^n$. Тогда*

$$P_f(x_0) \leqslant \liminf_{h\to 0}\ \liminf_{j\to\infty} \frac{1}{h^n} \int\limits_{C(x_0,h)} P_{f_j}(y)\, dm(y) \tag{10.37}$$

*в каждой точке $x_0$ дифференцируемости отображения $f$, где $C(x_0, h)$ – куб в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $x_0$, чьи ребра длины $h$ ориентированы вдоль главных осей квадратичной формы $(f'(x_0)z, f'(x_0)z)$.*

Здесь мы используем дилатацию $P_f$, определенную в (8.5).

**Доказательство.** Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$, $f(0) = 0$, и $f_j(0) = 0$, $j = 1, 2, \ldots$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$, образованный собственными векторами линейного преобразования $f'(0)^* f'(0)$. Заметим, что множество $f'(0)\mathbb{B}^n$ является эллипсоидом, чьи полуоси $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ есть неотрицательные квадратные корни соответствующих собственных значений матрицы $f'(0)^* f'(0)$. Мы можем предполагать, что $f'(0) \neq 0$, т.е., $\lambda_n > 0$, поскольку в противном случае $P_f(0) = 1$ и неравенство (10.37) очевидно. Пусть также $C(h) \colon = C(0; h)$.

В силу того, что $f$ является дифференцируемым в точке 0, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое что

$$|f(y) - f'(0)y| < h\varepsilon$$

для всех $h \in (0, \delta)$ и $y \in C(h)$. Кроме того, поскольку $f_j \to f$ локально равномерно, имеем для всех $y \in C(h)$, что

$$|f_j(y) - f'(0)y| < h\varepsilon \tag{10.38}$$

при $j > j_0$. Множество $f'(0)C(h)$ является прямоугольным параллелепипедом

$$(-\lambda_1 h/2, \lambda_1 h/2) \times \cdots \times (-\lambda_n h/2, \lambda_n h/2),$$

который может вырождаться, если $\lambda_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$, $0 < k < n$, чьи ребра ориентированы вдоль базисных векторов $\tilde{e}_{k+1}, \ldots, \tilde{e}_n$ в $\mathbb{R}^n$,

$$\tilde{e}_i = \frac{f'(0)e_i}{|f'(0)e_i|}, \quad i = k+1, \ldots, n,$$

и некоторых векторов $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_k$, которые образуют ортонормированный базис ортогонального дополнения к $(n-k)$-мерному подпространству пространства $\mathbb{R}^n$, порожденного векторами $\tilde{e}_{k+1}, \ldots, \tilde{e}_n$. Из неравенства (10.38) следует, что все точки $f_j(y)$, $y \in C(h)$, лежат в параллелепипеде

$$\left(-\left(\frac{\lambda_1}{2} + \varepsilon\right)h,\ \left(\frac{\lambda_1}{2} + \varepsilon\right)h\right) \times \cdots \times \left(-\left(\frac{\lambda_n}{2} + \varepsilon\right)h,\ \left(\frac{\lambda_n}{2} + \varepsilon\right)h\right).$$

Здесь пространство $\mathbb{R}^n$ снабжено базисом $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$. Таким образом,

$$\mathrm{mes}(f_j(C(h))) \leqslant h^n(\lambda_1 + 2\varepsilon)(\lambda_2 + 2\varepsilon)\cdots(\lambda_n + 2\varepsilon). \tag{10.39}$$

Из (10.39) следует неравенство

$$\int\limits_{C(h)} |J_{f_j}(y)|\, dm(y) \leqslant \mathrm{mes}(f_j(C(h))) \leqslant h^n(|J_f(0)| + \triangle(\varepsilon)), \tag{10.40}$$

где $\triangle(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, поскольку $J_f(0) = \lambda_1\lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

Рассмотрим $(n-1)$-мерный куб $C^*(h)$ с центром в точке $x = 0$ и ребрами длины $h$, ориентированными вдоль векторов $e_1, \ldots, e_{n-1}$. Рассмотрим отрезок $l(z)$, $z \in C^*(h)$, перпендикулярный к $C^*(h)$, лежащий внутри $C(h)$. Обозначим через $l_j(z)$ длину кривой $f_j(l(z))$. Поскольку $f_j \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, по теореме 1 раздела 1.1.3 и теореме раздела 1.1.7 работы [257] отображение $f_j$ является абсолютно непрерывным на $l(z)$ для п.в. $z \in C^*(h)$. Следовательно, по теореме 1.3 из [320] получаем, что

$$l_j(z) = \int\limits_{-h/2}^{h/2} |f_j'(z, y_n)e_n|\, dy_n \tag{10.41}$$

для п.в. $z \in C^*(h)$ относительно $(n-1)$-мерной меры Лебега. С другой стороны, соотношение (10.38) влечет, что

$$l_j(z) \geqslant (|f'(0)e_n| - 2\varepsilon)h = (\lambda_n - 2\varepsilon)h.$$

Поэтому из (10.41) вытекает оценка

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2} |f_j'(z, y_n)e_n|\, dy_n \geqslant h(\lambda_n - 2\varepsilon)$$

для п.в. $z \in C^*(h)$. Таким образом, интегрируя по $C^*(h)$ и используя теорему Фубини, видим, что

$$\int\limits_{C(h)} |f_j'(y)e_n|\, dm(y) \geqslant h^n(\lambda_n - 2\varepsilon). \tag{10.42}$$

Пусть $K_{f_j}(y) \neq \infty$ п.в. в $C(h)$. Тогда по неравенству Гёльдера получаем, что

$$\begin{gathered}\int\limits_{C(h)} |f_j'(y)e_n|\, dm(y) \leqslant \int\limits_{C(h)} \|f_j'(y)\|\ dm(y) = \int\limits_{C(h)} K_{f_j}^{1/n}(y)\ J_{f_j}(y)^{1/n}\, dm(y) \leqslant \\ \leqslant \left(\int\limits_{C(h)} K_{f_j}^{\frac{1}{n-1}}(y)\ dm(y)\right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\int\limits_{C(h)} J_{f_j}(y)\, dm(y)\right)^{\frac{1}{n}}.\end{gathered} \tag{10.43}$$

Здесь мы также воспользовались равенством $\|f_j'(y)\|^n = K_{f_j}(y)\ J_{f_j}(y)$ п.в. Комбинируя (10.43), (10.40) и (10.42), заключаем, что

$$\left(\frac{(\lambda_n - 2\varepsilon)^n}{|J_f(0)| + \triangle(\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{n-1}} \leqslant \frac{1}{h^n} \int\limits_{C(h)} K_{f_j}^{\frac{1}{n-1}}(y)\, dm(y)\,.$$

Очевидно, что последнее неравенство также справедливо в случае $K_{f_j}(y) = \infty$ на множестве положительной меры, поскольку в этом случае правая часть равна $\infty$.

Таким образом, устремляя $j \to \infty$, затем $h \to 0$ и, наконец, $\varepsilon \to 0$, мы завершаем доказательство. $\square$

Применяя неравенство Йенсена к (10.37), получаем следующее заключение.

**Следствие 10.10.** *В условиях и обозначениях леммы 10.4*

$$\Phi\left(P_f\left(x_0\right)\right) \leqslant \liminf_{h\to 0}\ \liminf_{j\to\infty} \frac{1}{h^n} \int\limits_{C(x_0,h)} \Phi\left(P_{f_j}\left(y\right)\right)\, dm(y) \qquad (10.44)$$

*для любой непрерывной выпуклой функции* $\Phi : \bar{\mathrm{I}} \to \overline{\mathbb{R}^+}$.

В частности, для функции $\Phi(t) = t^{n-1}$ получаем следующее утверждение.

**Следствие 10.11.** *В условиях леммы 10.4*

$$K_f(x_0) \leqslant \liminf_{h\to 0}\ \liminf_{j\to\infty} \frac{1}{h^n} \int\limits_{C(x_0,h)} K_{f_j}(y)\, dm(y)\,. \qquad (10.45)$$

**Теорема 10.7.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и пусть $f_j$, $j = 1, 2, \ldots$ – последовательность гомеоморфизмов $D$ в $\mathbb{R}^n$ класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, сходящаяся локально равномерно к отображению $f : D \to \mathbb{R}^n$, где $f$ дифференцируемо п.в. в $D$. Если*

$$P_{f_j}\left(x\right) \leqslant P\left(x\right) \in L^1_{\mathrm{loc}} \quad j = 1, 2, \ldots, \qquad (10.46)$$

*то*

$$P_f\left(x\right) \leqslant \limsup_{j\to\infty} P_{f_j}\left(x\right) \qquad \text{п.в.} \qquad (10.47)$$

*Кроме того, если $f$ – гомеоморфизм, то $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ и $\partial_i f_j \to \partial_i f$ слабо в $L^1_{\mathrm{loc}}$ при $j \to \infty$ для всех $i = 1, \ldots n$.*

**Доказательство.** Применяя лемму 10.4, условие (10.46) и теорему о почленном интегрировании, см., напр., теорему I.12.12 в [88], имеем, что

$$P_f\left(x\right) \leqslant \liminf_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \int\limits_{C(x,h)} \limsup_{j\to\infty} P_{f_j}(y)\, dm(y)\,. \qquad (10.48)$$

Далее, по теореме о дифференцируемости неопределенного интеграла, см., напр., теорему IV.6.3 в [88], получаем, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\int\limits_{C(x,h)}\limsup_{j\to\infty}P_{f_j}(y)\;dm(y)=\limsup_{j\to\infty}P_{f_j}(x) \tag{10.49}$$

при почти всех $x$. Комбинируя (10.48) и (10.49), приходим к (10.47).

В силу (10.46) отображение $f_j$ является отображением с конечным искажением, $P_{f_j}<\infty$ п.в., и по (8.7)

$$\|\partial_i f_j\|\leqslant\|P_{f_j}\|^{(n-1)/n}\cdot|f_j(C)|^{1/n}\ \leqslant\ \|P\|^{(n-1)/n}\cdot|f_j(C)|^{1/n}<\infty \tag{10.50}$$

для любого компактного множества $C\subset\Omega$, $i=1,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots$, где $\|*\|$ - норма $*$ в $L^1(C)$. Зафиксируем $\rho_*\in(0,\rho)$, где $\rho=\mathrm{dist}(C,\partial D)$ и покроем $C$ шарами $\mathrm{B}(x,\rho_*)$, $x\in C$. Выбирая конечное подпокрытие из данного покрытия, получаем открытое множество $V$, содержащее $C$, и такое что $\overline{V}\subset D$. По построению, $\overline{V}$ – компактное подмножество области $D$, при этом, $f(C)$ и $f(\overline{V})$ являются компактными подмножествами области $D'=f(D)$. Поскольку $f(C)\subset f(V)$, а множество $f(V)$ открыто и $f$ – гомеоморфизм, имеем неравенство $\mathrm{dist}(f(C),\partial f(V))>0$. Следовательно, $f_j(C)\subset f(V)$ при достаточно больших $j$ и из условия (10.50) следует, что

$$\|\partial_i f_j\|\leqslant\|P\|^{(n-1)/n}\cdot|f(\overline{V})|^{1/n}<\infty \tag{10.51}$$

для таких $j$. Аналогично доказывается, что

$$\|\partial_i f_j\|_E\leqslant\|P\|_E^{(n-1)/n}\cdot|f(\overline{V})|^{1/n}<\infty, \tag{10.52}$$

где через $\|*\|_E$ обозначена норма $*$ в $L^1(E)$ для произвольного измеримого множества $E\subseteq C$. В силу леммы 2.1 в [289], $f\in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ и $\partial_i f_j\to\partial_i f$ слабо в $L^1_{\mathrm{loc}}$, $i=1,\ldots n$ при $j\to\infty$. $\square$

В следующем параграфе мы приведем соответствующие результаты без поточечной мажоранты $P(x)$.

## 10.6. Полунепрерывность дилатаций в среднем

Аналоги результата, приведённого ниже, для случая плоскости можно найти в монографии [29], см. теорему 11.1. См. также теорему 4.1 в [186], относящуюся к пространственным отображениям с ограниченным искажением.

Как и выше, мы используем здесь дилатацию $P_f$, определенную в (8.5).

**Теорема 10.8.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и пусть $f_j$, $j = 1, 2, \ldots,$ – последовательность гомеоморфизмов из $D$ в $\mathbb{R}^n$ класса $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$, сходящаяся локально равномерно к отображению $f : D \to \mathbb{R}^n$, которое является дифференцируемым п.в. в $D$. Тогда на каждом открытом множестве $\Omega \subseteq D$ и каждой строго выпуклой функции $\Phi : \bar{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$, непрерывной слева в точке $T = \sup\limits_{\Phi(t)<\infty} t$, выполнено соотношение*

$$\int\limits_{\Omega} \Phi(P_f(x))\, dm(x) \leqslant \liminf_{j\to\infty} \int\limits_{\Omega} \Phi(P_{f_j}(x))\, dm(x)\,. \tag{10.53}$$

*Кроме того, если $f$ является гомеоморфизмом и правая часть неравенства (10.53) конечна, то $f \in W^{1,1}_{\rm loc}(\Omega)$. Если, кроме того*

$$\limsup_{j\to\infty} \int\limits_{\Omega} \Phi(P_{f_j}(x))\, dm(x) < \infty\,, \tag{10.54}$$

то $\partial_i f_j \to \partial_i f$ слабо в $L^1_{\rm loc}(\Omega)$ при $j \to \infty$ и всех $i = 1, \ldots n$.

**Замечание 10.6.** Здесь непрерывность функции $\Phi$ понимается в смысле топологии $\overline{\mathbb{R}^+}$. Предположения относительно выпуклости, неубывания и непрерывности слева функции $\Phi$ в точке $T$ являются не только достаточными, но и необходимыми для заключения (10.53), что уже было показано в плоском случае в монографии [29]. Мы докажем это для пространственного случая в параграфе 10.8.

Перед доказательством теоремы 10.8 приведем еще одну несложную лемму, которая фактически является переформулировкой леммы Фату для рядов, см., напр., теорему I.12.10 в [88].

**Лемма 10.5.** *Пусть последовательность $a_{mj}$, $m, j = 1, 2, \ldots,$ состоит из неотрицательных чисел. Тогда*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \liminf_{j\to\infty}\ a_{mj} \leqslant \liminf_{j\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mj}\,. \tag{10.55}$$

*Если последовательность $a_{mj}$, $m, j = 1, 2, \ldots$ содержит отрицательные числа, то для выполнения условия (10.55) достаточно потребовать, чтобы $|a_{mj}| \leqslant b_m$, где $\sum b_m < \infty$.*

Действительно, случай рядов редуцируется к стандартному интегральному случаю через ступенчатые функции $\varphi_j$, $j=1,2,\ldots$, заданные на сегменте $[0,1]$:

$$\varphi_j(t)=2^m a_{mj}\,,\quad \sum_{k=1}^{m-1} 2^{-k}\leqslant t<\sum_{k=1}^{m} 2^{-k},\quad m=1,2,\ldots\,.$$

**Доказательство.** Если правая часть неравенства в (10.53) равна $\infty$, неравенство (10.53) очевидно. Следовательно, можно предполагать, что

$$\int\limits_{\Omega}\Phi(P_{f_j}(x))\,dm(x)\leqslant M<\infty\qquad\forall\ j=1,2,\ldots. \tag{10.56}$$

1. Пусть сначала функция $\Phi(P_f(z))$ является локально интегрируемой на ограниченном множестве $\Omega$. Тогда по теореме о дифференцировании неопределенного интеграла, см. IV(6.3) в [88],

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\int\limits_{C(x;h)}\Phi(P_f(\zeta)\,dm(\zeta)=\Phi(P_f(x))$$

и соотношение (10.44) выполнено ввиду следствия 10.10 для всех $x\in E$, где $|\Omega\setminus E|=0$. Таким образом, для каждой точки $x\in E$ и любого $\varepsilon>0$ при достаточно малом $h<\delta=\delta(\varepsilon,x)$ выполнено условие

$$\int\limits_{C(x,h)}\Phi(P_f(\zeta))\,dm(\zeta)\leqslant\liminf_{n\to\infty}\iint\limits_{C(x,h)}\Phi(P_{f_j}(\zeta))\,dm(\zeta)+\varepsilon h^2\,.$$

Заметим, что система кубов $C(x,h)$, $h<\min(\rho(x,\partial\Omega)/\sqrt{n},\delta(\varepsilon,x))$, $x\in E$, образует покрытие множества $E$ в смысле Витали. По теореме Витали можно выбрать не более чем счетную последовательность непересекающихся кубов $C_m=C(x_m,h_m)$ из указанного покрытия, такую что $|E\setminus\cup E_m|=0$, $C_m\subseteq\Omega$ и $|\Omega\setminus\cup E_m|=0$, $|\Omega|=\sum|E_m|$, см., напр., теорему IV.3.1 в [88].

Ввиду счетной аддитивности интеграла (см., напр., теорему I.12.7 в [88]), по лемме 10.5, примененной к

$$a_{mj}=\int\limits_{E_m}\Phi(P_{f_j}(\zeta))\,dm(\zeta),\quad m,j=1,2,\ldots,$$

получаем, что

$$\int\limits_{\Omega}\Phi(P_f(\zeta))\,dm(\zeta)\leqslant\liminf_{j\to\infty}\int\limits_{\Omega}\Phi(P_j(\zeta))\,dm(\zeta)+\varepsilon|\Omega|,$$

и в силу произвола $\varepsilon > 0$ приходим к (10.53).

2. Если $\Phi(T) < \infty$, то также $T < \infty$, поскольку $\Phi(t)/t \to \infty$ при $t \to \infty$. Следовательно, $P_{f_j}(x) \leqslant T$ п.в. по условию (10.56) и потому $P_f(x) \leq T$ п.в. по лемме 10.4. Однако тогда $\Phi(P_f(x)) \leqslant \Phi(T)$ п.в., и функция $\Phi(P_f(x))$ локально интегрируема в $\Omega$. Таким образом, в силу пункта 1 доказательства получаем (10.53) для ограниченного $\Omega$.

3. Далее предположим $\Phi(T) = \infty$. Тогда по непрерывности слева в точке $T$ функции $\Phi$ в смысле $\overline{\mathbb{R}^+}$ найдётся монотонная последовательность $t_m \in (1, T)$, $m = 1, 2, \ldots$, такая что $t_m \to T$ и, соответственно, $\Phi(t_m) \to \infty$ при $m \to \infty$, при этом $\Phi(t)$ является дифференцируемой в каждой точке $t_m$, $\Phi'(t_m) > 0$ (см., напр., следствие I.4.2 в [141]). Рассмотрим вспомогательные функции

$$\Phi_m(t) = \begin{cases} \Phi(t), & t \leqslant t_m, \\ \Phi(t_m) + \Phi'(t_m)(t - t_m), & t \geqslant t_m; \end{cases}$$

и

$$\varphi_m(\tau) = \begin{cases} \tau, & \tau \leqslant \Phi(t_m), \\ \Phi(\alpha_m + \beta_m \tau), & \tau \geqslant \Phi(t_m), \end{cases}$$

где коэффициенты

$$\begin{cases} \alpha_m = t_m - \Phi(t_m)/\Phi'(t_m) \\ \beta_m = 1/\Phi'(t_m) \end{cases}$$

находятся из условия

$$\alpha_m + \beta_m \left[\Phi(t_m) + \Phi'(t_m)(t - t_m)\right] \equiv t\,. \tag{10.57}$$

Таким образом, по построению,

$$\varphi_m(\Phi_m(t)) \equiv \Phi(t), \quad m = 1, 2, \ldots \tag{10.58}$$

Отметим, что все функции $\Phi_m$ и $\varphi_m$ являются непрерывными, выпуклыми и неубывающими, см., напр., предложение I.4.8 в [141], при этом, поскольку $\Phi$ является непрерывной и строго выпуклой функцией,

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{\varphi_m(\tau)}{\tau} = \infty\,. \tag{10.59}$$

Кроме того, $\Phi_m \leqslant \Phi$, последовательность $\Phi_m$ монотонно возрастает и стремится к $\Phi$ поточечно при $m \to \infty$.

Заметим, что функции $\Phi_m(P\,(x))$, $m = 1, 2, \ldots$, суммируемы для ограниченных $\Omega$. Действительно, в силу неравенства Йенсена, (10.56) и

(10.58), для каждого $E \subseteq \Omega$ такого, что $|E| > 0$, можно считать, что для всех $j = 1, 2, \ldots$ и $M_* = M + \varepsilon$:

$$\varphi_m \left( \frac{1}{|E|} \int\limits_E \Phi_m(P_{f_j}(\zeta))\, dm(\zeta) \right) \leqslant \frac{M_*}{|E|} < \infty. \tag{10.60}$$

Если $T < \infty$, из определения $\varphi_m$, (10.57) и (10.60) получаем, что

$$\frac{1}{|E|} \int\limits_E \Phi_m(P_{f_j}(\zeta))\ dm(\zeta)\ \leqslant\ Q_m\ :\ =\ \Phi(t_m) + \Phi'(t_m)(T - t_m),$$

и, следовательно, по теореме о дифференцировании неопределенного интеграла $\Phi_m(P_{f_j}(x)) \leqslant Q_m$, $m, j = 1, 2, \ldots$, для п.в. $x \in \Omega$. Таким образом, по теореме 10.7 $\Phi_m(P(x)) \leqslant Q_m$ п.в. и интегрируемость $\Phi_m(P)$ становится очевидной.

Если $T = \infty$, то в силу (10.59) и (10.60)

$$\int\limits_E \Phi_m(P_{f_j}(\zeta))\ dm(\zeta) \leqslant M_* \frac{\tau}{\varphi_m(\tau)} \to 0,$$

где $\tau = \varphi_m^{-1}(M_*/|E|) \to \infty$ при $|E| \to 0$. Кроме того,

$$\|\Phi_m(P_{f_j})\|_{L^1(\Omega)} \leqslant |\Omega|\, \varphi_m^{-1}(M_*/|\Omega|).$$

Таким образом, последовательность $\Phi_m(P_{f_j})|_\Omega$ слабо компактна в $L^1(\Omega)$, см., напр., следствие IV.8.11 в [19]. Поэтому можем считать, что $\Phi_m(P_{f_j})|_\Omega \to \Psi$ слабо в $L^1(\Omega)$ при $j \to \infty$. По следствию 10.10 и теореме о дифференцировании неопределенного интеграла (см., напр., теорему IV.6.3 в [88]) получаем, что $\Phi_m(P_f) \leq \Psi$ п.в. в $\Omega$ и, следовательно, $\Phi_m(P_f)|_\Omega \in L^1(\Omega)$.

Поэтому мы можем применить первый пункт доказательства к каждой из функций $\Phi_m$, $m = 1, 2, \ldots$, чтобы получить неравенство

$$\int\limits_\Omega \Phi_m(P_f(\zeta))\, dm(\zeta) \leqslant \liminf_{j\to\infty} \int\limits_\Omega \Phi_m(P_{f_j}(\zeta))\, dm(\zeta)\,.$$

По теореме Лебега об интегрировании монотонной последовательности функций, см., напр., теорему IV.12.6 в [88],

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_\Omega \Phi_m(P_f(\zeta))\ dm(\zeta) = \int\limits_\Omega \Phi(P_f(\zeta))\ dm(\zeta)\,,$$

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_{\Omega}\Phi_m(P_{f_j}(\zeta))\ dm(\zeta)=\int\limits_{\Omega}\Phi(P_{f_j}(\zeta))\ dm(\zeta)\,.$$

Остается заметить, что двойная последовательность чисел

$$a_{mj}=\int\limits_{\Omega}\Phi_m(P_{f_j}(\zeta))\,dm(\zeta)$$

монотонно возрастает по $m$ и поэтому

$$\lim_{m\to\infty}\varliminf_{j\to\infty}a_{mj}\leqslant\varliminf_{j\to\infty}\lim_{m\to\infty}a_{mj}\,,\tag{10.61}$$

см. лемму 10.5. Последнее приводит нас к (10.53) в случае ограниченных $\Omega$.

4. Наконец, устраивая исчерпания $\Omega_m = \{\zeta\in\Omega:|\zeta|<m\}$, $m=1,2,\ldots$ и применяя неравенство (10.61) из леммы 10.5 к другой двойной последовательности:

$$a_{mj}:\ =\int\limits_{\Omega_m}\Phi(P_{f_j}(\zeta))\,dm(\zeta)=\int\limits_{\Omega}\chi_m(\zeta)\ \Phi(P_{f_j}(\zeta))\,dm(\zeta)\,,\tag{10.62}$$

где $\chi_m$ – характеристические функции множества $\Omega_m$, по упомянутой теореме Лебега получаем (10.53) в общем случае.

5. Поскольку функция $\Phi$ является строго выпуклой, по теореме 3.1.2 [80] и из условия (10.54) находим, что

$$\int\limits_{\Omega}\ P_{f_j}(x)\,dm(x)\leqslant K<\infty\quad\forall\ j>N\tag{10.63}$$

и для любого измеримого множества $E\subset\Omega$

$$\int\limits_{E}\ P_{f_j}(x)\,dm(x)\leqslant K_E<\infty\quad\forall\ j>N,\tag{10.64}$$

где

$$K_E\to 0\quad\text{при}\quad|E|\to 0\,.\tag{10.65}$$

По (8.7), (10.63) и (10.64) для любого компактного множества $C\subset\Omega$, $i=1,\ldots,n$, $j>N$,

$$\|\partial_i f_j\|\leqslant\|P_{f_j}\|^{(n-1)/n}\ K^{(n-1)/n}\cdot|f_j(C)|^{1/n}<\infty\tag{10.66}$$

и

$$\|\partial_i f_j\|_E \leqslant \|P_{f_j}\|_E^{(n-1)/n}\,|f_j(C)|^{1/n} \leqslant K_E^{(n-1)/n}\cdot|f_j(C)|^{1/n} < \infty\,, \tag{10.67}$$

где $\|*\|$ и $\|*\|_E$ обозначают норму $*$ в $L^1(C)$ и $L^1(E)$, соответственно. По аналогии с доказательством теоремы 10.7 покажем, что существует компактное множество $C_*$, такое что $f_j(C)\subset f(C_*)$ для достаточно больших $j$ и, следовательно, из (10.66) и (10.67) получаем, что для всех $i=1,\ldots,n$,

$$\|\partial_i f_j\| \leqslant K^{(n-1)/n}\cdot|f(C_*)|^{1/n}\ <\ \infty\quad \forall\, j>N_* \tag{10.68}$$

и

$$\|\partial_i f_j\|_E \leqslant K_E^{(n-1)/n}\cdot|f(C_*)|^{1/n} < \infty\quad \forall\, j>N_* \tag{10.69}$$

По лемме 2.1 в [289], условий (10.68) и (10.69) следует что $f\in W^{1,1}_{\rm loc}(\Omega)$ и $\partial_i f_j\to\partial_i f$ слабо в $L^1_{\rm loc}(\Omega)$ при $j\to\infty$ для всех $i=1,\ldots n$, когда (10.54) выполнено. Доказательство завершено. □

**Следствие 10.12.** *В условиях теоремы 10.8 для любой непрерывной неубывающей выпуклой функции $\Phi:\overline{\mathbb{R}^+}\to\overline{\mathbb{R}^+}$ и каждого открытого множества $\Omega\subseteq D$ выполнено неравенство*

$$\int\limits_{\Omega}\Phi(K_f(x))\;dm(x)\leqslant\liminf_{j\to\infty}\int\limits_{\Omega}\Phi(K_{f_j}(x))\;dm(x)\,. \tag{10.70}$$

Приведем одно из наиболее важных следствий теоремы 10.8.

**Следствие 10.13.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, и пусть $f_j$, $j=1,2,\ldots,$ – последовательность гомеоморфизмов из $D$ в $\mathbb{R}^n$ класса $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$, которая сходится локально равномерно к гомеоморфизму $f$ из $D$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любого $\alpha>n-1$ и любого открытого множества $\Omega\subseteq D$*

$$\int\limits_{\Omega}\Phi(K^{\alpha}_f(x))\,dm(x)\leqslant\liminf_{j\to\infty}\int\limits_{\Omega}\Phi(K^{\alpha}_{f_j}(x))\,dm(x) \tag{10.71}$$

*для любой непрерывной неубывающей выпуклой функции $\Phi:\overline{\mathrm{I}}\to\overline{\mathbb{R}^+}$. Кроме того, если $\Phi$ не является постоянной и правая часть условия (10.71) конечна, то $f\in W^{1,p}_{\rm loc}(\Omega)$ с $p=n\alpha/(1+\alpha)>n-1$ и $f$ дифференцируемо п.в. на $\Omega$. Наконец, если имеет место дополнительное условие*

$$\limsup_{j\to\infty}\int\limits_{\Omega}\Phi(K^{\alpha}_{f_j}(x))\,dm(x)<\infty\,, \tag{10.72}$$

*то* $\partial_i f_j \to \partial_i f$ *слабо в* $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *при* $j\to\infty$ *для всех* $i=1,\dots n$.

**Доказательство.** Если правая часть в (10.71) равна $\infty$, то неравенство (10.71) очевидно. Следовательно, без ограничения общности, можно считать, что

$$\int\limits_{\Omega} \Phi(K^{\alpha}_{f_j}(x))\,dm(x) \leqslant M < \infty \quad \forall\, j=1,2,\dots\,. \tag{10.73}$$

По тем же причинам мы можем считать, что $\Phi$ не является постоянной. Наконец, как и в последнем доказательстве, по лемме 10.5 и счетной аддитивности интеграла можем предполагать, что $\Omega$ является ограниченной областью.

Для применения теоремы 10.8 мы должны доказать, что $f$ является дифференцируемой п.в. на $\Omega$. Далее, мы можем предполагать, что функция $\Phi$ продолжена с $\overline{\mathrm{I}}$ на $\overline{\mathbb{R}^+}$ по правилу: $\Phi(t)\equiv\Phi(1)$ при всех $t\in[0,1)$. Таким образом продолженная функция $\Phi$ непрерывна, не убывает, непостоянна и выпукла, см., напр., предложение I.4.8 в [141]. Полагая $t_0=\sup\limits_{\Phi(t)=\Phi(0)} t$ и $T_0=\sup\limits_{\Phi(t)<\infty} t$, видим, что $t_0<T_0$. Поскольку $\Phi$ – непрерывная, неубывающая и непостоянная функция, полагая $t_*\in(t_0,T_0)$, получаем, что

$$\frac{\Phi(t)-\Phi(0)}{t} \geqslant \frac{\Phi(t_*)-\Phi(0)}{t_*} > 0 \qquad \forall\, t\in[t_*,\infty)$$

в силу выпуклости функции $\Phi$, см., напр., предложение I.4.5 в [141], т.е. $\Phi(t)\geqslant at$ при $t\geqslant t_*$, где $a=[\Phi(t_*)-\Phi(0)]/t_*>0$. Таким образом, из (10.73) получаем, что

$$\int\limits_{\Omega} K^{\alpha}_{f_j}(x)\,dm(x) \leqslant t_*|\Omega| \;+\; M/a < \infty \quad \forall\, j=1,2,\dots\,. \tag{10.74}$$

Следовательно, по предложению 8.1 $f_j\in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ при $p=n\alpha/(1+\alpha)>$ $> n-1$, поскольку $\alpha>n-1$ и, более точно, в силу (8.7) и (10.74) для любого компактного множества $C\subset\Omega$, $i=1,\dots,n$, $j=1,2,\dots$

$$\|\partial_i f_j\|_p \leqslant \|K_{f_j}\|^{1/n}_{\alpha}\cdot|f_j(C)|^{1/n} \leqslant A\cdot|f_j(C)|^{1/n} < \infty, \tag{10.75}$$

где $A=(t_*|\Omega|+M/a)^{1/\alpha}$. Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 10.7, покажем, что существует компактное множество $C_*$, такое что $f_j(C)\subset f(C_*)$ при достаточно больших $j$ и, следовательно, из (10.75) вытекает, что

$$\|\partial_i f_j\|_p \leqslant A\cdot|f(C_*)|^{1/n} < \infty \tag{10.76}$$

для всех таких $j$. Таким образом, $\partial_i f_j \to \partial_i f$ слабо в $L^p_{\rm loc}(\Omega)$ при $j\to\infty$ при всех $i=1,\ldots n$ и $f\in W^{1,p}_{\rm loc}(\Omega)$ с $p>n-1$, см., напр., лемму 3.5 гл. III § 3.4 монографии [77], отображение $f$ дифференцируемо п.в. в $\Omega$ по теореме Геринга–Лехто–Меньшова для $n=2$ и теореме Вяйсяля для $n\geqslant 3$, см. [176], [239], [259] и [319].

Наконец, применяя теорему 10.8 в $\Omega$, приходим к неравенству (10.71). $\Box$

Следующая теорема также является следствием теоремы 10.8, а её доказательство совершенно аналогично доказательству последнего следствия и основано на оценках (8.7) и $e^{\tau}\geqslant\frac{\tau^N}{N!}$ для всех $N=1,2,\ldots$.

**Теорема 10.9.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, и пусть $f_j$, $j=1,2,\ldots$, – последовательность гомеоморфизмов из $D$ в $\mathbb{R}^n$ класса $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$, сходящаяся локально равномерно к гомеоморфизму $f$ из $D$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда для каждой непрерывной неубывающей выпуклой функции $\psi:\bar{\rm I}\to\overline{\mathbb{R}^+}$ и каждого открытого множества $\Omega\subseteq D$ выполнено неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} e^{\psi(P_f(x))}\,dm(x)\leqslant\liminf_{j\to\infty}\int\limits_{\Omega} e^{\psi(P_{f_j}(x))}\,dm(x)\,. \tag{10.77}$$

*Если, дополнительно, $\psi$ является непостоянной и правая часть в (10.77) конечна, то $f\in W^{1,p}_{\rm loc}(\Omega)$ для всех $p\in[1,n)$ и $f$ дифференцируемо п.в. в $\Omega$. Кроме того, если*

$$\limsup_{j\to\infty}\int\limits_{\Omega} e^{\psi(P_{f_j}(x))}\,dm(x)<\infty\,, \tag{10.78}$$

*то $\partial_i f_j\to\partial_i f$ слабо в $L^p_{\rm loc}(\Omega)$ при $j\to\infty$ для всех $i=1,\ldots n$ и для всех $p\in[1,n)$.*

**Следствие 10.14.** *В частности, для каждого $\alpha>0$*

$$\int\limits_{\Omega} e^{\alpha\,P_f(x)}\,dm(x)\leqslant\liminf_{j\to\infty}\int\limits_{\Omega} e^{\alpha\,P_{f_j}(x)}\,dm(x) \tag{10.79}$$

*и*

$$\int\limits_{\Omega} e^{\alpha\,K_f(x)}\,dm(x)\leqslant\liminf_{j\to\infty}\int\limits_{\Omega} e^{\alpha\,K_{f_j}(x)}\,dm(x)\,. \tag{10.80}$$

*Если правые части в (10.79) или в (10.80) конечны, то $f\in W^{1,p}_{\rm loc}(\Omega)$ для всех $p\in[1,n)$, и $f$ дифференцируемо п.в. в $\Omega$. Кроме того, если*

$$\limsup_{j\to\infty}\int\limits_{\Omega} e^{\alpha\,P_{f_j}(x)}\,dm(x)<\infty\,, \tag{10.81}$$

*либо*

$$\limsup_{j\to\infty}\int\limits_{\Omega} e^{\alpha K_{f_j}(x)}\,dm(x)<\infty\,, \tag{10.82}$$

*то* $\partial_i f_j\to\partial_i f$ *слабо в* $L^p_{\rm loc}(\Omega)$ *при* $j\to\infty$ *для всех* $i=1,\dots n$ *и для всех* $p\in[1,n)$.

**Замечание 10.7.** Аналогичные заключения остаются справедливыми для произвольной функции $\psi(t)$, являющейся конечным произведением функции $\alpha t^{\beta}$ ($\alpha>0$, $\beta>1$), и некоторого числа функций $[\log(A_1+t)]^{\alpha_1}$, $[\log\log(A_2+t)]^{\alpha_2}$, $\dots$ , где $\alpha_m$, $A_m\in\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{N}$, $t\in[T,\infty]$, $\psi(t)\equiv\psi(T)$, $t\in[1,T]$ и $T\in\mathrm{I}$ достаточно велико. В частности, выбирая $\beta=n-1$, получаем различные предельные неравенства для $K_f$, если $n\geqslant 3$.

Теперь докажем следующую полезную лемму, чей прототип на плоскости можно найти в работе [59]. Мы выводим её на основе теоремы 10.8.

**Лемма 10.6.** *Пусть* $D$ *– область в* $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, *и пусть* $f_j$, $j=1,2,\dots$, *– последовательность гомеоморфизмов из* $D$ *в* $\mathbb{R}^n$ *класса* $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$, *сходящаяся локально равномерно к дифференцируемому п.в. в* $D$ *отображению* $f:D\to\mathbb{R}^n$. *Тогда для любого открытого множества* $\Omega\subseteq D$, *любой строго выпуклой функции* $\Phi:\overline{\mathrm{I}}\to\overline{\mathbb{R}^+}$, *непрерывной слева в точке* $T=\sup\limits_{\Phi(t)<\infty} t$, *и для каждой равномерно непрерывной функции* $\Psi:\mathbb{R}^n\to(0,\infty)$, *такой что* $1/\Psi$ *локально ограниченна в* $\mathbb{R}^n$, *выполнено условие*

$$\int\limits_{\Omega}\Phi(P_f(x))\ \Psi(x)\,dm(x)\leqslant\liminf_{j\to\infty}\int\limits_{\Omega}\Phi(P_{f_j}(x))\ \Psi(x)\,dm(x)\,. \tag{10.83}$$

**Доказательство.** Как и при доказательстве теоремы 10.8, в силу леммы 10.5 и счетной аддитивности интеграла, можно считать, что множество $\Omega$ ограничено. На таком множестве по условию леммы $0<c\leqslant\Psi\leqslant C<\infty$. Без ограничения общности можно предполагать также, что правая часть в (10.83) конечна, и, следовательно, левая часть в (10.53) также конечна.

Пусть $C(x,h)$ – куб с центром в точке $x\in D$, чьи ребра длины $h$ ориентированы вдоль координатных осей. Из равномерной непрерывности функции $\Psi$ следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$, такое что $|\Psi(x)-\Psi(x')|$ для всех $x\in\Omega$, $x'\in C(x,h)$ и $h<\delta(\varepsilon)$.

Система кубов $C(x,h)$, $x\in\Omega$, $h<\min(\rho(x,\partial\Omega)/\sqrt{n},\delta(\varepsilon))$ образует покрытие множества $\Omega$ в смысле Витали, поэтому найдётся счетное множество кубов $C_m=C(x_m,h_m)\subseteq\Omega$ из заданного покрытия, такая что $|\Omega\setminus\cup C_m|=0$, см., напр., теорему IV.3.1 в [88].

По теореме 10.8, для $\varepsilon<c$ получаем, что

$$\int\limits_{C_m}\Phi(P_f(x))\ \Psi(x)\,dm(x)\leqslant$$

$$\leqslant(\Psi(x_m)-\varepsilon)\int\limits_{C_m}\Phi(P_f(x))\,dm(x)\ +\ 2\varepsilon\int\limits_{C_m}\Phi(P_f(x))\,dm(x)\leqslant$$

$$\leqslant(\Psi(x_m)-\varepsilon)\ \liminf_{j\to\infty}\int\limits_{C_m}\Phi(P_{f_j}(x))\,dm(x)\ +\ 2\varepsilon\int\limits_{C_m}\Phi(P_f(x))\,dm(x)\leqslant$$

$$\leqslant\liminf_{j\to\infty}\int\limits_{C_m}\Phi(P_{f_j}(x))\ \Psi(x)\,dm(x)\ +\ 2\varepsilon\int\limits_{C_m}\Phi(P_f(x))\,dm(x)\,.$$

Из последнего неравенства ввиду счетной аддитивности интеграла и леммы Фату имеем, что

$$\int\limits_{\Omega}\Phi(P_f(x))\ (\Psi(x)-2\varepsilon)\,dm(x)\leqslant\liminf_{j\to\infty}\int\limits_{\Omega}\Phi(P_{f_j}(x))\ \Psi(x)\,dm(x)\,.$$

Отсюда в силу произвола $\varepsilon>0$ получаем неравенство (10.83). $\square$

**Замечание 10.8.** Если предельное отображение $f$ – гомеоморфизм и $\Phi$ имеет вид $\Phi(t)=\psi(t^\alpha)$, $\alpha>(n-1)^2$ или $\Phi(t)=e^{\psi(t)}$, где $\psi$ – некоторая непостоянная непрерывная неубывающая выпуклая функция, то в лемме 10.6 мы можем не предполагать a priori, что $f$ дифференцируемо п.в. и можем дополнительно делать соответствующие заключения о слабой сходимости первых частных производных, как в следствии 10.13 и теореме 10.9. Доказательства этих фактов совершенно аналогичны, и поэтому мы опускаем детали.

Выбирая в лемме 10.6 $\Psi(x)=1/(1+|x|^2)^n$, мы приходим к следующим теоремам о полунепрерывности дилатаций в среднем относительно сферического объема в $\overline{\mathbb{R}^n}$.

**Теорема 10.10.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, и пусть $f_j$, $j=1,2,\ldots$, – последовательность гомеоморфизмов в $D$ на $\mathbb{R}^n$ класса*

$W^{1,1}_{\rm loc}(D)$, *сходящихся локально равномерно к отображению* $f : D \to \mathbb{R}^n$, *которое дифференцируемо п.в. в* $D$. *Тогда на каждом открытом множестве* $\Omega \subseteq D$

$$\int\limits_{\Omega} \Phi(P_f(x))\ \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \leqslant \liminf_{j\to\infty} \int\limits_{\Omega} \Phi(P_{f_j}(x))\ \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \tag{10.84}$$

*для любой строго выпуклой функции* $\Phi : \bar{\mathrm{I}} \to \overline{\mathbb{R}^+}$, *непрерывной слева в точке* $T = \sup\limits_{\Phi(t)<\infty} t$.

**Следствие 10.15.** *В условиях теоремы 10.10*

$$\int\limits_{\Omega} \Phi(K_f(x))\ \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \leqslant \liminf_{j\to\infty} \int\limits_{\Omega} \Phi(K_{f_j}(x))\ \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \tag{10.85}$$

*для любой непрерывной неубывающей выпуклой функции* $\Phi : \bar{\mathrm{I}} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *и любого открытого множества* $\Omega \subseteq D$.

**Следствие 10.16.** *Пусть* $D$ *– область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, *и пусть* $f_j$, $j = 1, 2, \ldots,$ *– последовательность гомеоморфизмов из* $D$ *в* $\mathbb{R}^n$ *класса* $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$, *сходящаяся локально равномерно к гомеоморфизму* $f$ *из* $D$ *в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда для любого* $\alpha > n-1$

$$\int\limits_{\Omega} \Phi(K^{\alpha}_f(x))\ \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \leqslant \liminf_{j\to\infty} \int\limits_{\Omega} \Phi(K^{\alpha}_{f_j}(x))\ \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \tag{10.86}$$

*для любой непрерывной неубывающей выпуклой функции* $\Phi : \bar{\mathrm{I}} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *и любого открытого множества* $\Omega \subseteq D$. *Кроме того, если* $\Phi$ *непостоянна и правая часть (10.86) конечна, то* $f \in W^{1,p}_{\rm loc}(\Omega)$ *при* $p = n\alpha/(1+\alpha) > n-1$ *и* $f$ *дифференцируемо п.в. на* $\Omega$. *Наконец, если дополнительно*

$$\limsup_{j\to\infty} \int\limits_{\Omega} \Phi(K^{\alpha}_{f_j}(x))\ \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} < \infty\,, \tag{10.87}$$

*то* $\partial_i f_j \to \partial_i f$ *слабо в* $L^p_{\rm loc}(\Omega)$ *при* $j\to\infty$ *и всех* $i = 1, \ldots n$.

**Теорема 10.11.** *Пусть* $D$ *– область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, *и пусть* $f_j$, $j = 1, 2, \ldots,$ *– последовательность гомеоморфизмов из* $D$ *в* $\mathbb{R}^n$ *класса* $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$, *сходящаяся локально равномерно к гомеоморфизму* $f$ *из* $D$ *в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда для каждой непрерывной неубывающей выпуклой функции* $\psi : \bar{\mathrm{I}} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *и любого открытого множества* $\Omega \subseteq D$

$$\int\limits_{\Omega} e^{\psi(P_f(x))}\ \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \leqslant \liminf_{j\to\infty} \int\limits_{\Omega} e^{\psi(P_{f_j}(x))}\ \ \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n}\,. \tag{10.88}$$

*Кроме того, если $\psi$ непостоянна и правая часть в (10.88) конечна, то $f \in W^{1,p}_{\rm loc}(\Omega)$ для всех $p \in [1,n)$ и $f$ дифференцируемо п.в. в $\Omega$. Наконец, если*

$$\limsup_{j\to\infty}\int\limits_{\Omega} e^{\psi(P_{f_j}(x))}\ \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} < \infty\,, \tag{10.89}$$

*то $\partial_i f_j \to \partial_i f$ слабо в $L^p_{\rm loc}(\Omega)$ при $j\to\infty$ для всех $i=1,\dots n$ и всех $p \in [1,n)$.*

Замечание 10.7, относящееся к примерам функций $\psi$, справедливо и в случае сферического объема.

**Следствие 10.17.** *В частности, для любого $\alpha > 0$*

$$\int\limits_{\Omega} e^{\alpha\, P_f(x)}\ \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \leqslant \liminf_{j\to\infty}\int\limits_{\Omega} e^{\alpha\, P_{f_j}(x)}\ \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \tag{10.90}$$

*и*

$$\int\limits_{\Omega} e^{\alpha\, K_f(x)}\ \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \leqslant \liminf_{j\to\infty}\int\limits_{\Omega} e^{\alpha\, K_{f_j}(x)}\ \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n}\ . \tag{10.91}$$

*Если правая часть в (10.90), либо в (10.91) конечна, то $f \in W^{1,p}_{\rm loc}(\Omega)$ для всех $p \in [1,n)$ и отображение $f$ дифференцируемо п.в. в $\Omega$. Кроме того, если*

$$\limsup_{j\to\infty}\int\limits_{\Omega} e^{\alpha\, P_{f_j}(x)}\ \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} < \infty\,, \tag{10.92}$$

*либо*

$$\limsup_{j\to\infty}\int\limits_{\Omega} e^{\alpha\, K_{f_j}(x)}\ \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} < \infty\,, \tag{10.93}$$

*то $\partial_i f_j \to \partial_i f$ слабо в $L^p_{\rm loc}(\Omega)$ при $j\to\infty$ для всех $i=1,\dots n$ и для всех $p \in [1,n)$.*

## 10.7. Компактность гомеоморфизмов классов Соболева

Напомним, что класс отображений называется компактным, если он является нормальным и замкнутым. Объединяя полученные выше результаты о нормальности и замкнутости, получаем следующие результаты о компактности для гомеоморфизмов классов Соболева.

Для заданной области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, измеримой функции $Q : D \to \overline{\rm I}$ и $z_1, z_2 \in D$, $z_1', z_2' \in \mathbb{R}^n$, $z_1 \neq z_2$, $z_1' \neq z_2'$, обозначим через $\mathcal{S}_Q$

семейство всех гомеоморфизмов $f$ из $D$ в $\mathbb{R}^n$ класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$, таких что $K_f^{n-1}(x) \le Q(x)$ п.в. в $D$ и $f(z_1) = z_1'$, $f(z_2) = z_2'$. Аналогично, для заданной функции $\Phi : \bar{\rm I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ и числа $\alpha \geqslant 1$ обозначим через $\mathcal{S}_{\Phi,\alpha}$ семейство всех гомеоморфизмов $f$ из $D$ в $\mathbb{R}^n$ класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ с аналогичной нормировкой, таких что

$$\int\limits_D \Phi(K_f^{\alpha}(x))\ \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \leqslant 1\,. \tag{10.94}$$

Окончательно, для заданной функции $\psi : \bar{\rm I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ и числа $M \in \mathbb{R}^+$ обозначим через $\mathcal{S}^{\psi}_M$ семейство всех гомеоморфизмов $f$ из $D$ в $\mathbb{R}^n$ класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ с указанной выше нормировкой, таких что

$$\int\limits_D e^{\psi(K_f(x))}\ \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \leqslant M\,. \tag{10.95}$$

**Лемма 10.7.** *Пусть $Q \in L^{\gamma}_{\rm loc}$ для некоторого $\gamma > 1$ и удовлетворяет условию (10.4). Тогда класс $\mathcal{S}_Q$ является компактным.*

**Доказательство.** Прежде всего семейство $\mathcal{S}_Q$ является нормальным по лемме 10.2. Докажем замкнутость этого семейства. Для этого рассмотрим произвольную последовательность $f_j \in \mathcal{S}_Q$, $j = 1, 2, \ldots$ такую, что $f_j \to f$ локально равномерно при $j \to \infty$. Тогда по лемме 10.1 $f$ является гомеоморфизмом с заданной нормировкой. По следствию 10.13, примененному при $\alpha = \gamma(n-1) > (n-1)$ и $\Phi(t) \equiv t$, получаем, что $f \in W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p = n\alpha/(1+\alpha) > n-1$ и $K_f^{n-1}(x) \leqslant Q(x)$ п.в. в $D$, т.е. $f \in \mathcal{S}_Q$. $\Box$

**Теорема 10.12.** *Если $Q \in FMO \cap L^{\gamma}_{\rm loc}$, $\gamma > 1$, то класс $\mathcal{S}_Q$ компактен.*

**Доказательство.** Пусть $x_0 \in D$. Можем считать, что $x_0 = 0 \in D$. Выбирая положительное $\varepsilon_0 < \min\{{\rm dist}\,(0, \partial D)\,,\ e^{-1}\}$, в силу леммы **??** получаем, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x|)\,dm(x) = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

где $\psi(t) = \frac{1}{t\log\frac{1}{t}}$. Заметим, что $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt = \log\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}$. Таким образом, необходимое заключение следует из леммы 10.7. $\Box$

Следующие следствия из теоремы 10.12 получаются из следствия 1.1 и предложения 1.3, соответственно.

**Следствие 10.18.** *Класс $\mathcal{S}_Q$ является компактным, если $Q \in L^{\gamma}_{\rm loc}$, $\gamma > 1$ и*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \;\; ⨍_{\mathrm{B}(x_0,\varepsilon)} Q(x)\, dm(x) < \infty \qquad \forall\; x_0 \in D\,. \tag{10.96}$$

**Следствие 10.19.** *Класс $\mathcal{S}_Q$ является компактным, если $Q \in L^{\gamma}_{\rm loc}$ для некоторого $\gamma > 1$ и каждое $x_0 \in D$ является точкой Лебега $Q$.*

**Теорема 10.13.** *Пусть $Q \in L^{\gamma}_{\rm loc}$, $\gamma > 1$, и удовлетворяет условию*

$$\int\limits_0^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} = \infty \qquad \forall\; x_0 \in D \tag{10.97}$$

*для некоторого $\varepsilon(x_0) < \mathrm{dist}\,(x_0, \partial D)$, где через $q_{x_0}(r)$ обозначим среднее $Q(x)$ по сфере $|x - x_0| = r$. Тогда класс $\mathcal{S}_Q$ является компактным.*

**Доказательство.** Пусть $x_0 \in D$ и $I = I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где

$$\psi(t) = \begin{cases} 1/[tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)]\,, & t \in (\varepsilon, \varepsilon_0)\,, \\ 0\,, & t \notin (\varepsilon, \varepsilon_0)\,. \end{cases}$$

Заметим, что по неравенству Йенсена $I(\varepsilon, \varepsilon_0) < \infty$ для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, поскольку $Q \in L^1_{\rm loc}$. С другой стороны, в силу (10.97) получаем, что $I(\varepsilon, \varepsilon_*) > 0$ для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ при некотором $\varepsilon_* \in (0, \varepsilon_0)$. Простые вычисления показывают также, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_*} Q(x)\cdot\psi^n(|x - x_0|)\; dm(x) = \omega_{n-1}\cdot I(\varepsilon, \varepsilon_*)$$

и $I(\varepsilon, \varepsilon_*) = o\,(I^n(\varepsilon, \varepsilon_*))$ по (10.97). Таким образом, заключение теоремы 10.13 следует из леммы 10.7. $\square$

**Следствие 10.20.** *Класс $\mathcal{S}_Q$ является компактным, если $Q \in L^{\gamma}_{\rm loc}$, $\gamma > 1$, и функция $Q$ имеет особенности только логарифмического типа порядка не более чем $n - 1$ в каждой точке $x_0 \in D$.*

**Теорема 10.14.** *Класс $\mathcal{S}_Q$ является компактным, если $Q \in L^{\gamma}_{\rm loc}$, $\gamma > 1$, и*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)}{|x-x_0|^n}\, dm(x) = o\left(\log^n \frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad \forall\, x_0 \in D \tag{10.98}$$

*при $\varepsilon \to 0$ и некотором $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) < {\rm dist}\,(x_0, \partial D)$.*

**Доказательство.** Заключение теоремы 10.14 следует из леммы 10.7 посредством выбора функции $\psi(t) = \frac{1}{t}$ в условии (10.4). $\Box$

**Теорема 10.15.** *Класс $\mathcal{S}_Q$ компактен, если для некоторых $\gamma > 1$ и неубывающей выпуклой функции $\Phi : \bar{\rm I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$, такой что*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{\gamma(n-1)}}} = \infty\,, \tag{10.99}$$

*$\delta > \Phi(1)$, выполнено условие*

$$\int\limits_{D} \Phi\left(Q^{\gamma}(x)\right) \frac{dm(x)}{\left(1+|x|^2\right)^n} \leqslant M < \infty\,. \tag{10.100}$$

**Доказательство.** Доказательство следует из теоремы 10.13, поскольку из условий (10.99)–(10.100) вытекает соотношение (10.97), см. теорему 3.1 в [282]. $\Box$

**Замечание 10.9.** Заметим, что условие (10.99) является не только достаточным, но также и необходимым для нормальности и, следовательно, для компактности класса $\mathcal{S}_Q$, где $Q$ удовлетворяет интегральному условию (10.100), см. соответствующий пример в [282], теорема 5.1. Отметим также (см. предложение 2.3 в [282]), что условие (10.99) эквивалентно следующему условию

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \log\, \Phi(t)\, \frac{dt}{t^{\gamma'}} = \infty \tag{10.101}$$

для всех $\delta > t_0$, где $t_0 := \sup\limits_{\Phi(t)=0} t$ (здесь полагаем $t_0 = 1$, если $\Phi(1) > 0$), и где $\gamma' = 1 + 1/\gamma(n-1)$. Отметим, что $\gamma' < n'$, где $\frac{1}{n'} + \frac{1}{n} = 1$, т.е., $n' = 2$

при $n = 2$, $n'$ строго убывает по $n$ и $n' = n/(n-1) \to 1$ и,следовательно, $\gamma' \to 1$ при $n \to \infty$.

Наконец, приведём критерии компактности классов Соболева без поточечных мажорант для дилатаций.

**Теорема 10.16.** *Класс $\mathcal{S}_{\Phi,\alpha}$ является компактным для всех $\alpha > n-1$ и всех непрерывных неубывающих выпуклых функций $\Phi : \overline{\mathrm{I}} \to \overline{\mathbb{R}^+}$, таких что при некотором $\delta > \Phi(1)$*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{\alpha}}} = \infty\,. \tag{10.102}$$

**Доказательство.** Семейство $\mathcal{S}_{\Phi,\alpha}$ является нормальным по лемме 10.3. Пусть $f_j$, $j = 1, 2, \ldots$ – последовательность гомеоморфизмов в $\mathcal{S}_{\Phi,\alpha}$, таких что $f_j \to f$ локально равномерно при $j \to \infty$. Тогда по лемме 10.1 $f$ – гомеоморфизм с заданной нормировкой. Таким образом, по следствию 10.13 класс является замкнутым и, следовательно, компактным. $\square$

**Замечание 10.10.** Заметим еще раз, что условие (10.102) является не только достаточным, но и необходимым для нормальности, следовательно, компактности классов $\mathcal{S}_{\Phi,\alpha}$, см. теорему 5.1 в [282]. Отметим также, что условие (10.102) эквивалентно условию

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \log\,\Phi(t)\;\frac{dt}{t^{\alpha'}} = \infty \tag{10.103}$$

для всех $\delta > t_0$, где $t_0 := \sup\limits_{\Phi(t)=0} t$ (здесь полагаем $t_0 = 1$, если $\Phi(1) > 0$) и $\alpha' = 1 + 1/\alpha$. Отметим, что $\alpha' < n'$, где $n' = n/(n-1) \to 1$, следовательно, $\alpha' \to 1$ при $n \to \infty$. Наконец, рассуждая от противного, легко видеть, что из (10.103) следует, что $\Phi$ является строго выпуклой.

**Теорема 10.17.** *Класс $\mathcal{S}_M^{\psi}$ является компактным для любой непрерывной неубывающей функции $\psi : \overline{\mathrm{I}} \to \overline{\mathbb{R}^+}$, такой что функция $e^{\psi(t^{n-1})}$ выпукла, $\psi^m\left(t^{\frac{1}{n-1}}\right)$ выпукла на отрезке $[T, \infty]$ при некоторых $m \in \mathbb{N}$, $T \in \mathrm{I}$ и*

$$\int\limits_{1}^{\infty} \psi(\tau)\;\frac{d\tau}{\tau^2} = \infty\,. \tag{10.104}$$

**Замечание 10.11.** Заметим, что выпуклость функции $e^{\psi(t^{n-1})}$ является более слабым условием, чем выпуклость $e^{\psi(t)}$ и более сильным, чем выпуклость функции $\psi(t)$. Выпуклость функции $\psi\left(t^{\frac{1}{n-1}}\right)$ является более сильным требованием, чем выпуклость $\psi(t)$, однако, выпуклость $\psi^m\left(t^{\frac{1}{n-1}}\right)$ при $m>1$ может быть слабее. Таким образом, для случая $m=1$ и $T=1$ первое условие может быть опущено, поскольку оно следует из второго. Тем не менее, выпуклость функции $e^{\psi(t^{n-1})}$ является необходимым условием для компактности классов $\mathcal{S}_M^{\psi}$, поскольку $e^{\psi(K_f)}=e^{\psi(P_f^{n-1})}$ (см. замечание 10.6). Кроме того, простые вычисления показывают, что условие (10.104) для функции $\psi$ эквивалентно условию

$$\int\limits_1^{\infty}\log\,\Phi(t)\,\frac{dt}{t^{n'}}=\infty\,,\quad n'=n/(n-1)\,,\tag{10.105}$$

для функции $\Phi(t)=e^{\psi(t^{n-1})}$, поскольку $\Phi(1)\geq 1$. В свою очередь, соотношение (10.105) эквивалентно условию

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}}=\infty\,,\tag{10.106}$$

см. предложение 2.3 в [282]. Таким образом, из теоремы 5.1 в работе [282] следует, что условие (10.104) является также необходимым.

**Доказательство.** Семейство $\mathcal{S}_M^{\psi}$ является нормальным по лемме 10.3. Рассмотрим последовательность гомеоморфизмов $f_j\in\mathcal{S}_M^{\psi}$, $j==1,2,\ldots$, таких что $f_j\to f$ локально равномерно.

Пусть $\Psi(t)=\psi^m\left(t^{\frac{1}{n-1}}\right)$ при $t\in[T,\infty]$. Продолжим функцию $\Psi$ на $\overline{\mathbb{R}^+}$ при помощи равенства $\Psi(t)\equiv\Psi(T)$ при всех $t\in[0,T)$. По построению функция $\Psi$ – непрерывная, неубывающая, непостоянная, см. (10.103), и выпуклая, см. предложение I.4.8 в [141]. Полагая $t_0=\sup\limits_{\Psi(t)=\Psi(0)}t$ и $T_0==\sup\limits_{\Psi(t)<\infty}t$, имеем, что $t_0<T_0$, поскольку $\Psi$ – непрерывная, неубывающая и непостоянная. Выбирая $t_*\in(t_0,T_0)$, получаем, что

$$\frac{\Psi(t)-\Psi(0)}{t}\ \geqslant\frac{\Psi(t_*)-\Psi(0)}{t_*}>0,\qquad\forall\ t\in[t_*,\infty),$$

в силу выпуклости функции $\Psi$ (см. предложение I.4.5 в [141]), т.е. $\Psi(t)\geqslant at$ при $t\geqslant t_*$, где $a=[\Psi(t_*)-\Psi(0)]/t_*>0$. После замены $\tau=t^{\frac{1}{n-1}}$ получаем, что $\psi^m(\tau)\geqslant a\tau^{n-1}$ для всех $\tau\in[\tau_*,\infty]$, где $\tau_*=t_*^{\frac{1}{n-1}}$. Таким образом, применяя неравенство $e^\psi\geqslant\psi^k/k!$ для всех $k=lm$, $l\in\mathbb{N}$, получаем, из (10.95), что

$$\int\limits_D K_{f_j}^{l(n-1)}(x)\ \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n}\leqslant\tau_*^l S(D)\ +\ (lm)!M/a^l<\infty\,,\quad \forall\, j,l\in\ \mathbb{N}\,,$$

где через $S(D)$ обозначен сферический объем $D$. Следовательно, по предложению **??** $f_j\in W^{1,p}_{\rm loc}(D)$ для всех $p\in[1,n)$ и, в частности, $f_j\in W^{1,\varphi}_{\rm loc}(D)$, $j=1,2,\ldots$, где $\varphi(t)=t^{p_*}$ и $p_*\in(n-1,n)$. Кроме того, так как $e^\psi\geqslant\psi^m/m!$, получаем из условия (10.95), что

$$\int\limits_D\Psi(K_{f_j}^{n-1}(x))\,\frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n}\leqslant m!M<\infty\quad\forall\, j\in\mathbb{N}\,. \tag{10.107}$$

Таким образом, по теореме 10.5 отображением $f$ является гомеоморфизмом.

Следовательно, в силу следствия 10.16 и оценок для $K_{f_j}$, доказанных выше, получаем, что

$$\int\limits_D K_f^{l(n-1)}(x)\ \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n}\leqslant\tau_*^l S(D)\ +\ (lm)!M/a^l<\infty\quad\forall\, l\in\mathbb{N}\,,$$

$f\in W^{1,p}_{\rm loc}(D)$ для всех $p\in[1,n)$ и $f$ дифференцируемо п.в. в $D$.

Наконец, в силу теоремы 10.10, примененной к функции $\Phi(t)=e^{\psi(t^{n-1})}$, заключаем, что $f$ удовлетворяет условию (10.95) и потому $f\in\mathcal{S}^\psi_M$. Таким образом, класс $\mathcal{S}^\psi_M$ является замкнутым и, следовательно, компактным. □

**Замечание 10.12.** В качестве примеров выпуклых функций $\psi$, удовлетворяющих условию (10.104) теоремы 10.17, могут быть конечные произведения функций $\alpha t^\beta$, $\alpha>0$, $\beta\geqslant 1$, и некоторых из функций вида $[\log(A_1+t)]^{\alpha_1}$, $[\log\log(A_2+t)]^{\alpha_2}$, $\ldots$, $\alpha_m\geqslant-1$, $A_m\in\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{N}$, $t\in[T,\infty]$, $\psi(t)\equiv\psi(T)$, $t\in[1,T]$, где $T\in{\rm I}$ достаточно велико.

## 10.8. Точность условий

Как уже отмечалось в замечании 10.10, условие (10.102) в теореме 10.16 является необходимым и влечёт условие (8.30). В этом параграфе мы покажем, что и другие основные условия на функцию $\Phi$, присутствующие в теоремах 10.8, 10.10, 10.16 и 10.17, являются также необходимыми. Докажем здесь следующий результат.

**Теорема 10.18.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и пусть $\Phi : \bar{\mathrm{I}} \to \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – непостоянная функция, удовлетворяющая условию $\Phi(\infty) = \infty$. Если $\Phi$ либо 1) не выпукла, либо 2) не является неубывающей, либо 3) не является непрерывной слева в точке $T = \sup\limits_{\Phi(t)<\infty} t$, то существует последовательность гомеоморфизмов $f_j$ из $D$ в $\mathbb{R}^n$ класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(D)$, сходящаяся локально равномерно к дифференцируемому п.в. отображению $f : D \to \mathbb{R}^n$, такая что на каждом открытом ограниченном множестве $\Omega \subseteq D$*

$$\int\limits_{\Omega} \Phi(P_f(x))\, \Psi(x)\, dm(x) > \limsup_{j\to\infty} \int\limits_{\Omega} \Phi(P_{f_j}(x))\, \Psi(x)\, dm(x) \qquad (10.108)$$

*для любой непрерывной функции $\Psi : \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ и, в частности, для функций $\Psi(x) \equiv 1$ и $\Psi(x) = 1/(1+|x|^2)^n$.*

Доказательство теоремы 10.18 основывается на ряде лемм, которые могут иметь самостоятельный интерес. Их прототипы в плоском случае могут быть найдены в статьях [185, 278], а также в монографии [29], см. лемму 12.1.

**Лемма 10.8.** *Пусть $t_1$ и $t_2 \in \mathrm{I}$, $\lambda \in [0,1]$. Тогда существует последовательность $K$-квазиконформных отображений $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ с $K = \max(t_1^{n-1}, t_2^{n-1})$ и дилатациями $P_{f_j}$, $j = 1, 2, \ldots$, принимающими только два значения $t_1$ и $t_2$ п.в., которая сходится равномерно в $\mathbb{R}^n$ к аффинному отображению $f$ с дилатацией*

$$P_f(x) \equiv t_0 :\, = \lambda t_1 + (1-\lambda) t_2\,, \qquad (10.109)$$

*где выбор последовательности измеримых множеств*

$$E_j = \{x \in \mathbb{R}^n : P_{f_j}(x) = t_1\} \qquad (10.110)$$

*зависит только от $\lambda$, но не зависит от чисел $t_1$ и $t_2$. Кроме того, для любой функции $\Phi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ и любой непрерывной функции $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ на* *каждом множестве $E$ в $\mathbb{R}^n$ конечной меры Лебега существует предел*

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_E \Phi(P_{f_j}(x))\ \Psi(x)\,dm(x) \quad = \tag{10.111}$$

$$= \quad \{\lambda\Phi(t_1)+(1-\lambda)\Phi(t_2)\}\int\limits_E \Psi(x)\,dm(x)\,.$$

**Доказательство.** Прежде всего зададим аффинные отображения $g_l:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $l=0,1,2$, в терминах координат $x=(x_1,\ldots,x_n)$ и координатных функций $y=(y_1,\ldots,y_n)$, полагая $y_1\equiv x_1\ldots,y_{n-1}\equiv x_{n-1}$ и $y_n=t_l\,x_n$, $l=0,1,2$. Очевидно, что $P_{g_l}(x)\equiv t_l$, $l=0,1,2$.

Зафиксируем $j=1,2,\ldots$ и разобьём пространство $\mathbb{R}^n$ на слои гиперплоскостями $\mathrm{H}_{jm}=\{x\in\mathbb{R}^n: x_n=m\,2^{-j}\}$, $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$. В свою очередь, разобъём каждый такой слой на два слоя при помощи гиперплоскости $\tilde{\mathrm{H}}_{jm}=\{x\in\mathbb{R}^n: x_n=m\,2^{-j}+\lambda\,2^{-j}\}$.

Далее, положим $f_j(x)=g_1(x)$ для всех $x\in\mathbb{R}^n$, лежащих между гиперплоскостями $\mathrm{H}_{j\,0}$ и $\tilde{\mathrm{H}}_{j\,0}$. Для всех остальных слоев, положим $f_j(x)=g_l(x)+c^{(l)}_{j\,m}e_n$, где $l=1$ между гиперплоскостями $\mathrm{H}_{j\,m}$ и $\tilde{\mathrm{H}}_{j\,m}$, и $l=2$ между гиперплоскостями $\tilde{\mathrm{H}}_{j\,m}$ и $\mathrm{H}_{j\,(m+1)}$, а постоянные $c^{(l)}_{j\,m}$ находятся индукцией по $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$ в обе стороны от нуля из условия склеивания. Также полагаем $f(x)\equiv g_0(x)$ в $\mathbb{R}^n$.

Заметим, что по построению $\Delta f_j=\{\lambda t_1+(1-\lambda)t_2\}\,2^{-j}\,e_n=t_0\,2^{-j}\,e_n=$ $=\Delta g_0$ для $\Delta x=2^{-j}e_n$, см. также (10.109), и $f_j(x)=g_1(x)=g_0(x)$ на гиперплоскости $\mathrm{H}_{j\,0}$. Т.к. $\mathrm{H}_{j\,m}$ совпадает с $\mathrm{H}_{(j+1)\,2m}$, набор указанных гиперплоскостей только растет с ростом $j$. Следовательно, $f_j(x)=f(x)$ на всех гиперплоскостях $\mathrm{H}_{j\,m}$, $j=1,2,\ldots$, $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$, которые являются всюду плотными в $\mathbb{R}^n$ и, кроме того, $|f_j(x)-f(x)|\leqslant t_0 2^{-j}$ для всех $j=1,2,\ldots$ и всех $x\in\mathbb{R}^n$. Таким образом, $f_j(x)\to f(x)$ при $j\to\infty$ равномерно относительно $x\in\mathbb{R}^n$. Соотношение (10.111) непосредственно следует из распределения мер между величинами $t_1$ и $t_2$ в дилатациях $P_{f_j}$, $j=1,2,\ldots$ □

**Лемма 10.9.** *Пусть $\tau_0$ и $\tau_*\in\mathrm{I}$, $\tau_*>\tau_0$. Тогда существует последовательность $K$-квазиконформных отображений $f_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ с $K=\tau_*^{(n-1)^2}$ и дилатациями $P_{f_j}$, $j=1,2,\ldots$, принимающими только одно значение $\tau_*$ п.в., которая сходится равномерно в $\mathbb{R}^n$ к аффинному отображению $f$ с дилатацией $P_f(x)=\tau_0$.*

**Доказательство.** Легко видеть, что заключение леммы 10.9 следует из построения, приведенного в доказательстве леммы 10.8 с выбором

$t_0 = \tau_0$, $t_1 = \tau_*^{1-n}$ и $t_2 = \tau_*$ и числом

$$\lambda = \frac{\tau_* \; - \; \tau_0}{\tau_* - \tau_*^{1-n}} \in (0,1)\,,$$

которое находится из соотношения $\tau_0 = \lambda\tau_*^{1-n} + (1-\lambda)\tau_*$. $\square$

**Лемма 10.10.** *Пусть $\tau_0$ и $\tau_j \in \mathrm{I}$, $j = 1, 2, \ldots$, такие что $\tau_j \to \infty$ при $j \to \infty$. Тогда существует последовательность квазиконформных отображений $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ с дилатациями $P_{f_j}$, $j = 1, 2, \ldots$, принимающими только два значения $\tau_0$ и $\tau_j$ п.в., которая сходится равномерно в $\mathbb{R}^n$ к липшицевому гомеоморфизму $f$ с дилатацией $P_f$, принимающей только два значения $\tau_0$ и $\infty$ п.в. Кроме того, $f$ в терминах координат $x_i$ и координатных функций $y_i$, $i = 1, \ldots, n$ имеет простой вид: $y_i = x_i$, $i = 1, \ldots, n-1$ и $y_n = \psi(x_n)$, $\psi(x_n + 1) = \psi(x_n) + c$ . Дополнительно можно предполагать, что $|\{x \in C : \; P_f(x) = \infty\}| = \lambda$ при любом предписанном $\lambda \in (0,1)$, где $C = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant x_i \leqslant 1, \; i = 1, \ldots, n\}$ – единичный куб в $\mathbb{R}^n$.*

**Доказательство.** Построим последовательность отображений $f_j$ вида $y_i^{(j)} = x_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, и $y_n^{(j)} = \psi_j(x_n)$, где $\psi_j(x_n+1) = \psi_j(x_n) + c_j$, $\psi_j(0) = 0$ и постоянная $c_j = \psi_j(1)$ находится из условия склеивания. Таким образом, достаточно определить $\psi_j$ на единичном отрезке $[0,1]$. На отрезке $[0,1]$ применим процедуру построения канторова множества.

Именно, зафиксируем произвольное $\lambda \in (0,1)$ и положим $q = 1 - \lambda^{-1}$. Выбросим сначала центральный интервал длины $q$ из отрезка $[0,1]$ и обозначим оставшееся множество через $E_1$. После этого построим $\psi_1$, применяя сжатия в $\tau_1^{n-1}$ раз и сдвигов на сегментах множества $E_1$, растяжение в $\tau_0$ раз и сдвиг на $[0,1] \setminus E_1$ и условие склеивания. Рассуждая по индукции, выбрасываем из каждого отрезка множества $E_j$ центральные интервалы равной длины с общей длиной $q^{j+1}$ и обозначаем через $E_{j+1}$ оставшуюся часть $E_j$. Затем строим функцию $\psi_j$ на $[0,1]$, применяя сжатия в $\tau_j^{n-1}$ раз и сдвиги на сегментах множества $E_{j+1}$, растяжения в $\tau_0$ раз и сдвиги на интервалах открытого множества $[0,1] \setminus E_{j+1}$ и условие склеивания. Как легко видеть, канторово множество $E = \cap E_j$ имеет длину $\lambda$.

Пусть $E_0$ – периодическое распространение $E$ на $\mathbb{R}$. Ясно, что $\lim\limits_{j\to\infty} f_j = f$, где $f$ имеет вид $y_i = x_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, и $y_n = \psi(x_n)$ при некоторой функции $\psi$, такой что $\psi(x_n + 1) = \psi(x_n) + c$, $\psi(0) = 0$, где постоянная $c = (1-\lambda)\tau_0$ равна длине множества $[0,1] \setminus E$, помноженной на $\tau_0$, и $|\psi(x_n^{(1)}) - \psi(x_n^{(2)})| \leqslant \tau_0 |x_n^{(1)} - x_n^{(2)}|$ равна суммарной длине всех интервалов открытого множества $[0,1] \setminus E$, лежащих в интервале $(x_n^{(1)}, x_n^{(2)})$, помноженной на $\tau_0$. Таким образом, $f$ является липшицевым гомеоморфизмом и, следовательно, $f$ дифференцируемо п.в. Кроме того, заметим, что почти все точки множества $E_0$ являются его точками плотности, см., напр., [88], и, следовательно, имеем, что $\partial_n f = 0$ для п.в. $x_n \in E_0$. Поэтому $P_f(x) = \infty$ на подмножестве единичного куба $C$ меры $\lambda$. Остальные утверждения леммы очевидны по построению. $\square$

**Доказательство теоремы 10.18.** 1. Предположим сначала, что функция $\Phi$ не является выпуклой на I, т.е. существуют $t_l \in \mathrm{I}$, $l = 1, 2$, $t_1 < t_2$ и $\lambda \in (0, 1)$, такие что

$$\Phi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)) > \lambda\Phi(t_1) \ + \ (1-\lambda)\Phi(t_2)\,.$$

В силу леммы 10.8 существует последовательность гомеоморфизмов $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, с дилатациями $P_{f_j}$, $j = 1, 2, \ldots$, принимающими только два значения $t_1$ и $t_2$ п.в., которая сходится равномерно в $\mathbb{R}^n$ к аффинному отображению $f$ с дилатацией $P_f(x) \equiv t_0$, где $t_0 = \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2$, и соотношение (10.111) выполняется для любой непрерывной функции $\Psi : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$, в частности, для функций вида $\Psi(x) \equiv 1$ и $\Psi(x) = 1/(1+|x|^2)^n$. Таким образом, из вышеприведенного предположения имеем, что

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\Omega} \Phi(P_{f_j}(x)) \ \Psi(x)\, dm(x) < \int\limits_{\Omega} \Phi(P_f(x)) \ \Psi(x)\, dm(x)$$

для любого открытого ограниченного множества $\Omega$ в $D$.

2. Пусть теперь $\Phi$ не является неубывающей на I, т.е., существуют точки $\tau_0$ и $\tau_* \in \mathrm{I}$, $\tau_0 < \tau_*$, такие что $\Phi(\tau_0) > \Phi(\tau_*)$. Тогда по лемме 10.9 существует последовательность гомеоморфизмов $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с дилатациями $P_{f_j}(x) = \tau_*$ п.в., $j = 1, 2, \ldots$ п.в., сходящаяся равномерно в $\mathbb{R}^n$ к аффинному отображению $f$ с дилатацией $P_f(x) \equiv \tau_0$. Таким образом, неравенство (10.108) выполняется для такой последовательности.

3. Далее, пусть $\Phi$ не является непрерывной слева в точке $\mathrm{T} = \sup\limits_{\Phi(t)<\infty} t < \infty$. В силу предыдущего пункта доказательства, мы можем предполагать, что функция $\Phi$ является неубывающей. Тогда существует предел $\Phi(\mathrm{T}-0) \colon = \lim\limits_{t\to\mathrm{T}-0} \Phi(t) < \Phi(\mathrm{T})$. Пусть $t_j$, $j = 1, 2, \ldots$ – последовательность чисел из $[1, \mathrm{T})$, сходящихся к T. Положим $t_0 = \mathrm{T}$ и рассмотрим последовательность гомеоморфизмов $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, заданную в терминах координат $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и координатных функций $y = (y_1, \ldots, y_n)$ : $y_1 \equiv x_1 \ldots, y_{n-1} \equiv x_{n-1}$ и $y_n = t_j\, x_n$,

$j = 0, 1, 2, \ldots$. Очевидно, что $f_j \to f \colon = f_0(x)$ и $P_{f_j}(x) \to P_f(x)$ равномерно в $\mathbb{R}^n$ при $j \to \infty$, поскольку $P_{f_j}(x) \equiv t_j$ и, таким образом, неравенство (10.108) справедливо для такой последовательности.

Наконец, пусть $\sup\limits_{\Phi(t)<\infty} t = \infty$, и пусть функция $\Phi$ не является непрерывной слева в точке $\infty$. Из пунктов доказательства 1) и 2) можем считать, что $\Phi$ не убывает и выпукла на I. Также можно предполагать, что функция $\Phi$ продолжена с $\bar{\mathrm{I}}$ на $\overline{\mathbb{R}^+}$ при помощи равенства: $\Phi(t) \equiv \Phi(1)$ для всех $t \in [0, 1)$. Так продолженная функция $\Phi$ не убывает и выпукла, см., напр., предложение I.4.8 в [141].

Если $\Phi$ не является постоянной на I, то $t_0 = \sup\limits_{\Phi(t)=\Phi(0)} t < \infty$. Выбирая $t_* \in (t_0, \infty)$, имеем, что

$$\frac{\Phi(t) - \Phi(0)}{t} \geqslant \frac{\Phi(t_*) - \Phi(0)}{t_*} > 0 \qquad \forall\, t \in [t_*, \infty)$$

в силу выпуклости $\Phi$ (см., напр., предложение I.4.5 в [141]), т.е. $\Phi(t) \geqslant at$ для $t \geqslant t_*$, где $a = [\Phi(t_*) - \Phi(0)]/t_* > 0$. Однако тогда $\Phi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, т.е. $\Phi$ непрерывна в $\infty$.

Таким образом, остается рассмотреть случай, когда $\Phi(t)$ – постоянная на I. Но в этом случае заключение теоремы 10.18 следует из леммы 10.10. $\Box$

# Часть IV. Граничное поведение отображений на многообразиях

В данной части приведена теория граничного поведения отображений классов Соболева и Орлича-Соболева на римановых многообразиях, развитая в работе [6], см. также [5].

## Глава 11. Граничное поведение кольцевых $Q$-гомеоморфизмов

В данной главе исследуется проблема продолжения на границу кольцевых $Q$-гомеоморфизмов между областями на римановых многообразиях. Формулируются условия на функцию $Q(x)$ и границы областей, при которых всякий кольцевой $Q$-гомеоморфизм допускает непрерывное или гомеоморфное продолжение на границу.

### 11.1. Введение

Первые специфические многомерные эффекты теории квазиконформных отображений были отмечены М.А. Лаврентьевым в статье [49]. Хотя многие утверждения из этого исследования долгое время не были доказаны и не получили должного развития. Систематическое изучение пространственных квазиконформных отображений началось уже в конце 50-х – начале 60-х годов в основном в России (Лаврентьев [50, 52], Шабат [109, 110], Решетняк [74, 75], Белинский [8]), Финляндии (Вяйсала [316, 317]) и США (Геринг [170, 171]).

Отметим также, что понятие конформного модуля семейства кривых на плоскости, как конформного инварианта, родилось у Берлинга и Альфорса [115] и оформилось в метод экстремальных длин, который, в свою очередь, появился из приемов Грёча. Метод экстремальных длин или модулей и сам этот конформный инвариант успешно используются как в геометрической функции, так и за ее пределами, применяется к исследованию граничного поведения конформных и квазиконформных отображений [110,179,304] или к качественным вопросам магнитной гидродинамики и теории зацеплений [167, 168]. Само понятие конформных инвариантов (емкость, модуль или экстремальная длина), как уже упоминалось выше, связано с именем Альфорса [114, 115, 304]. Используя эти инварианты, на многообразии появилась возможность вводить конформно-инвариантную метрику, см., напр., [**?**, 118, 165, 166, 240] и пополнять многообразие по этой метрике. Сравнительно недавнее красивое применение этих конформных инвариантов, связанное с магнитной гидродинамикой и узлами, описано в [167, 168]. В последние же годы ведущие специалисты в своих работах активно изучают кольцевые $Q$-гомеоморфизмы, см., [85, 86]. Это понятие мотивировано определением квазиконформности по Герингу, см., напр., [171] и представляет собой обобщение и локализацию этого определения, которое впервые было введено В. Рязановым, У. Сребро и Э. Якубовым на плоскости [286, 288]. Заметим, что изначально понятие кольцевого $Q$-гомеоморфизма на комплексной плоскости было изучено и получило начало к тщательному рассмотрению для решения вырожденных уравнений Бельтрами, см., напр., [85, 286]. В данной главе используются как уже упомянутые выше инварианты, так и относительно новое понятие кольцевого $Q$-гомеоморфизма на римановом многообразии.

## 11.2. Предварительные замечания

Далее $D$ и $D_*$ – области на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, $n \geqslant 2$, соответственно.

Напомним некоторые определения, относящиеся к теории многообразий, которые можно найти, напр., в [36, 69, 73, 237]. **$n$-мерное топологическое многообразие** $\mathbb{M}^n$ – это хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, в котором каждая точка имеет открытую окрестность гомеоморфную $\mathbb{R}^n$. **Картой на многообразии** $\mathbb{M}^n$ называется пара $(U, \varphi)$, где $U$ – открытое подмножество пространства $\mathbb{M}^n$, а $\varphi$ – гомеоморфное отображение подмножества $U$ на открытое подмножество координатного пространства $\mathbb{R}^n$, с помощью которого каждой точке $p \in U$ ставится во взаимно однозначное соответствие набор из $n$ чисел, ее **локальных координат**. **Гладкое многообразие** – многообразие с картами $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, локальные координаты которых связаны гладким ($C^\infty$) образом.

**Римановым многообразием** $(\mathbb{M}^n, g)$ называется гладкое многообразие вместе с заданной на нем римановой метрикой, т.е. положительно определенным симметричным тензорным полем $g = g_{ij}(x)$, которое задается в координатных картах с правилом перехода:

$$'g_{ij}(x) = g_{kl}(y(x))\ \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\ \frac{\partial y^l}{\partial x^j}\quad . \tag{11.1}$$

Тензорное поле $g_{ij}(x)$ в дальнейшем также подразумевается гладким.

**Элемент длины** на $(\mathbb{M}^n, g)$ задается инвариантной дифференциальной формой $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j := \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}dx^i dx^j$, где $g_{ij}$ – метрический тензор, $x^i$ – локальные координаты. В соответствии с этим, если $\gamma : [a, b] \to \mathbb{M}^n$ – кусочно-гладкая кривая и $x(t)$ – ее параметрическое задание в локальных координатах, то ее длина вычисляется по формуле

$$s_\gamma = \int\limits_a^b \sqrt{g_{ij}(x(t))\ \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\ dt. \tag{11.2}$$

**Геодезическое расстояние** $d(p_1, p_2)$ определяется как инфимум длин кривых, соединяющих точки $p_1$ и $p_2$ в $(\mathbb{M}^n, g)$, см. [237], с. 94. Любая кривая, соединяющая $p_1$ и $p_2$, на которой реализуется этот инфимум, называется **геодезической**.

Напомним также, что **элемент объема** на $(\mathbb{M}^n, g)$ определяется инвариантной формой

$$dv = \sqrt{\det g_{ij}}\ dx^1...dx^n,$$

а **элемент площади** гладкой поверхности $H$ на $(\mathbb{M}^n, g)$ – инвариантной формой

$$d\mathcal{A} = \sqrt{\det\, g^*_{\alpha\beta}}\ du_1...du_{n-1}\ ,$$

где $g^*_{\alpha\beta}$ – риманова метрика на $H$, порожденная исходной римановой метрикой $g_{ij}$ по формуле:

$$g^*_{\alpha\beta}(u) = g_{ij}(x(u)) \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}. \tag{11.3}$$

Здесь $x(u)$ – гладкая параметризация поверхности $H$ с $\nabla_u x \neq 0$ всюду. Таким образом, метрический тензор $g$ на римановом многообразии порождает соответствующий метрический тензор $g^*$ на произвольной регулярной поверхности, см., напр., § 88 в [73].

Далее под **гиперповерхностью** на многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$ понимается непрерывное отображение $H : U \to \mathbb{M}^n$, где $U$ – область в $(n-1)$-мерном пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ или, более общо, $U$ – $(n-1)$-мерное многообразие, например, $(n-1)$-мерная сфера. Если отображение $H$ является гладким в локальных координатах, то гиперповерхность называют **гладкой**. Например, геодезическая сфера в достаточно малой окрестности произвольной точки гладкого риманова многообразия – гладкая поверхность, см. монографию [237, с. 106].

Для нас важны следующие фундаментальные факты, см., напр., лемму 5.10 и следствие 6.11 в [237], а также [36], с. 260–261.

**Предложение 11.1.** *В каждой точке гладкого риманова многообразия существуют ее окрестности и соответствующие локальные координаты в них, в которых геодезическим сферам с центром в данной точке соответствуют евклидовы сферы с теми же радиусами и с центром в начале координат, а связке геодезических, исходящих из данной точки, соответствует связка отрезков лучей, исходящих из начала координат.*

Окрестности и координаты, указанные в предложении 11.1, принято называть **нормальными**.

**Замечание 11.1.** В частности, в нормальных координатах геодезические сферы имеют естественную гладкую параметризацию через направляющие косинусы соответствующих лучей, исходящих из начала координат. Кроме того, метрический тензор $g$ в начале этих координат совпадает с единичной матрицей, см., напр., предложение 5.11 в [237], а ввиду его непрерывности $g$ произвольно близок к единичной матрице в достаточно малых окрестностях нуля.

В дальнейшем мы используем обозначения геодезических сфер $S(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{M}^n : d(x, x_0) = \varepsilon\}$, геодезических шаров $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \in \mathbb{M}^n : d(x, x_0) < \varepsilon\}$ и геодезических колец $A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{M}^n : r_1 < < d(x, x_0) < r_2\}$, где $d$ – геодезическое расстояние на $(\mathbb{M}^n, g)$.

Пусть $(\mathbb{M}^n, g)$ – гладкое риманово многообразие, $n \geqslant 2$. Будем говорить, что функция $\varphi : \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}$ имеет **конечное среднее колебание в точке** $x_0 \in \mathbb{M}^n$, сокр. $\varphi \in FMO(x_0)$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{1}{v(B(x_0, \varepsilon))} \int_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon| \, dv(x) < \infty \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{M}^n, \qquad (11.4)$$

где

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{v(B(x_0,\varepsilon))} \int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\ dv(x) \tag{11.5}$$

– среднее значение функции $\varphi(x)$ по геодезическому шару $B(x_0, \varepsilon)$ относительно меры объема $v$. Пишем также $\varphi \in$ **FMO**, если $\varphi \in FMO(x_0)$ для всех $x_0 \in \mathbb{M}^n$.

Пусть $\Gamma = \{\gamma\}$ – семейство кривых на $n$-мерном римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$. Измеримая по Борелю неотрицательная функция $\rho : \mathbb{M}^n \to [0, \infty],\ n \geqslant 2$, называется **допустимой** для $\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho ds \geqslant 1 \tag{11.6}$$

для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$. Здесь $ds$ соответствует естественному параметру длины дуги на кривой $\gamma$, вычисляемой относительно геодезического расстояния $d$.

**Модулем семейства кривых** $\Gamma$ называется величина

$$M(\Gamma) := \inf_{\rho\ \in\ adm\ \Gamma} \int\limits_{\mathbb{M}^n} \rho^n dv. \tag{11.7}$$

В дальнейшем, для множеств $A, B$ и $C$ на многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geqslant 2$, символом $\Delta(A, B; C)$ обозначаем множество всех кривых $\gamma : [a, b] \to \mathbb{M}^n$, соединяющих $A$ и $B$ в $C$, т.е. $\gamma(a) \in A$, $\gamma(b) \in B$ и $\gamma(t) \in C$ для всех $t \in (a, b)$.

Кроме того, в дальнейшем подразумевается, что геодезические сферы $S(x_0, r)$, геодезические шары $B(x_0, r)$ и геодезические кольца $A = A(x_0, r_1, r_2)$ лежат в нормальной окрестности точки $x_0$.

Пусть $D$ и $D_*$ – области на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, $n \geqslant 2$, соответственно, и пусть $Q : \mathbb{M}^n \to (0, \infty)$ – измеримая функция. Будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \to D_*$ называется **кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в точке** $x_0 \in \overline{D}$, если

$$M\left(\Delta(fC, fC_0; D_*)\right)\ \leqslant \int\limits_{A\cap D} Q(x) \cdot \eta^n\left(d(x, x_0)\right) dv(x) \tag{11.8}$$

выполняется для любого геодезического кольца $A = A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 < \infty$, любых двух континуумов (компактных связных множеств) $C \subset \overline{B(x_0,\, \varepsilon)} \cap D$ и $C_0 \subset D \setminus B(x_0, \varepsilon_0)$ и любой борелевой функции

$\eta : (\varepsilon, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$, такой что

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta(r)dr \geqslant 1. \tag{11.9}$$

Будем также говорить, что $f$ является **кольцевым $Q$-гомеоморфизмом** в $D$, если (11.8) выполнено для всех точек $x_0 \in \overline{D}$.

**Лемма 11.1.** *Хаусдорфова размерность областей на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ относительно геодезического расстояния совпадает с топологической размерностью $n$. Кроме того, гладкие римановы многообразия локально $n$-регулярны по Альфорсу.*

**Доказательство.** Напомним, что

$$d(z, y) = \inf_{\gamma} s_{\gamma},$$

где инфимум берется по всем кривым $\gamma$, соединяющим $z$ и $y$ в $\mathbb{M}^n$, и где $s_\gamma$ – длина кривой $\gamma$. Здесь $s_\gamma = \int \sqrt{g_{ij}(x(s_*))\, \frac{dx^i}{ds_*} \frac{dx^j}{ds_*}}\ ds_*$, где $s_*$ – естественный параметр длины кривой $\gamma$. Ясно, что в любых локальных координатах $|\frac{dx}{ds_*}| = 1$. Пусть $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n)$, где $\eta^i = \frac{dx^i}{ds_*}$. Оценим геодезическое расстояние $d(z, y)$ через евклидово расстояние $r(z, y)$ в локальных координатах. Для этой цели рассмотрим функцию

$$\varphi_{x_0}(\eta) = g_{ij}(x_0)\ \eta^i \eta^j,$$

заданную на единичной сфере $|\eta| = 1$ в $\mathbb{R}^n$, где $x_0 \in \mathbb{M}^n$ – фиксированная точка. По определению метрический тензор $g_{ij}$ является положительно определенным и непрерывным. Так как непрерывная на компакте $|\eta| = 1,\ \eta \in \mathbb{R}^n$, функция $\varphi_{x_0}(\eta)$ достигает на нем своего максимума и минимума,

$$0 < m_{x_0} < \varphi_{x_0}(\eta) < M_{x_0} < \infty\ , \tag{11.10}$$

где $m_{x_0}$ и $M_{x_0}$ – константы, зависящие от $x_0$.

Более того, ввиду непрерывной зависимости $\varphi_x(\eta)$ по совокупности переменных $x$ и $\eta$, (11.10) имеет место не только в точке $x_0$, но и во всех точках $x$ некоторой окрестности $x_0$.

Таким образом, локально имеем двухстороннюю оценку геодезического расстояния через евклидово расстояние в соответствующей системе координат

$$m \cdot r(z, y) \leqslant d(z, y) \leqslant M \cdot r(z, y)\ ,$$

где $0 < m \leqslant M < \infty$.

С другой стороны, из тех же соображений имеем локальную двухстороннюю оценку объема $V(B) = \int\limits_B \sqrt{\det g_{ij}}\, dx^1...dx^n$ геодезических шаров B через их евклидов объем $W(B)$:

$$\widetilde{m} \cdot W(B) \leqslant V(B) \leqslant \widetilde{M} \cdot W(B), \qquad (11.11)$$

поскольку $det\ g_{ij}$ положителен и непрерывен.

Комбинируя (11.10) и (11.11), получаем, что локально

$$c \cdot d^n \leqslant V(B) \leqslant C \cdot d^n,$$

где $d$ – геодезический радиус шаров $B$.

Таким образом, римановы многообразия являются локально $n$-регулярными по Альфорсу, а значит их хаусдорфова размерность совпадает с топологической размерностью $n$, см. [197], с. 62. □

Из леммы 11.1, в частности, получаем локальное условие удвоения меры.

**Следствие 11.1.** *Для любой точки $x_0$ на гладком римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$ найдутся $r_0 > 0$ и $c \in (1, \infty)$, такие что*

$$v(B(x_0, 2r)) \leqslant cv(B(x_0, r)) \quad \forall\ r \leqslant r_0. \qquad (11.12)$$

Будем говорить, что граница области $D$ – **слабо плоская в точке** $x_0 \in \partial D$, если для любого числа $P > 0$ и окрестности $U$ точки $x_0$ найдется ее окрестность $V \subset U$ такая, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geqslant P \qquad (11.13)$$

для любых континуумов $E$ и $F$ в $D$, пересекающих $\partial U$ и $\partial V$.

Будем также говорить, что граница области $D$ **сильно достижима в точке** $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности $U$ точки $x_0$ найдется компакт $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки $x_0$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geqslant \delta \qquad (11.14)$$

для любого континуума $F$ в $D$, пересекающего $\partial U$ и $\partial V$.

Граница $\partial D$ называется **сильно достижимой** и **слабо плоской**, если соответствующие свойства имеют место в каждой точке границы.

## 11.3. О непрерывном продолжении на границу

Следующее утверждение для римановых многообразий получается из лемм 4.4 и 11.1.

**Лемма 11.2.** *Пусть область $D$ локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\overline{D_*}$ – компакт, а $f : D \to D_*$ – кольцевой $Q$-гомеоморфизм в $x_0$, такой что $\partial D_*$ сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества*

$$C(x_0, f) = \{y \in \mathbb{M}^n_* : \ y = \lim_{k\to\infty} f(x_k), \ x_k \to x_0, \ x_k \in D\}, \qquad (11.15)$$

*$Q : \mathbb{M}^n \to (0, \infty)$ – измеримая функция, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n_{x_0,\varepsilon}(d(x, x_0))\, dv(x) = o(I^n_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)) \qquad (11.16)$$

*при $\varepsilon \to 0$ для некоторого достаточно малого $\varepsilon_0 \in (0, d(x_0))$, где $d(x_0) := = \sup\limits_{x\in D} d(x, x_0)$, и $\psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ – семейство неотрицательных измеримых (по Лебегу) функций на $(0, \infty)$, таких что*

$$I_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon) : = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{x_0,\varepsilon}(t)\, dt < \infty \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\,, \ \varepsilon_0 \in (0, d(x_0)). \qquad (11.17)$$

*Тогда $f$ продолжим в точку $x_0$ по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$.*

Выбирая в лемме 11.2 $\psi(t) \equiv 1/t$, приходим к следующему утверждению.

**Лемма 11.3.** *Пусть область $D$ локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\overline{D_*}$ – компакт, а $f : D \to D_*$ – кольцевой $Q$-гомеоморфизм в $x_0$, такой что $\partial D_*$ сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества $C(x_0, f)$, $Q : \mathbb{M}^n \to (0, \infty)$ – измеримая функция, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{\left(\int\limits_{S(x_0,r)} Q(x) d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{n-1}}} = \infty, \qquad (11.18)$$

*где $\delta(x_0) \in (0, d(x_0))$, $d(x_0) := \sup\limits_{x\in D} d(x, x_0)$, таково что $\overline{B(x_0, \delta(x_0))}$ – нормальная окрестность точки $x_0$. Тогда $f$ продолжим в точку $x_0$ по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$.*

**Доказательство.** Действительно, положим $\varepsilon_0 = \delta(x_0)$ и

$$\psi(t) = \begin{cases} 1/[\int\limits_{S(x_0,t)} Q(x)\, d\mathcal{A}]^{\frac{1}{n-1}}\ , & t \in (0, \varepsilon_0)\ , \\ 0\ , & t > \varepsilon_0\ . \end{cases} \tag{11.19}$$

Тогда, полагая $r = |x - x_0|$, имеем, что

$$\int\limits_{\varepsilon < d(x,x_0) < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n\,(r)\ dv(x)\ = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\left(\int\limits_{S(x_0,r)} Q(x)\ d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{n-1}}} =$$

$$= I_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon) = o(I^n_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)).$$

Таким образом, по лемме 11.2 получаем заключение леммы 11.3. $\square$

**Замечание 11.2.** Заметим, что $I_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon) < \infty$ для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Действительно, для любого $\Delta > 0$, отображение $f$ является кольцевым $Q_\Delta$-гомеоморфизмом, где $Q_\Delta = Q(x) + \Delta$. Полагая

$$\psi_\Delta(t) = \begin{cases} 1/[\int\limits_{S(x_0,t)} Q_\Delta(x)\ d\mathcal{A}]^{\frac{1}{n-1}}\ , & \text{при } t \in (\varepsilon, \varepsilon_0)\ , \\ 0\ , & \text{при } t > \varepsilon_0 \text{ и } t \leqslant \varepsilon, \end{cases}$$

получаем, что

$$I_\Delta(\varepsilon) := \int\limits_{\varepsilon < d(x,x_0) < \varepsilon_0} Q_\Delta(x) \psi^n_\Delta(|x - x_0|)\ dv(x) =$$

$$= \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\left(\int\limits_{S(x_0,r)} Q_\Delta(x)\ d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{n-1}}} < \infty.$$

Пусть $C_\varepsilon$ и $C_0$ – замкнутые дуги окружностей $S(x_0, \varepsilon)$ и $S(x_0, \varepsilon_0)$, лежащие в области $D$, а $\psi^*_\Delta(t)$ – борелева функция, которая почти всюду совпадает с $\psi_\Delta(t)$ (существование такой функции следует из теоремы Лузина). Тогда функция

$$\rho(x) := \begin{cases} \psi^*_\Delta(|x - x_0|)/I_\Delta(\varepsilon)\ , & \text{при } x \in A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)\ , \\ 0\ , & \text{при } x \in \mathbb{M}^n \setminus A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0), \end{cases}$$

является допустимой для семейства кривых $\Gamma = \Delta(C_\varepsilon, C_0; D)$ и по определению кольцевого $Q_\Delta$-гомеоморфизма

$$M(f(\Gamma)) \leqslant \int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q_\Delta(x)\rho^n(x)\ dv(x) = I_\Delta^{1-n}(\varepsilon).$$

Отсюда при $\Delta \to 0$ имеем, что $M(f(\Gamma_0)) \leqslant I_{x_0,\varepsilon_0}^{1-n}(\varepsilon)$, где $\Gamma_0$ – подсемейство $\Gamma$ кривых, лежащих в $\overline{B(x_0,\varepsilon_0)}$. Следовательно, если $I_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon) = \infty$, то $M(f(\Gamma_0)) = 0$, что невозможно по лемме 1.15 в [261], поскольку модуль $f(\Gamma_0)$ в нормальных координатах эквивалентен модулю $M(f(\Gamma_0))$, см., напр., [311].

Комбинируя леммы 4.2 и 11.1, приходим к следующему заключению.

**Лемма 11.4.** *Пусть $D$ – область на гладком римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geqslant 2$. Тогда для любой неотрицательной функции $\varphi : \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}$ класса $FMO(x_0)$*

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} \frac{\varphi(x)\,dv(x)}{\left(d(x,x_0)\log\frac{1}{d(x,x_0)}\right)^n} = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{11.20}$$

*при $\varepsilon \to 0$ и некотором $\varepsilon_0 \in (0,\delta_0)$, где $\delta_0 = \min\left(e^{-e}, d_0\right)$, $d_0 := \sup\limits_{x\in D} d(x,x_0)$.*

Выбирая в лемме 11.2 $\psi(t) = 1/(t\log\frac{1}{t})$, получаем по лемме 11.4 следующую теорему.

**Теорема 11.1.** *Пусть $D$ локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\partial D_*$ сильно достижима, а замыкание $\overline{D_*}$ компактно. Если $Q \in FMO(x_0)$, то любой кольцевой $Q$-гомеоморфизм $f : D \to D_*$ продолжим в точку $x_0$ по непрерывности на многообразии $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$.*

**Следствие 11.2.** *Пусть $D$ локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\partial D_*$ сильно достижима, а $\overline{D_*}$ компактно. Если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \frac{1}{v(B(x_0,\varepsilon))}\int_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\ dv(x) < \infty,$$

*то любой кольцевой $Q$-гомеоморфизм $f : D \to D_*$ продолжим в точку $x_0$ по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$.*

**Теорема 11.2.** *Пусть $D$ локально связна на границе, $\partial D_*$ сильно достижима, $\overline{D_*}$ компактно. Если $Q$ принадлежит $FMO$, то любой* *кольцевой $Q$-гомеоморфизм $f : D \to D_*$ допускает непрерывное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

**Теорема 11.3.** *Пусть $D$ локально связна на границе, $\partial D_*$ сильно достижима, $\overline{D_*}$ компактно и условие (11.18) выполнено для всех $x_0 \in \in \partial D$. Тогда любой кольцевой $Q$-гомеоморфизм $f : D \to D_*$ допускает непрерывное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

**Следствие 11.3.** *Пусть $D$ локально связна на границе $\partial D$, $\partial D_*$ сильно достижима, $\overline{D_*}$ компактно и при $r \to 0$*

$$\frac{1}{r^{n-1}} \int\limits_{S(x_0,r)} Q(x)\ d\mathcal{A} = O\left(\log^{n-1}\frac{1}{r}\right) \qquad \forall\ x_0 \in \partial D. \tag{11.21}$$

*Тогда любой кольцевой $Q$-гомеоморфизм $f : D \to D_*$ допускает непрерывное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

Следующая лемма, ввиду предложения 11.1 и замечания 11.1, следует из ее евклидового аналога, см. недавнюю работу [291].

**Лемма 11.5.** *Пусть $\mathbb{B}_0 = B(x_0, \varepsilon_0)$ – нормальная окрестность точки $x_0$ на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geqslant 2$, $Q : \mathbb{B}_0 \to (0,\infty)$ – измеримая функция и $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ – возрастающая выпуклая функция. Тогда*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{rq^{\frac{1}{p}}(r)} \geqslant \frac{c}{n} \int\limits_{eCM_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{p}}} \qquad \forall\ p \in (0,\infty), \tag{11.22}$$

*где $M_0$ – среднее значение функции $\Phi \circ Q$ над $\mathbb{B}_0$, $q(r)$, $r \in (0,\varepsilon_0)$, – среднее значение функции $Q(x)$ над геодезической сферой $S(x_0,r) = \{x \in \in \mathbb{M}^n : d(x,x_0) = r\}$, $c$ – постоянная, произвольно близкая к единице для малых $\varepsilon_0$.*

Комбинируя леммы 11.3 и 11.5, приходим к следующему результату.

**Теорема 11.4.** *Пусть $D$ локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\partial D_*$ сильно достижима, $\overline{D_*}$ компактно и пусть $f : D \to D_*$ – кольцевой $Q$-гомеоморфизм,*

$$\int\limits_D \Phi(Q(x))\ dv(x) < \infty \tag{11.23}$$

*для возрастающей выпуклой функции $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$, такой что*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \tag{11.24}$$

*при некотором $\delta > \Phi(0)$. Тогда $f$ продолжим в точку $x_0$ по непрерывности.*

Можно показать, что условие (11.24) является не только достаточным, но и необходимым для непрерывного продолжения на границу кольцевых $Q$-гомеоморфизмов с интегральными ограничениями (11.23) на $Q$, см. пример при доказательстве леммы 5.1 для случая $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, в [231].

## 11.4. О продолжении на границу обратных отображений

**Лемма 11.6.** *Пусть $f : D \to D_*$ – кольцевой $Q$-гомеоморфизм с $Q \in L^1(D)$. Если область $D$ локально линейно связна в точках $x_1$ и $x_2 \in \partial D$, $x_1 \neq x_2$, а $D_*$ имеет слабо плоскую границу, то $C(x_1, f) \cap$ $\cap C(x_2, f) = \emptyset$.*

По лемме 11.6 получаем, в частности, следующее заключение.

**Теорема 11.5.** *Пусть $D$ локально связна на границе, $\partial D_*$ – слабо плоская, замыкание $\overline{D}$ компактно и пусть $f : D \to D_*$ – кольцевой $Q$-гомеоморфизм с $Q \in L^1(D)$. Тогда обратное отображение $g =$ $= f^{-1} : D_* \to D$ допускает непрерывное продолжение $\overline{g} : \overline{D_*} \to \overline{D}$.*

Отметим, что условие $Q \in L^1(D)$ в теореме 11.5 нельзя заменить условием $Q \in L^p(D)$ ни при каком $p \in (0, 1)$, см. примеры липшицевых отображений в доказательстве теоремы 5 в [226], теорему 12.3 и следствие 12.1.

**Замечание 11.3.** Из леммы 11.6 следует, что в теореме 11.5 достаточно требовать вместо условия $Q \in L^1_v(D)$ интегрируемость $Q$ в окрестности $\partial D$.

## 11.5. О гомеоморфном продолжении на границу

Комбинируя результаты из двух предыдущих параграфов, получаем следующие теоремы.

**Лемма 11.7.** *Пусть $D$ локально связна на границе, $\partial D_*$ – слабо плоская, а $\overline{D}$ и $\overline{D_*}$ компактны. Если функция $Q \in L^1(D)$ удовлетворяет условию (11.16) в каждой точке $x_0 \in \partial D$, то любой кольцевой $Q$-гомеоморфизм $f : D \to D_*$ продолжим до гомеоморфизма $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

**Теорема 11.6.** *Пусть $D$ локально связна на границе, $\partial D_*$ – слабо плоская, замыкания $\overline{D}$ и $\overline{D_*}$ компактны. Если $Q$ принадлежит классу $FMO$, то любой кольцевой $Q$-гомеоморфизм $f : D \to D_*$ допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

**Теорема 11.7.** *Пусть $D$ локально связна на границе, $\partial D_*$ слабо плоская, $\overline{D}$ и $\overline{D_*}$ компактны, $Q \in \mathrm{L}^1(D)$ и условие (11.18) выполнено для всех $x_0 \in \partial D$. Тогда любой кольцевой $Q$-гомеоморфизм $f : D \to D_*$ допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

**Следствие 11.4.** *Пусть $D$ локально связна на границе, $\partial D_*$ – слабо плоская, $\overline{D}$ и $\overline{D_*}$ компактны и выполнено условие (11.21). Тогда любой кольцевой $Q$-гомеоморфизм $f : D \to D_*$ допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

**Теорема 11.8.** *Пусть $D$ локально связна на границе, $\partial D_*$ - слабо плоская, $\overline{D}$ и $\overline{D_*}$ компактны и пусть $f : D \to D_*$ – кольцевой $Q$-гомеоморфизм, где $Q$ удовлетворяет (11.23) – (11.24). Тогда $f$ допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

# Глава 12. Об отображениях классов Орлича–Соболева на римановых многообразиях

В данной главе изучаются проблемы непрерывного и гомеоморфного продолжения на границу нижних $Q$-гомеоморфизмов между областями на римановых многообразиях, формулируются соответствующие следствия для гомеоморфизмов с конечным искажением классов Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ при условии типа Кальдерона на функцию $\varphi$ и, в частности, классов Соболева $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$.

## 12.1. Введение

Пусть далее $\omega$ – открытое множество в $\overline{\mathbb{R}^k}$ или более общо – $k$-мерное многообразие, где $k = 1, \ldots, n-1$. Тогда **$k$-мерной поверхностью** $S$ на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$ называется произвольное непрерывное отображение $S : \omega \to \mathbb{M}^n$. Поверхности в $\mathbb{M}^n$ размерности $k = n-1$ принято называть **гиперповерхностями**. **Функцией кратности** $N(S, y)$ поверхности $S$ называется число прообразов $y \in \mathbb{M}^n$. Другими словами, символ $N(S, y)$ обозначает кратность накрытия точки $y$ поверхностью $S$. Хорошо известно, что функция кратности является полунепрерывной снизу, т.е., для каждой последовательности $y_m \in \mathbb{M}^n$, $m = 1, 2, \ldots$, такой что $y_m \to y \in \mathbb{M}^n$ при $m \to \infty$, выполняется условие $N(S, y) \geq \liminf_{m\to\infty} N(S, y_m)$, см., напр., [270], с. 160. Отсюда следует, что функция $N(S, y)$ является измеримой по Борелю и, следовательно, измеримой относительно произвольной хаусдорфовой меры $H^k$, см., напр., теорему II (7.6) в [88]. Здесь хаусдорфовы меры соответствуют геодезическому расстоянию на римановом многообразии $\mathbb{M}^n$.

В настоящей главе $H^k$, $k = 1, \ldots, n-1, n$ обозначает **$k$-мерную меру Хаусдорфа** на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$ относительно геодезического расстояния $d$. Точнее, если $A$ – множество в $\mathbb{M}^n$, то

$$H^k(A) := \sup_{\varepsilon>0} H^k_\varepsilon(A),$$

$$H_\varepsilon^k(A) := \inf \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam} A_i)^k \,,$$

где инфимум берётся по всем покрытиям $A$ множествами $A_i$ с $\mathrm{diam}\, A_i < < \varepsilon$, см., напр., [206]. Отметим, что $H^k$ является **внешней мерой в смысле Каратеодори**, см. [88]. Величина

$$\mathrm{dim}_H A = \sup_{H^k(A)>0} k$$

называется **хаусдорфовой размерностью** множества $A$.

В работе [192] было показано, что для любых $p$ и $q \in (0, n)$ множество $A$, такое, что $\mathrm{dim}_H A = p$, может быть отображено при помощи квазиконформного отображения $f$ пространства $\mathbb{R}^n$ на множество $B$ с $\mathrm{dim}_H B = q$.

$k$**-мерной хаусдорфовой площадью** борелевского множества $B$ в $\mathbb{M}^n$ (либо просто **площадью** $B$ при $k = n - 1$), ассоциированной с поверхностью $S : \omega \to \mathbb{M}^n$, называем величину

$$\mathcal{A}_S(B) \;=\; \mathcal{A}_S^k(B) \;:=\; \int\limits_B N(S, y)\, dH^k y \,, \tag{12.1}$$

ср., напр., разд. 3.2.1 в [108]. Поверхность $S$ называется **спрямляемой (квадрируемой)**, если $\mathcal{A}_S(\mathbb{M}^n) < \infty$, см., напр., разд. 9.2 в [252].

Соответственно, для борелевской функции $\rho : \mathbb{M}^n \to [0, \infty]$, её **интеграл над поверхностью** $S$ определяем равенством

$$\int\limits_S \rho \; d\mathcal{A} \;:=\; \int\limits_{\mathbb{M}^n} \rho(y)\, N(S, y)\; dH^k y \,. \tag{12.2}$$

Пусть $D$ – область на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$ $n \geq 2$. Для заданной выпуклой возрастающей функции $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$, обозначим символом $L^\varphi$ пространство всех функций $f : D \to \mathbb{R}$, таких что

$$\int\limits_D \varphi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dv(x) < \infty \tag{12.3}$$

при некотором $\lambda > 0$. Пространство $L^\varphi$ называется **пространством Орлича**.

**Классом Орлича–Соболева** $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(D)$ называется класс всех локально интегрируемых функций $f$, заданных в $D$, с первыми обобщёнными производными (в локальных координатах), градиент $\nabla f$ которых локально в области $D$ принадлежит пространству Орлича $L^{\varphi}$. Заметим, что по определению $W^{1,\varphi}_{\rm loc}\subset W^{1,1}_{\rm loc}$. Как обычно, мы пишем $f\in W^{1,p}_{\rm loc}$, если $\varphi(t)=t^p$, $p\geq 1$.

Далее, если $f$ – локально интегрируемая вектор-функция $n$ вещественных переменных $x_1,\ldots,x_n$, $f=(f_1,\ldots,f_m)$, $f_i\in W^{1,1}_{\rm loc}$, $i=1,\,\ldots,\,m$, и на любом компакте $C\subset D$

$$\int\limits_{C}\varphi\left(\frac{|\nabla f(x)|}{\lambda}\right)\,dv(x)<\infty \tag{12.4}$$

для некоторого $\lambda>0$, где $|\nabla f(x)|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$, то мы также пишем $f\in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$. Мы также используем обозначение $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в случае отображений $f:D\to D_*$ между областями $D$ и $D_*$ на римановых многообразиях разной размерности и для более общих функций $\varphi$, чем в классах Орлича, априори всегда предполагавших выпуклость функции $\varphi$.

## 12.2. Связь $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с нижними $Q$-гомеоморфизмами

Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$. Напомним, что отображение $f:D\to\mathbb{R}^n$ называется **отображением с конечным искажением**, если $f\in W^{1,1}_{\rm loc}$, $J_f(x)\in L^1_{\rm loc}$ и

$$\|f'(x)\|^n\leqslant K(x)\cdot J_f(x)$$

для некоторой почти всюду конечной функции $K(x)$. Здесь $\|f'(x)\|$ обозначает матричную норму якобиевой матрицы $f'$ отображения $f$ в точке $x\in D$,

$$\|f'(x)\|=\sup\limits_{h\in\mathbb{R}^n,|h|=1}|f'(x)\cdot h|\,,$$

$J_f(x)=\det f'(x)$ – якобиан отображения $f$ в точке $x$. В дальнейшем $K_f(x)$ обозначает наименьшую такую функцию $K(x)\geqslant 1$, т.е. полагаем

$$K_f(x)=\begin{cases}\|f'(x)\|^n/J_f(x), & J_f(x)\neq 0;\\ 1, & f'(x)=0;\\ \infty & \text{в остальных точках.}\end{cases}$$

Впервые понятие отображения с конечным искажением введено в случае плоскости для $f \in W^{1,2}_{\rm loc}$ в работе [212]. В дальнейшем это условие было заменено требованием $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$, предполагающим дополнительно, что $J_f \in L^1_{\rm loc}$ (см., напр., [210]). Заметим, что упомянутое дополнительное условие $J_f \in L^1_{\rm loc}$ излишне в случае гомеоморфизмов, поскольку

$$\int\limits_C J_f(x)\,dm(x) \leqslant |f(C)| \tag{12.5}$$

для любого компакта $C$ в $D$, см., напр., пункты 3.1.4, 3.1.8 и 3.2.5 в [108]. Отображения с конечным искажением нашли многих последователей, см. дальнейшие ссылки в [252]. Предшествующие им отображения с ограниченным искажением давно стали классикой теории отображений (см., напр., [77]).

Будем говорить, что гомеоморфизм $f$ между областями $D$ и $D_*$ на римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, $n \geqslant 3$, соответственно, называется **гомеоморфизмом с конечным искажением**, если $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$ и

$$L^n(x,f) \leqslant K(x)\cdot J(x,f)$$

для некоторой почти всюду конечной функции $K(x)$, где

$$J(x,f) = \liminf_{r\to 0} v_*(f(B(x,r)))/v(B(x,r))$$

и

$$L(x,f) = \limsup_{y\to x} d_*(f(x),f(y))/d(x,y).$$

Здесь $B(x,r)$ обозначает геодезический шар в $(\mathbb{M}^n, g)$ с центром в точке $x$ радиуса $r$, $v$ и $v_*$, $d$ и $d_*$ обозначают объемы и геодезические расстояния на многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, соответственно. В дальнейшем $K(x,f)$ обозначает наименьшую такую функцию $K(x) \geqslant 1$, т.е. полагаем

$$K(x,f) = \begin{cases} L^n(x,f)/J(x,f), & J(x,f) \neq 0,; \\ 1, & L(x,f) = 0; \\ \infty, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

**Замечание 12.1.** Переходя к локальным координатам, видим, что определения $K(x,f)$ и $K_f(x)$ согласованы в точках дифференцируемости отображения $f$. Величина $K_f(x)$ инвариантна относительно замен локальных координат и по теореме 8.1 $K(x,f)$ можно вычислять п.в.

через $K_f(x)$ в любых локальных координатах для отображений класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (8.18).

Борелеву функцию $\rho : \mathbb{M}^n \to [0,\infty]$ называем **допустимой** для семейства $k$-мерных поверхностей $\Gamma$ в $\mathbb{M}^n$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, пишем $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_S \rho^k \, d\mathcal{A} \geqslant 1$$

для любого $S \in \Gamma$. **Модуль семейства** $\Gamma$ есть величина

$$M(\Gamma) := \inf_{\rho \in adm\Gamma} \int\limits_{\mathbb{M}^n} \rho^n \; dv.$$

Далее говорим, что некоторое свойство $P$ имеет место для п.в. $S \in \Gamma$, если модуль подмножества $\Gamma_*$ тех $S \in \Gamma$, для которых свойство $P$ нарушается, равен нулю.

Аналогично [252], измеримую относительно меры объема $v$ функцию $\rho : \mathbb{M}^n \to [0,\infty]$ называем **обобщенно допустимой** для семейства $\Gamma$, состоящего из $k$-мерных поверхностей $S$ в $\mathbb{M}^n$, пишем $\rho \in \operatorname{ext}\operatorname{adm}\Gamma$, если условие допустимости выполнено для п.в. $S \in \Gamma$.

Здесь мы говорим также, что семейство $\Gamma_1$ **минорируется** с семейством $\Gamma_2$, пишем $\Gamma_1 > \Gamma_2$, если для любой $S \in \Gamma_1$ найдется $S' \in \Gamma_2$ такая, что $\mathcal{A}_S(B) \geqslant \mathcal{A}_S{}'(B)$ для любого борелевского множества $B$ в $\mathbb{M}^n$. Как известно, тогда $M(\Gamma_1) \leqslant M(\Gamma_2)$, см., напр., [169].

Следующее понятие, мотивированное кольцевым определением Геринга для квазиконформных отображений в [171], было впервые введено в $\mathbb{R}^n$, см. статью [40], а также монографию [252].

Всюду далее мы предполагаем, что $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$ – гладкие римановы многообразия. В дальнейшем подразумевается, что геодезические сферы $S(x_0,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{M}^n : d(x,x_0) = \varepsilon\}$, геодезические шары $B(x_0,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{M}^n : d(x,x_0) < \varepsilon\}$ и геодезические кольца $A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{M}^n : \varepsilon < d(x,x_0) < \varepsilon_0\}$ лежат в нормальной окрестности точки $x_0$.

Пусть даны области $D$ и $D_*$ на $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, $n \geqslant 2$, соответственно, и измеримая функция $Q : D \to (0,\infty)$. Гомеоморфизм $f : D \to D_*$ будем называть **нижним Q-гомеоморфизмом в точке** $x_0 \in \overline{D}$, если существует $\delta_0 \in (0, d(x_0))$, $d(x_0) = \sup\limits_{x \in D} d(x,x_0)$, такое что для всякого $\varepsilon_0 < \delta_0$ и геодезических колец $A_\varepsilon = A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, выполнено

условие
$$M\left(f\left(\Sigma_\varepsilon\right)\right) \geqslant \inf_{\rho \in \mathrm{ext\,adm}\,\Sigma_\varepsilon} \int\limits_{D\cap A_\varepsilon} \frac{\rho^n(x)}{Q(x)}\,dv(x)\ , \tag{12.6}$$

где через $\Sigma_\varepsilon$ обозначено семейство всех пересечений с областью $D$ геодезических сфер $S(x_0,r), r\in(\varepsilon,\varepsilon_0)$.

Говорим, что гомеоморфизм $f\,:\,D\to D_*$ является **нижним $Q$-гомеоморфизмом в области** $D$, если $f$ является нижним $Q$-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0\in\overline{D}$.

Отображение $f:X\to Y$ между метрическими пространствами $X$ и $Y$ называется **липшицевым**, если

$$\mathrm{dist}\ (f(x_1),\,f(x_2))\leqslant M\cdot \mathrm{dist}\ (x_1,\,x_2)$$

для некоторой постоянной $M<\infty$ и всех $x_1,\,x_2\,\in\,X$ . Говорят, что отображение $f:X\to Y$ **билипшицево**, если, оно, во–первых, липшицево и, во–вторых,
$$\mathrm{dist}\ (x_1,\,x_2)\leqslant M^*\cdot \mathrm{dist}\ (f(x_1),\,f(x_2))$$
для некоторой постоянной $M^*<\infty$ и всех $x_1,\,x_2\,\in\,X.$

Следующее важное утверждение впервые было получено в $\mathbb{R}^n$ в препринте [233]. Его доказательство на римановых многообразиях требует некоторой модификации.

**Теорема 12.1.** *Пусть $D$ и $D_*$ – области на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n,g)$ и $(\mathbb{M}^n_*,g^*)$, $n\geqslant 3$, соответственно, $\varphi:[0,\infty)\to$ $\to[0,\infty)$ – возрастающая функция с условием (8.18). Тогда каждый гомеоморфизм $f:D\to D_*$ конечного искажения класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(D)$ является нижним $Q$-гомеоморфизмом в $D$ с $Q(x)=K_f(x)$.*

**Доказательство.** Обозначим через $B$ (борелевское) множество всех точек $x\in D$, где отображение $f$ имеет полный дифференциал $f'(x)$ и $J_f(x)\neq 0$ в локальных координатах. Применяя теорему Кирсбрауна и используя единственность аппроксимативного дифференциала, см., напр., разд. 2.10.43 и теорему 3.1.2 в [108], заключаем, что множество $B$ представляет собой счётное объединение борелевских множеств $B_l$, $l=1,2,\ldots$, таких что отображения $f_l=f|_{B_l}$ являются билипшицевыми гомеоморфизмами, см., напр., лемму 3.2.2 и теоремы 3.1.4 и 3.1.8 в [108]. Без ограничения общности, можно считать, что множества $B_l$ попарно не пересекаются и лежат в картах многообразия $\mathbb{M}^n$. Обозначим также через $B_*$ множество всех точек $x\in D$, где $f$ имеет полный дифференциал и $f'(x)=0$.

По построению множество $B_0 := D \setminus (B \bigcup B_*)$ имеет нулевой объем, см. теорему 8.1 и замечание 11.1. Следовательно, по теореме 9.1 из [252] площадь $B_0 \cap S_r$ равна нулю для почти всех сфер $S_r := S(x_0, r)$ в нормальной окрестности точки $x_0 \in \overline{D}$. Таким образом, по следствию 8.4 и замечанию 11.1, получаем, что площади $f(B_0) \cap S_r^*$ и $f(B_*) \cap S_r^*$ также равны нулю для почти всех таких $S_r$, где $S_r^* = f(S_r)$.

Здесь мы также воспользовались тем, что $B_0$ и $B_*$ можно разбить на счетное число кусков, каждый из которых (и его образ) лежит в карте многообразия $\mathbb{M}^n$ ($\mathbb{M}_*^n$, соответственно.)

Пусть $\Gamma$ обозначает семейство всех пересечений сфер $S_r$, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, в нормальной окрестности с областью $D$. Для произвольной функции $\rho_* \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$, такой что $\rho_* \equiv 0$ вне $f(D)$, полагаем $\rho \equiv 0$ вне $D$ и на $B_0$, и $\rho(x) \ : \ = \ \rho_*(f(x))L(x,f)$ при $x \in D \setminus B_0$. Рассуждая на каждом $B_l$, $l = 1, 2, \ldots$, согласно 1.7.6 и 3.2.1 в [108], получаем

$$\int\limits_{S_r} \rho^{n-1}\, d\mathcal{A} = \int\limits_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) L^{n-1}(x,f)\, d\mathcal{A} \geqslant \int\limits_{S_r^*} \rho_*^{n-1} d\mathcal{A}_* \geqslant 1$$

для почти всех $S_r$, и, следовательно, $\rho \in \operatorname{ext}\operatorname{adm}\Gamma$. Используя замену переменных на $B_l$, $l = 1, 2, \ldots$, см., напр., теоремы 2.10.43 и 3.2.5 в [108], ввиду счётной аддитивности интеграла, получаем оценку (12.6). □

**Следствие 12.1.** *Любой гомеоморфизм $f : D \to D_*$ с конечным искажением класса $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$ является нижним $Q$-гомеоморфизмом в $D$ с $Q(x) = K(x,f)$ п.в.*

**Следствие 12.2.** *В частности, любой гомеоморфизм $f : D \to D_*$ класса $W^{1,1}_{\rm loc}$, такой что $K(x,f) \in L^q_{\rm loc}$ при $q > n-1$, является нижним $Q$-гомеоморфизмом в $D$ с $Q(x) = K(x,f)$ п.в.*

**Доказательство.** Используя неравенства Гёльдера и (12.5) на каждом компакте $C$ в локальных координатах получаем оценку норм первых частных производных

$$\|\partial_i f\|_p \leqslant \|K_f^{1/n}\|_s \cdot \|J_f^{1/n}\|_n \leq \|K_f\|_q^{1/n} \cdot |f(C)|^{1/n} < \infty\,,$$

где $\frac{1}{p} = \frac{1}{s} + \frac{1}{n}$ и $s = qn$, т.е., $\frac{1}{p} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{q} + 1\right)$, и если $q > n-1$, то также $p > n-1$. Итак, мы имеем, что $f \in W^{1,p}_{\rm loc}$, где $p = nq/(1+q) > n-1$, и по следствию 12.1 получаем следствие 12.2. □

## 12.3. Связь нижних $Q$-гомеоморфизмов с кольцевыми

В дальнейшем мы придерживаемся стандартных соглашений, что $a/\infty = 0$ для $a \neq \infty$, $a/0 = \infty$, если $a > 0$ и $0 \cdot \infty = 0$ (см., напр., [88]).

Аналог следующего критерия нижних $Q$-гомеоморфизмов был получен ранее в $\mathbb{R}^n$ (см. теорему 2.1 в [40]).

**Теорема 12.2.** *Пусть $D$ и $D_*$ – области на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, $n \geqslant 2$, соответственно, $Q : D \to (0, \infty)$ – измеримая функция, и пусть $x_0 \in \overline{D}$. Гомеоморфизм $f : D \to D_*$ является нижним $Q$-гомеоморфизмом в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда для любой нормальной окрестности $B(x_0, \varepsilon_0)$ точки $x_0$ с $\varepsilon_0 < d(x_0) := \sup\limits_{x \in D} d(x, x_0)$*

$$M(f\Sigma_\varepsilon) \ \geqslant \ \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{||\,Q||\,_{n-1}(x_0, r)} \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \tag{12.7}$$

*где $\Sigma_\varepsilon$ – семейство всех пересечений с областью $D$ геодезических сфер $S(x_0, r)$, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, и*

$$||\,Q||\,_{n-1}(x_0, r) = \left( \int\limits_{D(x_0,r)} Q^{n-1}(x) \ d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{n-1}} \tag{12.8}$$

*– $L^{n-1}$-норма $Q$ по $D(x_0, r) = \{x \in D : d(x, x_0) = r\} = D \cap S(x_0, r)$.* Заметим, что инфимум в (12.6) достигается для функции

$$\rho_0(x) \ = \ \frac{Q(x)}{||\,Q||_{n-1}(x_0, d(x, x_0))}\,.$$

**Доказательство.** Для любого $\rho \in \operatorname{ext} \operatorname{adm} \Sigma_\varepsilon$

$$A_\rho(r) := \int\limits_{D(x_0,r)} \rho^{n-1}(x) d\mathcal{A} \neq 0$$

п.в. является измеримой функцией по параметру $r$, скажем по теореме Фубини. Таким образом, мы можем требовать равенство $A_\rho(r) = 1$ п.в. вместо условия допустимости и

$$\inf_{\rho \in \operatorname{ext}\ \operatorname{adm} \Sigma_\varepsilon} \int\limits_{D \cap R_\varepsilon} \frac{\rho^n(x)}{Q(x)} \ dv(x) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \left( \inf_{\alpha \in \ I(r)} \int\limits_{D(x_0,r)} \frac{\alpha^p(x)}{Q(x)} \ d\mathcal{A} \right) dr,$$

где $p = n/(n-1)$, $R_\varepsilon = \{x \in \mathbb{M}^n : \varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0\}$ и $I(r)$ обозначает множество всех измеримых функций $\alpha$ на поверхности $D(x_0, r)$ таких, что $\int\limits_{D(x_0,r)} \alpha(x)\, d\mathcal{A} = 1$. Поэтому теорема 12.2 следует из леммы 2.1 работы [40] для $X = D(x_0, r)$ с мерой площади на $D(x_0, r)$ в качестве $\mu, \varphi = \frac{1}{Q}|_{D(x_0,r)}$ и $p = n/(n-1) > 1$. $\Box$

**Лемма 12.1.** *Пусть $D$ и $D_*$ – области на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g_*)$, $n \geqslant 2$, $Q : D \to (0, \infty)$ – измеримая функция и $f : D \to D_*$ – нижний $Q$-гомеоморфизм в точке $x_0 \in \overline{D}$. Тогда*

$$M\left(\Delta(fS_1, fS_2; D_*)\right) \leqslant cI^{1-n}, \tag{12.9}$$

*где $S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{M}^n : d(x, x_0) = r_i\}$, $i = 1, 2$, $0 < r_1 < r_2$, $B(x_0, r_2)$ – нормальная окрестность точки $x_0$,*

$$I = I(x_0, r_1, r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{||Q||_{n-1}(x_0, r)}, \tag{12.10}$$

*$||Q||_{n-1}(x_0, r)$ определено в (12.8), а константа $c$ произвольно близка к 1 в достаточно малых окрестностях точки $x_0$.*

**Доказательство.** По замечанию 11.1 метрический тензор в начале нормальных координат совпадает с единичной матрицей и, следовательно, в достаточно малом шаре с центром в нуле равномерно близок к единичной матрице. Поэтому, согласно равенствам Хессе и Циммера (см. [204] и [327]), имеем, что

$$M\left(\Delta(fS_1, fS_2; D_*)\right)) \leqslant c/M^{n-1}(f\Sigma), \tag{12.11}$$

поскольку $f\Sigma \subset \Sigma(fS_1, fS_2; D_*)$, где $\Sigma$ обозначает совокупность всех геодезических сфер с центром в точке $x_0$, расположенных между сферами $S_1$ и $S_2$, а $\Sigma(fS_1, fS_2; D_*)$ состоит из всех замкнутых множеств в $D_*$, отделяющих $fS_1$ и $fS_2$, $c$ – постоянная, произвольно близкая к единице для достаточно малых окрестностей $x_0$. Таким образом, из теоремы 12.2 получаем оценку (12.9). $\Box$

**Замечание 12.2.** В частности, ввиду гомеоморфности $f$, из неравенства (12.9) следует, что $I(x_0, r_1, r_2) \neq \infty$ при $0 < r_1 < r_2$ в нормальной окрестности точки $x_0$.

**Лемма 12.2.** *Пусть $D$ – область на гладком римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in \overline{D}$, $0 < r_1 < r_2 < d(x_0) := \sup\limits_{x \in D} d(x, x_0)$,*

*$A = A(x_0, r_1, r_2)$ – геодезическое кольцо, $B(x_0, r_2)$ – нормальная окрестность точки $x_0$ и пусть $Q : D \to (0, \infty)$ – измеримая функция. Полагаем, в соответствии с (12.8) и (12.10) $\eta_0(t) = 1/I \cdot \|Q\|_{n-1}(x_0, t)$. Тогда*

$$I^{1-n} = \int\limits_{A \cap D} Q^{n-1}(x) \cdot \eta_0^n\left(d(x, x_0)\right) dv(x) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{A \cap D} Q^{n-1}(x) \cdot \eta^n\left(d(x, x_0)\right) dv(x) \tag{12.12}$$

*для любой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, такой, что*

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr = 1. \tag{12.13}$$

**Следствие 12.3.** *При условиях и обозначениях лемм 12.1 и 12.2*

$$M(\Delta(fS_1, fS_2; D_*)) \leqslant c \int\limits_{A \cap D} Q^{n-1}(x)\ \eta^n(d(x, x_0))\ dv(x). \tag{12.14}$$

**Теорема 12.3.** *Пусть $D$ и $D_*$ – области на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g_*)$, $n \geqslant 2$, соответственно, и пусть $Q : D \to (0, \infty)$ – измеримая функция. Если $f : D \to D_*$ – нижний $Q$-гомеоморфизм в точке $x_0 \in \overline{D}$, то $f$ является кольцевым $Q_*$-гомеоморфизмом в точке $x_0$ с $Q_*(x) = cQ^{n-1}(x)$, где константа $c$ может быть выбрана произвольно близкой к 1.*

**Доказательство.** Поскольку семейство кривых $\Delta(fC_1, fC_2; D_*)$ минорируется семейством $\Delta(fS_1, fS_2; D_*)$, где $S_1 = S(x_0, r_1)$ и $S_2 = S(x_0, r_2)$, то $M(\Delta(fC_1, fC_2; D_*)) \leqslant M(\Delta(fS_1, fS_2; D_*))$ и заключение теоремы 12.3 получается из следствия 12.3. □

**Замечание 12.3.** Комбинируя теорему 12.3 с теоремой 12.1 и следствием 12.1, получаем соответствующие утверждения о гомеоморфизмах $f : D \to D_*$ конечного искажения в классах Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\text{loc}}$ при условии типа Кальдерона (8.18) на функцию $\varphi$ и, в частности, в классах Соболева $W^{1,p}_{\text{loc}}$ при $p > n - 1$ с $Q(x) = K(x, f)$. Наконец, по следствию 12.2 все теоремы данного параграфа верны для любых гомеоморфизмов $f$ класса $W^{1,1}_{\text{loc}}$ с $K_f \in L^q_{\text{loc}}$, $q > n - 1$, и, при этом, $Q(x) = K_f(x)$.

## 12.4. Граничное поведение нижних $Q$-гомеоморфизмов

Ввиду теоремы 12.3 и леммы 11.1 здесь можем применить теорию граничного поведения кольцевых $Q$-гомеоморфизмов в метрических пространствах с мерами, которая была развита в гл. 1 п. 6. Всюду в данной главе $D$ и $D_*$ – области на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g_*)$, $n \geqslant 2$, соответственно.

Начнем со следующего простого, но очень важного результата, ср. теорему 3 в [24].

**Теорема 12.4.** *Пусть $D$ локально связна на границе, $\overline{D}$ компактно, $\partial D_*$ слабо плоская. Если $f : D \to D_*$ является нижним $Q$-гомеоморфизмом с $Q \in L^{n-1}(D)$, то $f^{-1}$ имеет непрерывное продолжение на $\overline{D_*}$.*

**Замечание 12.4.** Отметим, что здесь условие $Q \in L^{n-1}(D)$ нельзя заменить на условие $Q \in L^p(D)$ ни при каком $p < n-1$, см., напр., примеры липшицевых отображений в доказательстве теоремы 5 в [226], а также теорему 12.3 и следствие 12.1. Однако здесь достаточно предполагать, что $Q \in L^{n-1}(D \cap U)$ для некоторой окрестности $U$ границы $D$.

Теорема 12.4 получается непосредственно из следующей леммы рассуждением от противного.

**Лемма 12.3.** *Пусть $z_1$ и $z_2 \in \partial D$, $z_2 \neq z_1$ и $f : D \to D_*$ – нижний $Q$-гомеоморфизм в точке $z_1$, и пусть функция $Q$ интегрируема в степени $n-1$ на гиперповерхностях*

$$D(r) \;=\; \{x \in D : d(x, z_1) = r\} \;=\; D \cap S(z_1, r) \tag{12.15}$$

*для некоторого множества $E$ чисел $r < d(z_1, z_2)$ положительной линейной меры и геодезических сфер $S(z_1, r)$ из нормальной окрестности точки $z_1$. Если $D$ локально связна в точках $z_1$ и $z_2$, а $\partial D_*$ слабо плоская, то*

$$C(z_1, f) \cap C(z_2, f) \;=\; \varnothing. \tag{12.16}$$

Здесь $C(z_1, f)$ и $C(z_2, f)$ обозначают предельные множества отображения $f$ в точках $z_1$ и $z_2$, соответственно.

**Доказательство.** Пусть $d = \min(r_1, d(z_1, z_2))$, где $r_1$ – радиус нормальной окрестности точки $z_1$. Выбираем $\varepsilon_0 \in (0, d)$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, такими что множество $E_* = \{r \in E : r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)\}$ имеет положительную меру. Такой выбор возможен ввиду счетной аддитивности линейной меры, а также ввиду исчерпания $E = \cup_{m=1}^{\infty} E_m$, где $E_m = \{r \in E : r \in (1/m, d-1/m)\}$. Заметим, что каждая геодезическая сфера $S(z_1, r)$, $r \in E_*$, отделяет точки $z_1$ и $z_2$ в $\mathbb{M}^n$, и $D(r)$, $r \in E_*$, отделяет их в $D$. По теореме 12.2 имеем, что $M(f\Sigma_\varepsilon) > 0$, где $\Sigma_\varepsilon$ обозначает семейство всех пересечений геодезических сфер $S(z_1, r)$, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, с областью $D$.

Предположим, что $C_1 \cap C_2 \neq 0$, где $C_i = C(z_i, f)$, $i = 1, 2$. Так как $D$ локально связна в точках $z_1$ и $z_2$, существуют их нормальные окрестности $U_i$, такие что $W_i = D \cap U_i$, $i = 1, 2$, связны, $U_1 \subset B(z_1, \varepsilon)$ и $U_2 \subset \mathbb{M}^n \setminus B(z_1, \varepsilon_0)$. Положим $\Gamma = \Delta(\overline{W_1}, \overline{W_2}; D)$. Тогда по минорированию, см., напр., [169] и теорему 6.2 в [320],

$$M(f\Gamma) \leqslant M(\Delta(fS(z_1, \varepsilon)), (fS(z_1, \varepsilon_0)); D_*),$$

и по лемме 12.1 $M(f\Gamma) \leqslant c \cdot I^{1-n} < \infty$, поскольку $\|Q\|_{n-1}(x_0, r) \neq \infty$ на множестве положительной меры $E_* \subseteq (\varepsilon, \varepsilon_0)$.

Пусть $y_0 \in C_1 \cap C_2$. Выберем $r_0 > 0$, такое что $S(y_0, r_0) \cap fW_1 \neq \neq 0$ и $S(y_0, r_0) \cap fW_2 \neq 0$. По условию $\partial D_*$ слабо плоская, и, следовательно, для любого $M_0 > M(f\Gamma)$ найдется $r_* \in (0, r_0)$, такое что $M(\Delta(E, F; D_*)) \geqslant M_0$ для всех континуумов $E$ и $F$ в $D_*$, пересекающих обе геодезические сферы $S(y_0, r_0)$ и $S(y_0, r_*)$. Однако эти сферы можно соединить кривыми $P_1$ и $P_2$ в областях $fW_1$ и $fW_2$, соответственно, и для этих кривых $M_0 \leqslant M(\Delta(P_1, P_2; D_*)) \leqslant M(f\Gamma)$. Полученное противоречие опровергает предположение, что $C_1 \cap C_2 \neq 0$. □

Ввиду замечания 12.2 и по лемме 12.3, мы также получаем следующий результат.

**Теорема 12.5.** *Пусть $D$ локально связна на границе, $\overline{D}$ компактно, $\partial D_*$ – слабо плоская и*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{\|Q\|_{n-1}(x_0, r)} = \infty \qquad \forall\ x_0 \in \partial D \tag{12.17}$$

*для некоторого $\delta(x_0) \in (0, d(x_0))$, где $d(x_0) := \sup\limits_{x \in D} d(x, x_0)$, такого что $B(x_0, \delta(x_0))$ – нормальная окрестность точки $x_0$ и*

$$\|Q\|_{n-1}(x_0, r) = \left( \int\limits_{S(x_0, r) \cap D} Q^{n-1}(x)\ d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{n-1}}. \tag{12.18}$$

*Тогда для любого нижнего $Q$-гомеоморфизма $f : D \to D_*$, его обратное отображение $f^{-1}$ допускает непрерывное продолжение на $\overline{D_*}$.*

**Лемма 12.4.** *Пусть $D$ локально связна в $x_0 \in \partial D$, $\partial D_*$ сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества $C(x_0, f)$ и $\overline{D_*}$ компактно, $Q : \mathbb{M}^n \to (0, \infty)$ – измеримая функция и пусть $f : D \to D_*$ – нижний $Q$-гомеоморфизм в точке $x_0$. Если условие (12.17) выполнено в точке $x_0$, то $f$ продолжим в $x_0$ по непрерывности.*

**Доказательство.** Отметим, что предельное множество $L = C(x_0, f) \neq \varnothing$ ввиду компактности $\overline{D_*}$. По условию $\partial D_*$ сильно достижима в точке $y_0 \in L$. Допустим, что существует хотя бы еще одна точка $z_0 \in L$. Пусть $U = B(y_0, r_0)$, где $0 < r_0 < d_*(y_0, z_0)$.

В силу локальной связности области $D$ в точке $x_0$ найдется последовательность окрестностей $V_k$ точки $x_0$ такая, что $D_k = D \cap V_k$ – области и $\mathrm{diam} V_k \to 0$ при $k \to \infty$. Выбираем точки $y_k$ и $z_k \in F_k = f(D_k)$ с $d_*(y_0, y_k) < r_0$ и $d_*(y_0, z_k) > r_0$, $y_k \to y_0$ и $z_k \to z_0$ при $k \to \infty$, которые можно соединить непрерывными кривыми $C_k$ в областях $F_k$, $k = 1, 2, ...$ По построению

$$C_k \cap \partial U \neq \varnothing. \tag{12.19}$$

По условию сильной достижимости точки $y_0$ из $D_*$ найдется компакт $E \subset D_*$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Delta(E, C_k; D_*)) \geqslant \delta \tag{12.20}$$

для достаточно больших $k$. Не ограничивая общности, можно предполагать, что последнее условие выполнено для всех $k = 1, 2, ...$ Отметим, что $C = f^{-1}(E)$ – компакт в $D_*$ и, следовательно, $\varepsilon_0 = dist(x_0, C) > 0$.

Пусть $\Gamma_\varepsilon$ – семейство всех путей связывающих сферы $S(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{M}^n : d(x, x_0) = \varepsilon\}$ и $S(x_0, \varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{M}^n : d(x, x_0) = \varepsilon_0\}$ в $D$. Отметим, что $C_k \subset f(B_\varepsilon)$ для каждого фиксированного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ для больших $k$, где $B_\varepsilon = B(x_0, \varepsilon)$. Таким образом, $M(f\Gamma_\varepsilon) \geqslant \delta$ для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

По неравенству (12.11), где $\Sigma$ – семейство всех поверхностей $D(r) = \{x \in D : d(x, x_0) = r\}$, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, и по теореме 12.2 $M(f\Gamma_\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ ввиду условия (12.17) в точке $x_0$. Полученное противоречие опровергает предположение. $\square$

**Следствие 12.4.** *Пусть $D$ локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\partial D_*$ сильно достижима, $\overline{D_*}$ компактно и*

$$Q(x) = O\left(\log \frac{1}{r}\right) \quad \textit{при} \quad r := d(x, x_0) \to 0.$$

*Тогда любой нижний $Q$-гомеоморфизм $f : D \to D_*$ допускает продолжение в точку $x_0$ по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$.*

Комбинируя лемму 12.4 с леммой 11.5 при $p = n - 1$, получаем следующий результат.

**Теорема 12.6.** *Пусть $D$ локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\partial D_*$ сильно достижима, $\overline{D_*}$ компактно и пусть $f : D \to D_*$ – нижний $Q$-гомеоморфизм,*

$$\int\limits_D \Phi(Q^{n-1}(x))\ dv(x) < \infty \tag{12.21}$$

*для возрастающей выпуклой функции $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$, такой что*

$$\int\limits_\delta^\infty \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \tag{12.22}$$

*при некотором $\delta > \Phi(0)$. Тогда $f$ продолжим в точку $x_0$ по непрерывности.*

**Замечание 12.5.** Условие (12.22) является не только достаточным, но и необходимым для продолжения на границу нижних $Q$-гомеоморфизмов с интегральными условиями (12.21) на $Q$, см. примеры в случае $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, в лемме 5.1 в [231].

Далее, на основе теоремы 12.5 и леммы 12.4, приходим к следующему заключению.

**Теорема 12.7.** *Пусть $D$ локально связна на границе, $\overline{D}$ и $\overline{D_*}$ компактны, $\partial D_*$ – слабо плоская и выполнено условие (12.17). Тогда любой нижний $Q$-гомеоморфизм $f : D \to D_*$ допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

**Следствие 12.5.** *Пусть $D$ локально связна на границе, $\partial D_*$ – слабо плоская, $\overline{D}$ и $\overline{D_*}$ компактны и*

$$Q(x) = O\left(\log \frac{1}{r}\right) \quad \text{при} \quad r := d(x, x_0) \to 0 \quad \forall\ x_0 \in \partial D. \tag{12.23}$$

*Тогда любой нижний $Q$-гомеоморфизм $f : D \to D_*$ допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

Наконец, комбинируя теорему 12.7 с леммой 11.5, имеем следующий результат.

**Теорема 12.8.** *Пусть $D$ локально связна на границе, $\partial D_*$ – слабо плоская, $\overline{D}$ и $\overline{D_*}$ компактны и пусть $f : D \to D_*$ – нижний $Q$-гомеоморфизм, где $Q$ удовлетворяет условиям (12.21) – (12.22). Тогда $f$ допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

**Следствие 12.6.** *В частности, заключение теоремы 12.8 имеет место, если при некотором $\alpha > 0$*

$$\int\limits_{D} e^{\alpha Q^{n-1}(x)} dv(x) < \infty. \tag{12.24}$$

## 12.5. Следствия для классов Орлича–Соболева

Наконец, приведем соответствующие результаты о граничном поведении гомеоморфизмов с конечным искажением классов Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ между областями $D$ и $D_*$ на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, $n \geqslant 3$. Именно ввиду теоремы 12.1, а также следствий 12.1 и 12.2 получаем следующую серию следствий из соответствующих теорем предыдущего параграфа.

**Теорема 12.9.** *Пусть $D$ локально связна на границе, $\overline{D}$ компактно, $\partial D_*$ слабо плоская. Если $f : D \to D_*$ является гомеоморфизмом с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (8.18) и $K_f \in L^{n-1}(D)$, то $f^{-1}$ имеет непрерывное продолжение на $\overline{D_*}$.*

**Теорема 12.10.** *Пусть $D$ локально связна на границе, $\overline{D}$ компактно, $\partial D_*$ слабо плоская, и пусть $f : D \to D_*$ – гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (8.18),*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{\|K_f\|_{n-1}(x_0, r)} = \infty \qquad \forall\ x_0 \in \partial D, \tag{12.25}$$

*для некоторого $\delta(x_0) \in (0, d(x_0))$, где $d(x_0) := \sup\limits_{x \in D} d(x, x_0)$, такого что $B(x_0, \delta(x_0))$ – нормальная окрестность точки $x_0$, и*

$$\|K_f\|_{n-1}(x_0, r) = \left( \int\limits_{S(x_0, r)} K_f^{n-1}\, d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{n-1}}. \tag{12.26}$$

*Тогда $f^{-1}$ допускает непрерывное продолжение на $\overline{D_*}$.*

Здесь мы предполагаем $K_f$ продолженным нулем вне области $D$.

**Теорема 12.11.** *Пусть $D$ локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\partial D_*$ сильно достижима, а $\overline{D_*}$ компактно. Тогда любой гомеоморфизм $f : D \to D_*$ класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (8.18) и $K_f^{n-1} \in FMO(x_0)$ продолжим в точку $x_0$ по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$.*

**Следствие 12.7.** *Пусть $D$ локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\partial D_*$ сильно достижима, а $\overline{D_*}$ компактно. Тогда любой гомеоморфизм $f : D \to D_*$ класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (8.18) и*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, \frac{1}{v(B(x_0,\varepsilon))}\int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} K_f^{n-1}(x)\; dv(x) < \infty \tag{12.27}$$

*продолжим в точку $x_0$ по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$.*

**Теорема 12.12.** *Пусть $D$ локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\partial D_*$ сильно достижима, $\overline{D_*}$ компактно и пусть $f : D \to D_*$ – гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (8.18). Если*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{\|K_f\|_{n-1}(x_0,r)} = \infty \tag{12.28}$$

*для некоторого $\delta(x_0) \in (0, d(x_0))$, где $d(x_0) := \sup\limits_{x\in D} d(x,x_0)$, такого что $B(x_0,\delta(x_0))$ – нормальная окрестность точки $x_0$, и*

$$\|K_f\|_{n-1}(x_0,r) = \left(\int\limits_{S(x_0,r)} K_f^{n-1}\; d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{12.29}$$

*то $f$ имеет продолжение в точку $x_0$ по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$.*

**Теорема 12.13.** *Пусть $D$ локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\partial D_*$ сильно достижима, $\overline{D_*}$ компактно и пусть $f : D \to D_*$ – гомеоморфизм класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (8.18) и*

$$\int\limits_D \Phi(K_f^{n-1}(x))\; dv(x) < \infty \tag{12.30}$$

*для возрастающей выпуклой функции $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ такой, что*

$$\int\limits_\delta^\infty \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \tag{12.31}$$

*при некотором $\delta > \Phi(0)$. Тогда $f$ продолжим в точку $x_0$ по непрерывности.*

**Теорема 12.14.** *Пусть $D$ локально связна на границе, $\partial D_*$ – слабо плоская, $\overline{D}$ и $\overline{D_*}$ компактны. Тогда любой гомеоморфизм $f : D \to D_*$ класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (8.18) и $K_f^{n-1} \in FMO$ допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

**Теорема 12.15.** *Пусть $D$ локально связна на границе $\partial D$, $\partial D_*$ слабо плоская, $\overline{D}$ и $\overline{D_*}$ компактны и пусть $f : D \to D_*$ – гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (8.18). Если выполнено условие (12.28) выполнено во всех точках $x_0 \in \partial D$, то $f$ имеет гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

**Следствие 12.8.** *Пусть $D$ локально связна на границе, $\partial D_*$ – слабо плоская, $\overline{D}$ и $\overline{D_*}$ компактны. Тогда любой гомеоморфизм с конечным искажением $f : D \to D_*$ класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (8.18) и*

$$K_f(x) = O\left(\log\frac{1}{r}\right) \quad \text{при} \quad r := d(x, x_0) \to 0 \qquad \forall\ x_0 \in \partial D \tag{12.32}$$

*имеет гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

**Теорема 12.16.** *Пусть $D$ локально связна на границе $\partial D$, $\partial D_*$ – слабо плоская, $\overline{D}$ и $\overline{D_*}$ компактны и пусть $f : D \to D_*$ – гомеоморфизм класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (8.18) и выполнены условия (12.30)–(12.31). Тогда $f$ допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

**Следствие 12.9.** *В частности, заключения теорем 12.13 и 12.16 имеют место, если при некотором $\alpha > 0$*

$$\int\limits_D e^{\alpha K_f^{n-1}(x)} dv(x) < \infty. \tag{12.33}$$

**Замечание 12.6.** Условие (12.31) является не только достаточным, но и необходимым для непрерывного продолжения на границу гомеоморфизмов с конечным искажением класса Орлича–Соболева с условием (8.18) и с интегральными ограничениями (12.30) на $K_f$, см. пример из доказательства леммы 5.1 для случая $\mathbb{R}^n$ в [231] или [229].

# Приложение А

## О дифференцируемости абсолютно непрерывных функций по Кальдерону

В этом приложении мы в основном следуем статье Кальдерона [145], стараясь сохранить его стиль изложения.

Как было показано еще Кезари на плоскости в работе [147], непрерывная функция $f(x, y)$, которая является абсолютно непрерывной в смысле Тонелли, производные которой из класса $L^p$, $p > 2$, имеет почти всюду полный дифференциал в смысле Штольца. Это не верно при $p = 2$, но результат может быть улучшен следующим образом. Пусть $\varphi(t)$ – неотрицательная выпуклая возрастающая функция, определенная для $0 \leqslant t < \infty$ такая, что $\varphi(0) = 0$. Следуя Орличу, обозначим через $L^\varphi$ класс всех функций $f$, для которых существует константа $\lambda$, зависящая от $f$, такая что

$$\int \varphi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\sigma < \infty\,;$$

тогда, если $f$ является непрерывной и абсолютно непрерывной в смысле Тонелли и $\sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ принадлежит классу $L^\varphi$ локально, $\varphi(t)$ такая, что

$$\int\limits_1^\infty \frac{t}{\varphi(t)}\, dt < \infty\,,$$

то $f$ имеет почти всюду полный дифференциал. Этот результат в некотором смысле является наилучшим из возможных. Фактически, для любой функции $\varphi(t)$ такой, что

$$\int\limits_1^\infty \frac{t}{\varphi(t)}\, dt = \infty, \tag{A1}$$

существует непрерывная и абсолютно непрерывная функция $f$, для которой

$\sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ принадлежит локально классу $L^\varphi$, и которая не имеет почти всюду полного дифференциала.

Общий результат для функций $n$ переменных может быть сформулирован следующим образом: если $f$ – непрерывная и абсолютно непрерывная функция в смысле Тонелли и $|\mathrm{grad}\, f|$ принадлежит локально классу $L^\varphi$, где функция $\varphi$ такова, что

$$\int\limits_1^\infty \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-1}} dt < \infty, \tag{A2}$$

то $f$ имеет почти всюду полный дифференциал в смысле Штольца. Функции этого класса удовлетворяют неравенству (A7) и поэтому принадлежат классу $\varphi$-липшицевых функций, введенного Т. Радо. Как заметил Радо, согласно результату Степанова [309], $\varphi$-липшицевы функции имеют почти всюду полный дифференциал, но мы докажем существование дифференциала прямо, без ссылки на результат Степанова, который является далеко не элементарным.

Пусть $f(P)$, $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, является непрерывной и абсолютно непрерывной функцией в $n$-мерном единичном кубе $K_0$, $0 \leqslant x_i \leqslant 1$. Известно, что для почти всех точек $Q$ и почти всех прямых, проходящих через $Q$, $f(P)$ является абсолютно непрерывной функцией расстояния между $P$ и $Q$. Кроме того, если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – направляющие косинусы и $f_1, f_2, \ldots, f_n$ частный производные функции $f$, то $\frac{df}{ds} = \sum \alpha_i f_i$ для почти всех $s$.

Пусть $Q$ и $Q'$ – две точки из $K_0$ такие, что $f$ абсолютно непрерывна на почти всех прямых, проходящих через $Q$ или $Q'$, $d$ – расстояние между $Q$ и $Q'$, и $D$ – диск радиуса $\frac{d}{2\sqrt{n}}$ с центром в середине отрезка $QQ'$, лежащий в гиперплоскости, перпендикулярной к $QQ'$. Будем считать, что $D$ полностью лежит в $K_0$, и обозначим через $\gamma$ и $\gamma'$ конусы, проектирующие $D$ из точек $Q$ и $Q'$, соответственно. Если $P$ – точка из $D$ такая, что $f$ абсолютно непрерывна на отрезках $PQ$ и $PQ'$, то

$$|f(Q) - f(Q')| \leqslant |f(P) - f(Q)| + |f(P) - f(Q')|$$

и

$$|f(P) - f(Q)| = \int\limits_{QP} \left(\frac{df}{ds}\right) ds \leqslant \int\limits_{QP} \left|\frac{df}{ds}\right| ds,$$

где интеграл берется по отрезку $PQ$. Тогда почти всюду имеем

$$\frac{df}{ds} = \sum \alpha_i f_i \quad \text{и} \quad \left|\frac{df}{ds}\right| \leqslant |\mathrm{grad}\, f|,$$

и поэтому

$$|f(P) - f(Q)| \leqslant \int\limits_{PQ} |\mathrm{grad}\, f|\, ds,$$

и аналогично получаем, что

$$|f(P) - f(Q')| \leqslant \int\limits_{PQ'} |\mathrm{grad}\, f|\, ds,$$

и объединяя оба неравенства получаем, что

$$|f(Q) - f(Q')| \leqslant \int\limits_{PQ} |\mathrm{grad}\, f|\, ds + \int\limits_{PQ'} |\mathrm{grad}\, f|\, ds. \tag{A3}$$

Обозначим через $d\Omega_Q$ элемент телесного угла, проектирующего из точки $Q$ элемент площади на $D$. Тогда $d\Omega_Q = d\Omega_{Q'}$ и

$$\int\limits_D d\Omega_Q = \Omega,$$

где $\Omega$ – фиксированное число, не зависящее от расстояния между точками $Q$ и $Q'$. Интегрируя (A3) относительно $d\Omega_Q$ по $D$, получаем

$$\int\limits_D |f(Q) - f(Q')|\, d\Omega_Q = \Omega\, |f(Q) - f(Q')| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_D d\Omega_Q \int\limits_{PQ} |\mathrm{grad}\, f|\, ds + \int\limits_D d\Omega_{Q'} \int\limits_{PQ'} |\mathrm{grad}\, f|\, ds.$$

Далее, обозначим через $dv$ элемент объема в $K_0$, а через $\varrho$ и $\varrho'$ расстояния до $Q$ и $Q'$, соответственно. Нетрудно видеть, что вышеуказанные повторные интегралы равны интегралам по объему, именно:

$$\int\limits_D d\Omega_Q \int\limits_{QP} |\mathrm{grad}\, f|\, ds = \int\limits_\gamma \frac{|\mathrm{grad}\, f|}{\varrho^{n-1}}\, dv$$

и

$$\int\limits_D d\Omega_{Q'} \int\limits_{Q'P} |\mathrm{grad}\, f|\, ds = \int\limits_{\gamma'} \frac{|\mathrm{grad}\, f|}{\varrho'^{\,n-1}}\, dv,$$

где $\gamma$ и $\gamma'$ – конусы, введенные выше. Поэтому предыдущее неравенство может быть переписано в виде

$$\Omega\,|f(Q)-f(Q')|\leqslant\int\limits_{\gamma}\frac{|\mathrm{grad}\,f|}{\varrho^{n-1}}\,dv+\int\limits_{\gamma'}\frac{|\mathrm{grad}\,f|}{\varrho'^{\,n-1}}\,dv.$$

Пусть теперь точка $Q$ зафиксирована и $K$ – куб с центром в $Q$ и полностью содержащийся в $K_0$. Если $Q'$ – произвольная точка из $K$, конусы $\gamma$ и $\gamma'$ построены для отрезка $QQ'$ вышеуказанным способом, полностью содержатся в $K$; действительно, если $2\delta$ – длина ребра куба $K$, то расстояние между серединой отрезка $QQ'$ и границей куба $K$ не меньше, чем $\delta/2$, а длина отрезка $QQ'$ не превосходит $\sqrt{n}\delta$, так что радиус диска $D$ не больше $\delta/2$, поэтому $D$ и, соответственно, $\gamma$ и $\gamma'$ полностью содержатся в $K$. Вследствие этого имеем

$$\Omega\,|f(Q)-f(Q')|\leqslant\int\limits_{\gamma}\frac{|\mathrm{grad}\,f|}{\varrho^{n-1}}\,dv+\int\limits_{\gamma'}\frac{|\mathrm{grad}\,f|}{\varrho'^{\,n-1}}\,dv\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{K}\left(\frac{1}{\varrho^{n-1}}+\frac{1}{\varrho'^{\,n-1}}\right)|\mathrm{grad}\,f|\,dv.$$

Пусть $R$ – точка из $K$ и $|P-R|$ – расстояние между $P$ и $R$. Тогда

$$|f(Q)-f(Q')|\leqslant\frac{2}{\Omega}\,\sup_{R\in K}\int\limits_{K}\frac{|\mathrm{grad}\,f(P)|}{|R-P|^{n-1}}\,dv. \tag{A4}$$

Следующим шагом получим неравенство (A7). Для этого предположим, что $|\mathrm{grad}\,f|$ принадлежит классу $L^{\varphi}$, где $\varphi$ возрастающая выпуклая функция такая, что $\varphi(0)=0$, и

$$A:=\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-1}}dt<\infty. \tag{A5}$$

Обозначим через $E_m$ множество точек из $K$, для которых

$$2^m\leqslant|\mathrm{grad}\,f|<2^{m+1}.$$

Тогда

$$\int\limits_{K}\frac{|\mathrm{grad}\,f|}{|R-P|^{n-1}}\,dv\leqslant\sum_{m=-\infty}^{+\infty}2^{m+1}\int\limits_{E_m}\frac{dv}{|R-P|^{n-1}}.$$

Теперь не трудно видеть, что интеграл

$$\int\limits_{E_m} \frac{dv}{|R-P|^{n-1}}$$

не превосходит тот же интеграл по шару с центром в точке $R$ и той же меры, как и $E_m$. Поэтому, если $\omega$ – объем шара радиуса 1, то радиус этого шара равен

$$\left(\frac{|E_m|}{\omega}\right)^{1/n}$$

и, значит,

$$\int\limits_{E_m} \frac{dv}{|R-P|^{n-1}} \leqslant \int\limits_0^{\left(\frac{|E_m|}{\omega}\right)^{1/n}} \frac{d(\varrho^n\omega)}{\varrho^{n-1}} = n\omega^{\frac{n-1}{n}}|E_m|^{1/n}.$$

Делая замену выше, получаем

$$\int\limits_K \frac{|\operatorname{grad} f|}{|R-P|^{n-1}}\, dv \leqslant \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^{m+1} n\omega^{\frac{n-1}{n}}|E_m|^{1/n} =$$

$$= 2n\omega^{\frac{n-1}{n}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^m |E_m|^{1/n} \frac{\varphi(2^m)^{1/n}}{\varphi(2^m)^{1/n}}; \tag{A6}$$

и применяя неравенство Гельдера к последней сумме, имеем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^m |E_m|^{1/n} \frac{\varphi(2^m)^{1/n}}{\varphi(2^m)^{1/n}} \leqslant \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} |E_m|\,\varphi(2^m)\right]^{\frac{1}{n}} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2^{mn}}{\varphi(2^m)}\right]^{\frac{1}{n-1}}\right]^{\frac{n-1}{n}}.$$

Далее, в силу определения $E_m$,

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |E_m|\,\varphi(2^m) \leqslant \int\limits_K \varphi(|\operatorname{grad} f|)\, dv;$$

с другой стороны, поскольку $\varphi(t)$ – возрастающая функция,

$$\left[\frac{2^{mn}}{\varphi(2^m)}\right]^{\frac{1}{n-1}} \leqslant \int\limits_{m-1}^{m} \left[\frac{2^{n(s+1)}}{\varphi(2^s)}\right]^{\frac{1}{n-1}} ds,$$

то

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{2^{mn}}{\varphi(2^m)}\right]^{\frac{1}{n-1}} \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{2^{n(s+1)}}{\varphi(2^s)}\right]^{\frac{1}{n-1}} ds.$$

Вводя переменную $t = 2^s$ в интеграле, получаем что

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{2^{mn}}{\varphi(2^m)}\right]^{\frac{1}{n-1}} \leqslant c\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-1}} dt = cA\,,$$

где константа $c$ зависит от $n$.

Делая замену в неравенстве (A6), получаем

$$\int\limits_K \frac{|\mathrm{grad}\, f|}{|R-P|^{n-1}}\, dv \leqslant cA^{\frac{n-1}{n}}\left[\int\limits_K \varphi\left(|\mathrm{grad}\, f|\right)\, dv\right]^{\frac{1}{n}}$$

и из неравенства (A4) имеем

$$|f(Q)-f(Q')| \leqslant cA^{\frac{n-1}{n}}\left[\int\limits_K \varphi\left(|\mathrm{grad}\, f|\right)\, dv\right]^{\frac{1}{n}}, \tag{A7}$$

где константа $c$ зависит от $n$.

Неравенство (A7) справедливо для любых двух точек $Q$ и $Q'$, где $Q'$ содержится в $K$. Это следует из того факта, что определенно справедливо для почти всех $Q$ и почти всех $Q'$ и того, что обе стороны неравенства являются непрерывными функциями точек $Q$ и $Q'$ и длины ребра $K$. Кроме того, выпуклость $\varphi$ не использовалась в рассуждениях, поэтому (A7) справедливо также для невыпуклых функций $\varphi$ при сохранении всех остальных предположений.

Доказательство дифференцируемости $f$ почти всюду зависит сейчас только от одного дополнительного факта, а именно, что для почти всех $Q$ и для кубов $K$ с центром в $Q$ справедливо

$$\lim_{|K|\to 0}\frac{1}{|K|}\int\limits_K \varphi\left(|\mathrm{grad}\, f(P) - \mathrm{grad}\, f(Q)|\right)\, dv = 0. \tag{A8}$$

Приведем набросок доказательства этого факта. Без ограничения общности рассуждений можем считать, что $\varphi\left(2|\mathrm{grad}\, f|\right)$ также интегрируема;

тогда для любого вектора $\vec{a}_r$ с рациональными координатами и для любого рационального числа $s$ функция $\varphi\left(|\mathrm{grad}\, f - \vec{a}_r| + s\right)$ интегрируема и вне множества меры нуль для каждой точки $Q$ и любых $\vec{a}_r$ и $s$ имеем

$$\lim_{|K|\to 0} \frac{1}{|K|} \int\limits_K \varphi\left(|\mathrm{grad}\, f - \vec{a}_r| + s\right) dv = \varphi\left(|\mathrm{grad}\, f(Q) - \vec{a}_r| + s\right).$$

Для того же $Q$ и любого вектора $\vec{a}$ получаем

$$\mathrm{grad}\, f - \vec{a} = \left(\mathrm{grad}\, f - \vec{a}_r\right) + \left(\vec{a}_r - \vec{a}\right),$$

и если $s > |\vec{a}_r - \vec{a}|$, то

$$|\mathrm{grad}\, f - \vec{a}_r| - s \leqslant |\mathrm{grad}\, f - \vec{a}| \leqslant |\mathrm{grad}\, f - \vec{a}_r| - s,$$

$$\varphi\left(|\mathrm{grad}\, f - \vec{a}_r| - s\right) \leqslant \varphi\left(|\mathrm{grad}\, f - \vec{a}|\right) \leqslant \varphi\left(|\mathrm{grad}\, f - \vec{a}_r| - s\right).$$

Усредняя последнее неравенство по $K$ и устремляя $|K| \to 0$, а затем $\vec{a}_r \to \vec{a}$ и $s \to 0$, приходим к соотношению

$$\lim_{|K|\to 0} \frac{1}{|K|} \int\limits_K \varphi\left(|\mathrm{grad}\, f - \vec{a}|\right) dv = \varphi\left(|\mathrm{grad}\, f(Q) - \vec{a}|\right).$$

Заменяя $\vec{a}$ на $\mathrm{grad}\, f(Q)$, получаем требуемый результат.

Возвращаясь к функции $f$, пусть $Q$ – точка, для которой справедливо (A8) и пусть $g(P) := f(P) - f(Q) - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(Q)(x - \bar{x}_i)$, где $x_i$ – координаты точки $P$, а $\bar{x}_i$ – координаты точки $Q$. Если $K$ – куб с центром в точке $Q$ и $Q'$ – точка на границе $K$, то неравенство (A7) влечет неравенство

$$|g(Q') - g(Q)| = |g(Q')| \leqslant cA^{\frac{n-1}{n}} \left[\, \int\limits_K \varphi\left(|\mathrm{grad}\, g|\right) dv \right]^{\frac{1}{n}}.$$

Поскольку $\mathrm{grad}\, g(P) = \mathrm{grad}\, f(P) - \mathrm{grad}\, f(Q)$ и $|K| \leqslant 2^n |Q - Q'|^n$, имеем

$$|g(Q')| \leqslant 2cA^{\frac{n-1}{n}} \,|Q - Q'| \left[\frac{1}{|K|} \int\limits_K \varphi\left(|\mathrm{grad}\, f(P) - \mathrm{grad}\, f(Q)|\right) dv \right]^{\frac{1}{n}}.$$

При $|K| \to 0$ величина в квадратных скобках стремится к нулю; поэтому, полагая $Q' = P$, получаем

$$\frac{|g(P)|}{|P-Q|} = \frac{\left|f(P) - f(Q) - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(Q)(x - \bar{x}_i)\right|}{|P-Q|} \to 0$$

при $P \to Q$. Другими словами, $f(P)$ имеет полный дифференциал в точке $Q$, и доказательство результата закончено.

Теперь мы докажем, что для заданной возрастающей выпуклой функции $\varphi(t)$ такой, что $\varphi(0) = 0$ и

$$\int\limits_{1}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-1}} dt = \infty,$$

существует непрерывная функция $f$, которая абсолютно непрерывна такая, что $|\operatorname{grad} f| \in L^{\varphi}$ и для которой не существует почти всюду полного дифференциала. Это следует из того факта, что при наших предположениях существует функция $F(P) \geqslant 0$, зависящая только от расстояния $\varrho$ от точки $P$ до начала координат (радиальная функция), которая является непрерывно дифференцируемой убывающей функцией переменной $\varrho$ для $\varrho > 0$ и такая, что $F(P) \to \infty$ при $\varrho \to 0$; кроме того, $\int \varphi\left(|\operatorname{grad} F(P)|\right) dv \leqslant 1$. Как только существование $F$ установлено, функция $f$ может быть построена следующим образом.

Обозначим через $P_h^k$ точки внутри куба $K_0$, координаты которых – целые кратные $\frac{1}{2^k}$ и пусть $E_k$ – объединение шаров радиуса $\frac{1}{4^k}$ с центрами в $P_h^k$. Поскольку существует не более $2^{kn}$ точек $P_h^k$ в $K_0$, имеем, что $|E_k| < \omega \frac{1}{2^{kn}}$, где $\omega$ – объем шара радиуса 1. Кроме того, положим

$$F_k(\varrho) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \varrho \geqslant \dfrac{1}{4^k}, \\ \inf \left[4^{kn} \left(\dfrac{2}{3}\right)^k ;\ F(\varrho) - F\left(\dfrac{1}{4^k}\right)\right], & \text{если} \quad 0 \leqslant \varrho < \dfrac{1}{4^k}. \end{cases}$$

С учетом свойств $F(\varrho)$ очевидно, что $F_k(\varrho)$ удовлетворяют равномерному условию липшицевости, что $F_k(0) = 4^{kn}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ и

$$\int \varphi\left(|\operatorname{grad} F_k|\right) dv \leqslant 1.$$

Положим

$$G_k(P) = \sum_h F_k\left(|P - P_h^k|\right)$$

и

$$f(P) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{kn}}\, G_k(P).$$

Поскольку $G_k(P)$ непрерывны и $G_k(P) \leqslant 4^{kn}\left(\frac{2}{3}\right)^k$, то $f(P)$ непрерывна; с другой стороны, имеем

$$\int\limits_{K_0} \varphi\left(|\operatorname{grad} G_k|\right)\, dv \leqslant 2^{kn}.$$

Применяя неравенство Йенсена, получаем

$$\int\limits_{K} \varphi\left(|\operatorname{grad} f|\right)\, dv \leqslant \int\limits_{K_0} \varphi\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{kn}}\, |\operatorname{grad} G_k|\right) dv \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{K_0} \varphi\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{kn}}\, |\operatorname{grad} G_k|}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{kn}}}\right) dv \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{kn}} \int\limits_{K_0} \varphi\left(|\operatorname{grad} G_k|\right) dv}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{kn}}} < \infty,$$

так что $\varphi\left(|\operatorname{grad} f|\right)$ интегрируема и $|\operatorname{grad} f|$ из класса $L^{\varphi}$.

Обозначим теперь $D_l = \bigcup\limits_{k=l}^{\infty} E_k$; тогда $D_l \supset D_{l+1}$ и $\lim\limits_{l\to\infty} |D_l| = 0$, так что множество $D = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} D_k$ имеет меру нуль. Если $Q$ не принадлежит $D$, то $Q$ не содержится в $D_l$ для некоторого $l$, и так как $G_k(P)$ обращается в нуль вне $E_k$ и $G_k(P)$ обращается в нуль вне $D_l$ при $k \geqslant l$, так что

$$f(Q) = \sum_{k=1}^{l-1} \frac{1}{4^{kn}}\, G_k(Q),$$

следовательно,

$$\frac{f(P) - f(Q)}{|P - Q|} = \sum_{k=1}^{l-1} \frac{1}{4^{kn}}\, \frac{G_k(P) - G_k(Q)}{|P - Q|} + \sum_{k=l}^{\infty} \frac{1}{4^{kn}}\, \frac{G_k(P)}{|P - Q|}.$$

Далее, выберем последовательность $P^m_{h(m)}$ из точек $P^k_h$, такую что $P^m_{h(m)} \to$ $\to Q$ при $m \to \infty$, точнее, такую что $|P^m_{h(m)} - Q| \leqslant \sqrt{n}\,\frac{1}{2^m}$. Поскольку $G_m(P^m_h) = 4^{km}\left(\frac{2}{3}\right)^k$, то

$$\frac{G_m(P^m_{h(m)})}{|P^m_{h(m)} - Q|} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\,2^m\,4^{km}\left(\frac{2}{3}\right)^m.$$

Делая замену выше, при $m \geqslant l$ получаем следующее:

$$\frac{f(P^m_{h(m)}) - f(Q)}{|P^m_{h(m)} - Q|} \geqslant \sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{4^{kn}}\,\frac{G_k(P^m_{h(m)}) - G_k(Q)}{|P^m_{h(m)} - Q|} + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{4}{3}\right)^m.$$

Каждая из функций $G_k(P)$ удовлетворяет равномерному условию липшицевости, так что знак суммы справа ограничен; таким образом,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{f(P^m_{h(m)}) - f(Q)}{|P^m_{h(m)} - Q|} = \infty.$$

Следовательно, $f$ не дифференцируема в $Q$, т.е. $f$ не имеет полного дифференциала вне $D$.

Теперь осталось только построить функцию $F(\varrho)$. Мы ограничимся только случаем, когда $\varphi(t)/t$, с учетом выпуклости $\varphi$, является неубывающей и стремится к бесконечности при $t \to \infty$. Если $\varphi(t)/t$ ограничена, то градиент любой абсолютно непрерывной по Тонелли функции принадлежит $L^\varphi$.

Положим

$$\Phi(t) = \int\limits_1^t \left[\frac{s}{\varphi(s)}\right]^{\frac{1}{n-1}} ds$$

и рассмотрим функцию

$$s = \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-1}}\frac{1}{\Phi(t)} = \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}.$$

Эта функция непрерывна, строго убывает, и стремится к нулю при $t \to$ $\to \infty$ и к бесконечности при $t \to 1$; следовательно, для нее существует обратная функция $t = h(s)$, определенная при всех $s > 0$. Кроме того, имеем

$$\int\limits_0^1 h(s)\,ds = \infty, \qquad \int\limits_0^1 \varphi(h(s))s^{n-1}ds < \infty. \tag{A9}$$

Для того чтобы показать это, сначала заметим, что поскольку $\Phi'(t)$ убывающая, то

$$\frac{\Phi(t)}{t} \simeq \frac{\Phi(t)}{t-1} \geqslant \Phi'(t). \tag{A10}$$

Тогда

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1} h(s)\,ds = \int\limits_{\varepsilon}^{1} t\,ds = st\big|_{\varepsilon}^{1} + \int\limits_{t(1)}^{t(\varepsilon)} s\,dt.$$

Теперь при $s \to 0$ $t$ стремится к бесконечности, так что выражение

$$s = \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}\,t$$

остается ограниченным в силу (A10). С другой стороны, интеграл

$$\int\limits^{\infty} s\,dt = \int\limits^{\infty} \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}\,dt$$

сходится, поскольку $\Phi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, так что

$$\int\limits_{0}^{1} h(s)\,ds = \infty.$$

Рассмотрим теперь

$$\int\limits_{0}^{1} \varphi(h(s))s^{n-1}ds = \int\limits_{0}^{1} \varphi(t)\frac{t}{\varphi(t)\,\Phi(t)^{n-1}}\,ds = \int\limits_{0}^{1} \frac{t}{\Phi(t)^{n-1}}\,ds.$$

Снова в силу (A10) мы можем проинтегрировать по частям последний интеграл, и его сходимость сводится к сходимости

$$\int\limits^{\infty} \left(\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)^{n}} - \frac{(n-1)\Phi'(t)^2\,t}{\Phi(t)^{n+1}}\right) dt.$$

Но этот интеграл сходится, как это легко видеть, принимая во внимание (A10).

Таким образом, (A9) установлены.

Наконец, предположим, что

$$\int\limits_0^{\alpha} \varphi(h(s))s^{n-1}ds \leqslant 1$$

и положим

$$F(\varrho)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad \varrho\geqslant\alpha,\\ \int\limits_{\varrho}^{\alpha}(h(s)-h(\alpha))\,ds & \text{при} \quad 0<\varrho\leqslant\alpha. \end{cases}$$

В силу (A9) видим, что $F(\varrho)$ обладает необходимыми свойствами.

Это завершает доказательство. $\square$

## Приложение Б

## Об оценках емкости конденсаторов в пространственных областях по В.И. Кругликову

В этом приложении мы приводим ряд оценок ёмкостей конденсаторов из работы [43].

Прежде всего определим, следуя [248], понятие емкости конденсатора. Именно, под **конденсатором** в $\mathbb{R}^n$ мы понимаем пару множеств $A = (E, G)$, где множество $G$ открыто, а $E$ компактно в $\mathbb{R}^n$ и $E \subset G$.

Если $G \subset D$, то говорим, что конденсатор $(E, G)$ лежит в $D$. Конденсаторы $(E_1, G_1)$ и $(E_2, G_2)$ не пересекаются, если $G_1 \cap G_2 = \varnothing$. Конденсатор $(E, G)$ ограничен, если $G$ – ограниченное множество.

Для конденсатора $A = (E, G)$ через $W(A) = W(E, G)$ обозначим совокупность непрерывных ACL-функций $\varphi : G \to [0, 1]$, равных единице на $E$ и имеющих в $G$ компактный носитель. При $1 \leqslant p \leqslant n$ величину

$$\operatorname{cap}_p(E, G) = \inf \int\limits_G |\nabla \varphi(x)|^p \, dx \,,$$

где точная нижняя грань берется по всем функциям $\varphi \in W(A)$, назовем **$p$-емкостью** конденсатора $A = (E, G)$.

Значение $p$-емкости конденсатора $A = (E, G)$ не изменится, если в ее определении требование $\varphi \in W(A)$ заменить условием $\varphi \in W_0^{\infty}(A)$, где $W_0^{\infty}(A) = W(A) \cap C_0^{\infty}(G)$. Доказательство этого факта при $p = n$ приведено в [248], а при $1 \leqslant p < n$ доказательство аналогично.

Приведем ряд используемых нами в дальнейшем утверждений относительно емкостей конденсаторов, при этом считаем все конденсаторы ограниченными.

**Предложение Б1.** *Если $q < p$, то*

$$\operatorname{cap}_q^p(E, G) \leqslant [m(G \setminus E)]^{p-q} \operatorname{cap}_p^q(E, G) \,,$$

*где через $mP$ обозначена $n$-мерная мера Лебега множества $P$.*

Действительно, для любой функции $\varphi \in W(E,G)$, применяя неравенство Гельдера, имеем

$$\int\limits_G |\nabla\varphi|^q\,dx = \int\limits_{G\setminus E} |\nabla\varphi|^q\,dx \leqslant [m(G\setminus E)]^{\frac{p-q}{p}} \left(\int\limits_G |\nabla\varphi|^p\,dx\right)^{\frac{q}{p}}$$

и нужное неравенство следует далее из определения емкости конденсатора.

Следующее утверждение хорошо известно (см., напр., [24], [62]).

**Предложение Б2.** *В случае концентрических шаров $G=\{x\in\in\mathbb{R}^n : |x|<R\}$ и $E=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|\leqslant r\}$, $0<r<R$, справедливо равенство*

$$\mathrm{cap}_n(E,G) = \omega_{n-1}\,\ln^{1-n}\frac{R}{r}\,,$$

*а если $1<p<n$, то*

$$\mathrm{cap}_p(E,G) = \omega_{n-1}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1}\left(r^{\frac{p-n}{p-1}} - R^{\frac{p-n}{p-1}}\right)^{1-p}\,,$$

*где $\omega_{n-1}$ – площадь поверхности единичной $(n-1)$-мерной сферы.*

**Предложение Б3.** *Для любого конденсатора $(E,G)$ имеет место равенство*

$$\mathrm{cap}_1(E,G) = \inf\, m_{n-1}S\,,$$

*где $m_{n-1}S$ – означает $(n-1)$-мерную площадь $C^\infty$-многообразия $S$, являющегося границей открытого множества $U$, содержащего $S$ и содержащегося вместе со своим замыканием в $G$, а точная нижняя грань берется по всем таким $S$.*

Это утверждение есть частный случай леммы 6 из [62].

**Предложение Б4.** *При $1\leqslant p\leqslant n$ справедлива оценка сверху*

$$\mathrm{cap}_p(E,G) \leqslant \frac{m(G\setminus E)}{[\mathrm{dist}(E,\partial G)]^p}\,,$$

*где $\mathrm{dist}(E,\partial G)$ – евклидово расстояние между множеством $E$ и границей $\partial G$ множества $G$.*

Для $p = n$ это неравенство доказано в [248]. Нужная оценка для $1 \leqslant p < n$ получается теперь из неравенства

$$\operatorname{cap}_p^n(E, G) \leqslant [m(G \setminus E)]^{n-p} \operatorname{cap}_n^p(E, G)\,,$$

являющегося следствием предложения 12.1.

**Предложение Б5.** *При* $1 \leqslant p \leqslant n$ *справедлива оценка снизу*

$$\operatorname{cap}_p(E, G) \geqslant \frac{(\inf\, m_{n-1}S)^p}{[m(G \setminus E)]^{p-1}}\,,$$

*где величина* $\inf m_{n-1}S$ *определена в предложении 3.*

Эта оценка есть очевидное следствие предложения 12.1 (в котором надо положить $q = 1$) и предложения 12.3.

При дополнительных требованиях на конденсатор для его емкости может быть получена более точная оценка снизу.

**Предложение Б6.** *Если множество* $E$ *связно, то при* $n-1 < p \leqslant \leqslant n$ *имеет место неравенство*

$$\operatorname{cap}_p^{n-1}(E, G) \geqslant c\, \frac{(\operatorname{diam} E)^p}{[m(G)]^{1-n+p}}\,,$$

*где* $c$ *– постоянная, зависящая только от* $n$ *и* $p$.

**Доказательство.** Для установления справедливости данного неравенства будем следовать схеме его доказательства, проведенного в [248] для случая $p = n$.

Обозначим $d = \operatorname{diam} E$ и пусть $d > 0$ (при $d = 0$ неравенство очевидно). Чтобы упростить дальнейшие рассуждения, не нарушая общности, считаем, что пара точек множества $E$, на которой реализуется величина $d$, расположена на $n$-й координатной оси $x_n$ и одна из этих точек совпадает с началом координат.

Для произвольного $0 < t < d$ через $P_t$ обозначим гиперплоскость $x_n = t$.

В подпространстве $x_n = 0$ рассмотрим единичную $(n-2)$-мерную сферу $S^{n-2}$ с центром в начале координат. Фиксируя произвольную точку $z \in E \cap P_t$, для всякой точки $y \in S^{n-2}$ через $R(y)$ обозначим точную верхнюю грань чисел $r_0 > 0$ таких, что $z + ry \in G$ при $0 \leqslant r \leqslant r_0$. Тогда для любой функции $\varphi \in W_0^\infty(E, G)$ выполнено

$$\int\limits_0^{R(y)} |\nabla \varphi(z + ry)|\, dr \geqslant \varphi(z) - \varphi(z + R(y)\, y) = 1\,.$$

Оценивая здесь левую часть по неравенству Гельдера, имеем

$$1 \leqslant \left(\frac{p-1}{p+1-n}\right)^{p-1} [R(y)]^{p+1-n} \int\limits_0^{R(y)} |\nabla\varphi(z+ry)|^p\, r^{n-2}\, dr\,.$$

Умножая обе части этого неравенства на $[(p-1)/(p+1-n)]^{1-p}\, [R(y)]^{n-p-1}$ и интегрируя затем по $y \in S^{n-2}$, получим

$$\left(\frac{p-1}{p+1-n}\right)^{1-p} \int\limits_{S^{n-2}} [R(y)]^{n-p-1}\, dy \leqslant \int\limits_{S^{n-2}} dy \int\limits_0^{R(y)} |\nabla\varphi(z+ry)|^p\, r^{n-2} dr \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{P_t} |\nabla\varphi|^p\, dz\,.$$

Для оценки снизу интеграла слева воспользуемся неравенством Гельдера. Обозначая $(n-2)$-мерную площадь сферы $S^{n-2}$ через $\omega_{n-2}$, выводим

$$\omega_{n-2}^p = \left(\int\limits_{S^{n-2}} dy\right)^p \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int\limits_{S^{n-2}} [R(y)]^{n-p-1}\, dy\right\}^{n-1} \left\{\int\limits_{S^{n-2}} [R(y)]^{n-1}\, dy\right\}^{p+1-n} \leqslant$$

$$\leqslant [(n-1)\, m_{n-1}(G \cap P_t)]^{p+1-n} \left\{\int\limits_{S^{n-2}} [R(y)]^{n-p-1}\, dy\right\}^{n-1},$$

где $m_{n-1}A$ означает $(n-1)$-мерную меру Лебега множества $A$.

Подставляя эту оценку в последнее неравенство и полагая $u(t) = m_{n-1}(G \cap P_t)$, имеем

$$\int\limits_{P_t} |\nabla\varphi|^p\, dz \geqslant \left(\frac{p-1}{p+1-n}\right)^{1-p} (n-1)^{\frac{n-p-1}{n-1}}\ \omega_{n-2}^{\frac{p}{n-1}}\ [u(t)]^{\frac{n-p-1}{n-1}}\,.$$

После интегрирования по $t \in (0, d)$ отсюда получаем

$$\int\limits_G |\nabla\varphi|^p\, dx \geqslant \left(\frac{p-1}{p+1-n}\right)^{1-p} (n-1)^{\frac{n-p-1}{n-1}}\ \omega_{n-2}^{\frac{p}{n-1}} \int\limits_0^d [u(t)]^{\frac{n-p-1}{n-1}}\, dt\,.$$

Чтобы оценить интеграл справа, воспользуемся неравенством Гельдера:

$$d^p = \left(\int\limits_0^d dt\right)^p \leqslant \left[\int\limits_0^d u(t)\,dt\right]^{p+1-n} \left\{\int\limits_0^d [u(t)]^{\frac{n-p-1}{n-1}}\,dt\right\}^{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant (mG)^{p+1-n}\left\{\int\limits_0^d [u(t)]^{\frac{n-p-1}{n-1}}\,dt\right\}^{n-1}.$$

Окончательно имеем оценку

$$\int\limits_G |\nabla\varphi|^p\,dx \geqslant \left(\frac{p-1}{p+1-n}\right)^{1-p} (n-1)^{\frac{n-p-1}{n-1}}\ \omega_{n-2}^{\frac{p}{n-1}} \left[\frac{d^p}{(mG)^{p+1-n}}\right]^{\frac{1}{n-1}},$$

откуда, ввиду произвола в выборе функции $\varphi \in W_0^\infty(E, G)$, вытекает нужное неравенство. $\square$

## Список литературы


[1] *Александров П.С.* О размерности замкнутых множеств // Успехи мат. наук, нов. сер. – 1930. – **4**, № 6. – С. 17–88.

[2] *Александров П.С., Маркушевич А.И., Хинчин А.Я.* Энциклопедия элементарной математики. Книга четвёртая. Геометрия. – Москва: Гос. изд. физ.–мат. лит., 1963. – 568 с.

[3] *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, 1969. – 132 с.

[4] *Асеев В.В.* Модули семейств локально квазисимметрических поврехностей // Сиб. мат. ж. – 1989. – **30**, № 3. – С. 9–15.

[5] *Афанасьева Е.С., Рязанов В.И.* Регулярные области в теории отображенй на римановых многообразиях // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – **22**. – С. 21–30.

[6] *Афанасьева Е.С., Рязанов В.И., Салимов Р.Р.* Об отображениях в классах Орлича–Соболева на римановых многообразиях // Укр. мат. вiсник. – 2011. – **8**, № 3. – С. 319—342.

[7] *Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Працi Iн-ту математики НАН України. – 2008. – **73**. — 308 с.

[8] *Белинский П.П.* О нерерывности пространственных квазиконформных отображений и о теореме Лиувилля // Докл. АН СССР. – 1962. – **147**, 5. – С. 1003–1004.

[9] *Белинский П.П.* Общие свойства квазиконформных отображений. – Новосибирск: Наука, 1974. – 98 с.

[10] *Боярский Б.В.* Обобщённые решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Мат. сб. – 1957. – **43(85)**. – С. 451–503.

[11] *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. – М.: Наука, 1969.

[12] *Векуа И.Н.* Обобщённые аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.

[13] *Водопьянов С.К.* Отображения с конечным коискажением и классы функций Соболева // Доклады РАН. – 2008. – **440**, № 3. – С. 301–305.

[14] *Водопьянов С.К.* Отображения с ограниченным искажением и с конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. ж. – 1999. – **40**, № 4. – С. 764–804.

[15] *Водопьянов С.К.* О граничном соответствии при квазиконформных отображениях пространственных областей // Сиб. мат. ж. – 1975. – **16**, № 16. – С. 626–631.

[16] *Водопьянов С.К., Гольдштейн В.М.* Пространства Соболева и специальные классы отображений. – Новосибирск: НГУ, 1981. – 76 с.

[17] *Водопьянов С.К., Гольдштейн В.М.* Метрическое пополнение области при помощи конформной емкости, инвариантное при квазиконформных отображениях // ДАН СССР. – 1978. – **238**, № 5. – С. 1040–1042.

[18] *Водопьянов С.К., Ухлов А.Д.* Пространства Соболева и $(P, Q)$-квазиконформные отображения групп Карно // Сиб. мат. ж. – 1998. – **39**, № 4. – С. 665–682.

[19] *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: ИЛ, 1962. – 895 с.

[20] *Дубинин В.Н.* Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного. – Владивосток: Дальнаука, 2009. – 390 с.

[21] *Дубовицкий А.Я.* О структуре множеств уровня дифференцируемых отображений $n$-мерного куба в $k$-мерный куб // Изв. АН России, сер. матем. – 1957. – **21**, № 3. – С. 371–408.

[22] *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. – М.: Эдиториал УРСС, 1998. – Т.2. – 280 с.

[23] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1966.

[24] *Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г.* Введение в теорию функций с обобщёнными производными и квазиконформные отображения. – Новосибирск: Наука, 1983. – 284 с.

[25] *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

[26] *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. – М.: Мир, 1971. – 343 с.

[27] *Гутлянский В.Я.* О методе вариаций для однолистых аналитических функций с квазиконформным продолжением // Сиб. мат. ж. – 1980. – **21**, № 2. – С. 61–78.

[28] *Гутлянский В.Я., Ломако Т.В., Рязанов В.И.* К теории вариационного метода для уравнений Бельтрами // Укр. мат. вест. – 2011. – **8**, № 4. – С. 513–536.

[29] *Гутлянский В.Я., Рязанов В.И.* Геометрическая и топологическая теория функций и отображений. – К.: Наук. думка, 2011. – 425 с.

[30] *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. – М.: Наука, 1968. – 648 с.

[31] *Зорич В.А.* Квазиконформные отображения и асимптотическая геометрия многообразий // Успехи мат. наук. – 2002. – **57**, № 3. – С. 3–28.

[32] *Зорич В.А.* О конформном типе риманового многообразия // Функ. анализ и его приложения. – 1996. – **30**, № 2. – С. 40–45.

[33] *Зорич В.А.* Математический анализ. Часть I. – М.: Наука, 1981. – 544 с.

[34] *Зорич В.А.* О соответствии границ при Q–квазиконформных отображениях // ДАН СССР. – 1962. – **145**, № 1. – С. 31–34.

[35] *Игнатьев А., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вiсник. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395–417; transl. Ukrainian Math. Bull. – 2005. – **2**, 3. – P. 403–424.

[36] *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере. – М.: МГУ, 1960.

[37] *Ковтонюк Д.А., Петков И.В., Рязанов В.И.* О граничном поведении решений уравнений Бельтрами // Укр. мат. ж. – 2011. – **63**, № 8. – С. 1078–1091; transl. in Ukrainian Math. J. - 2011 - V. 63, no. 8. - 1241-1255.

[38] *Ковтонюк Д.А., Петков И.В., Рязанов В.И.* О задаче Дирихле для уравнений Бельтрами в конечносвязных областях// Укр. мат. ж. – 2012. – **64**, № 7. – С. 932-944; transl. in Ukrainian Math. J. - 2012 - V. 64, no. 7. - 1064-1077.

[39] *Ковтонюк Д., Рязанов В.* К теории границ пространственных областей // Труды ИПММ НАН Украины. – 2006. – **13**. – С. 110–120.

[40] *Ковтонюк Д., Рязанов В.* К теории нижних $Q$-гомеоморфизмов // Укр. мат. вiсник. – 2008. – **5**, № 2. – С. 157–181.

[41] *Ковтонюк Д.А., Салимов Р.Р.* Асимптотическое поведение в точке обобщенных квазиизометрий // Укр. мат. журн. - 2011. - **63**, № 4. - С. 481-488.

[42] *Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. – Гос. издат. физ.-мат. лит., Москва, 1958. – 272 с.

[43] *Кругликов В.И.* Ёмкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Мат. сб. – 1986. – **130**, № 2. – С. 185-206.

[44] *Крушкаль С. Л.* Об отображениях, квазиконформных в среднем // ДАН СССР. – 1964. – **157**, ḱ 3. – С. 517–519.

[45] *Крушкаль С. Л.* Об отображениях, $\varepsilon$-квазиконформных в среднем// Сиб. мат. ж. – 1967. – **8**, ḱ 4. – С. 798–806.

[46] *Куратовский К.* Топология 1. – М.: Мир, 1966. – 594 с.

[47] *Куратовский К.* Топология 2. – М.: Мир, 1969.

[48] *Кузьмина Г.В.* Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы // Тр. МИАН СССР. – 1980. – **139**. – Р. 3–241.

[49] *Лаврентьев М.А.* Об одном дифференциальном признаке гомеоморфных отображений трехмерных областей // Докл. АН СССР. – 1938. – **20**. – С.241–242.

[50] *Лаврентьев М.А.* Устойчивость в теореме Лиувилля // Докл. АН СССР. – 1954. – **95**. – С. 925–926.

[51] *Лаврентьев М.А.* К теории пространственных отображений // Сиб. мат. ж. – 1962. – **3**, № 5. – С. 710–714.

[52] *Лаврентьев М.А.* К теории отображений трехмерных областей // Сиб. мат. ж. – 1964. – **5**, № 3. – С. 596–602.

[53] *Лаврентьев М.А.* Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. – М., 1962. – 136 с.

[54] *Ломако Т.В.* О распространении некоторых обобщений квазиконформных отображений на границу // Укр. мат. ж. – 2009. – **61**, № 10. – С. 1329–1337.

[55] *Ломако Т.В.* Теорема сходимости для уравнений Бельтрами с ограничениями интегрального типа на дилатацию // Труды ИПММ НАН Украины. – 2010. – **20**. – С. 124–129.

[56] *Ломако Т.В.* О компактности классов решений уравнений Бельтрами с ограничениями теоретико-множественного типа // Труды ИПММ НАН Украины. – 2010. – **21**. – С. 161–167.

[57] *Ломако Т.В.* К теории сходимости и компактности для уравнений Бельтрами // Укр. мат. ж. – 2011. – **63**, № 3. – С. 341–349.

[58] *Ломако Т.В.* Теоремы сходимости и компактности для уравнений Бельтрами // Доповіді НАН України. – 2011. – № 5. – С. 28–31.

[59] *Ломако Т.В.* К теории сходимости и компактности для уравнений Бельтрами с ограничениями теоретико-множественного типа // Укр. мат. ж. – 2011. – **63**, № 9. – С. 1227 –1240.

[60] *Ломако Т.В.* Теоремы сходимости и компактности для уравнений Бельтрами с ограничениями теоретико-множественного типа // Доповіді НАН України. – 2011. – № 12. – С. 18–23.

[61] *Ломако Т.В., Рязанов В.И.* Теория вариационного метода для уравнений Бельтрами// Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – **22**. – С. 1–10.

[62] *Мазья В.Г.* О некоторых интегральных неравенствах для функций многих переменных // В кн.: Проблемы математического анализа, вып. 3. – Л.: ЛГУ, 1973. – С. 33–68.

[63] *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева. – Ленинград: ЛГУ, 1985. – 416 с.

[64] *Мазья В.Г.* Классы областей, мер и емкостей в теории пространств дифференцируемых функций // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 26. – М.: ВИНИТИ, 1988. – С. 159–228.

[65] *Миклюков В.М.* Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения. – Волгоград: Изд–во ВолГУ, 2005. – 273 с.

[66] *Миклюков В.М.* Граничные свойства n..мерных квазиконформных отображений // ДАН СССР. – 1970. – **193**, № 3. – С. 525–529.

[67] *Миклюков В.М.* О граничных свойствах одного класса отображений в пространстве // Тр. Том. ун-та. Сер. мех. - мат. – 1966. – **189**. – С. 80–85.

[68] *Новиков С.П., Тайманов И.А.* Современные геометрические структуры и поля. – М.: МЦНМО, 2005. – 584 с.

[69] *Позняк Э.Г., Шикин Е.В.* Дифференциальная геометрия: Первое знакомство. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 384 с.

[70] *Пономарёв С.П.* Об $N$-свойстве гомеоморфизмов класса $W_p^1$ // Сиб. мат. ж. – 1987. – **28**, № 2. – С. 140–148.

[71] *Пономарёв С.П.* $N^{-1}$–свойство отображений и условие $(N)$ Лузина // Мат. заметки. – 1995. – **58**, № 3. – С. 411–418.

[72] *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1977. – 444 с.

[73] *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Гос. изд-во техн.-теоретич. лит., 1953. – 636 с.

[74] *Решетняк Ю.Г.* О конформных отображениях в пространстве // Докл. АН СССР. – 1960. – **130**. – С. 1196–1198.

[75] *Решетняк Ю.Г.* Об устойчивости в теореме Лиувилля о конформных отображениях пространства // Докл. АН СССР. – 1963. – **152**, 2. – С. 286–287.

[76] *Решетняк Ю.Г.* Некоторые геометрические свойства функций и отображений с обобщёнными производными // Сиб. мат. ж. – 1966. – **7**, № 4. – С. 886–919.

[77] *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982. – 285 с.

[78] *Решетняк Ю.Г.* Об условии $N$ для пространственных отображений класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}$ // Сиб. мат. ж. – 1987. – **28**, № 5. – С. 149–153.

[79] *Решетняк Ю.Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. ж. – 1997. – **38**, № 3. – С. 657–675.

[80] *Рудин У.* Теория функций в поликруге. – М.: Мир, 1974. – 160 с.

[81] *Рязанов В.И.* Об усилении теоремы сходимости Штребеля К. // Изв. РАН, Сер. мат. – 1992. – **56**, № 3. – С. 636–653.

[82] *Рязанов В.И.* Топологические аспекты теории квазиконформных отображений. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. – Донецк, 1993. – 281 с.

[83] *Рязанов В.И.* О квазиконформных отображениях с ограничениями по мере // Укр. мат. ж. – 1993. – **45**, № 7. – С. 1009–1019.

[84] *Рязанов В.И.* Об отображениях, квазиконформных в среднем // Сиб. матем. ж. – 1996. – **37**, № 2. – С. 378–388.

[85] *Рязанов В.И., Салимов Р.Р.* Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Укр. мат. вiсник. – 2007. – **4**, № 2. – С. 199–234; transl. in Ukrainian Math. Bull. – 2007. – **4**, № 2. – P. 199–234.

[86] *Рязанов В.И., Севостьянов Е.А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых $Q-$гомеоморфизмов // Сиб. мат. ж. – 2007. – **48**, № 6. – С. 1361–1376; transl. in Siberian Math. J. - 2007. - 48, no. 6. - P. 1093-1105.

[87] *Рязанов В.И., Севостьянов Е.А.* Равностепенная непрерывность квазиконформных в среднем отображений // Сиб. мат. ж. – 2011.

– **52**, № 3. – С. 665–679; transl. in Sib. Math. J. - 2011. - 52, no. 3. - P. 524-536.

[88] *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: ИЛ, 1949. – 495 с.

[89] *Салимов Р.Р.* Локальное поведение обобщенных квазиизометрий // Доповіді НАНУ. – 2011. — № 6. – С. 23–28.

[90] *Салимов Р.Р.* Об оценке меры образа шара // Сиб. мат. ж. – 2012. – Т.53, № 6. – С. 920-930.

[91] *Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А.* Теория кольцевых Q–отображений в геометрической теории функций // Мат. сб. — 2010. — **201**, № 6. – С. 131—158.

[92] *Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А.* Аналоги леммы Икома-Шварца и теоремы Лиувилля для отображений с неограниченной характеристикой // Укр. мат. ж. - **63**, № 10. - 2011. - С. 1368-1380.

[93] *Севостьянов Е.А.* Теория модулей, емкостей и нормальные семейства отображений, допускающих ветвление // Укр. мат. вісник. – 2007. – **4**, № 4. – С. 582–604.

[94] *Севостьянов Е.А.* Теоремы Лиувилля, Пикара и Сохоцкого для кольцевых отображений // Укр. мат. вісник. – 2008. – **5**, № 3. – С. 366–381.

[95] *Севостьянов Е.А.* Устранение особенностей и аналоги теоремы Сохоцкого–Вейерштрасса для $Q-$отображений // Укр. мат. ж. – 2009. – **61**, № 1. – С. 116–126.

[96] *Севостьянов Е.А.* Об интегральной характеризации некоторых обобщений квазирегулярных отображений и значении условия расходимости интеграла в геометрической теории функций // Укр. мат. ж. — 2009. — **61**, № 10. – С. 1367—1380.

[97] *Смоловая Е.С.* Граничное поведение кольцевых $Q$-гомеоморфизмов в метрических пространствах // Укр. мат. ж. – 2010. – **62**, № 5. – С. 682–689.

[98] *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 333 с.

[99] *Солынин А.Ю.* Модули и экстремально-метрические проблемы // Алгебра и анализ. – 1999. – **11**, № 1. – С. 3–86.

[100] *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. – М.: Мир, 1971. – 693 с.

[101] *Стоилов С.* Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. – М.: Наука, 1964. – 228 с.

[102] *Стругов Ю.Ф.* Компактность классов отображений, квазиконформных в среднем // ДАН СССР. – 1978. – **243**, № 4. – С. 859-861.

[103] *Суворов Г.Д.* Семейство плоских топологических отображений. – Новосибирск: Наука, 1965. – 264 с.

[104] *Суворов Г.Д.* Обобщённый принцип длины и площади в теории отображений. – К.: Наукова думка, 1985. – 280 с.

[105] *Сычев А.В.* Модули и пространственные квазиконформные отображения. – Новосибирск: Наука, 1983. – 152 с.

[106] *Тамразов П. М.* Модули и экстремальные метрики в неориентируемых и скрученных римановых многообразиях // Укр. мат. ж. – 1998. – **50**, № 10. – С. 1388–1398.

[107] *Трохимчук Ю.Ю.* Устранимые особенности аналитических функций. – К.: Наукова думка, 1992. – 223 с.

[108] *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987. – 760 с.

[109] *Шабат Б.В.* Метод модулей в пространстве // Докл. АН СССР. – 1960. – **130**. – С. 1210–1213.

[110] *Шабат Б.В.* К теории квазиконформных отображений в пространстве // Докл. АН СССР. – 1960. – **132**. – С. 1045–1048.

[111] *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1976. – Т. 2. – 264 с.

[112] *Шлык В.А.* О равенстве $p$-емкости и $p$-модуля // Сиб. мат. ж. – 1993. – **34**, № 6. – С. 216–221.

[113] *Ухлов А.* Отображения, порождающие вложения пространств Соболева // Сиб. мат. ж. – 1993. – **34**, № 1. – С. 165–171.

[114] *Ahlfors L.* Conformal invariants (Topics in Geometric Function theory). – McGrow-Hill, New. York, 1973.

[115] *Ahlfors L., Beurling A.* Conformal invariants and function-theoretic null-sets // Acta Math. – 1950. – **83**. – P. 101–129.

[116] *Alberico A., Cianchi A.* Differentiability properties of Orlicz-Sobolev functions // Ark. Mat. – 2005. – **43**. – P. 1–28.

[117] *Ambrosio L.* Metric space valued functions of bounded variation // Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). – 1990. – **17**, no. 3. – P. 439–478.

[118] *Anderson G. D., Vamanamurthy M. K., Vuorinen M.* Conformal invariants, quasiconformal maps and special functions // Lecture Notes in Math. – 1992. – V. 1508. – P. 1–19.

[119] *Andreian Cazacu C.* Foundations of quasiconformal mappings. Handbook of complex analysis: geometric function theory. Vol. 2, 687-753. – Elsevier, Amsterdam, 2005.

[120] *Andreian Cazacu C.* Moduli inequalities for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 1976. – 2. – P. 17–28.

[121] *Andreian Cazacu C.* Modules and quasiconformality, Symposia Mathematica 18. – Academic Press, London, 1976, pp. 519-534.

[122] *Andreian Cazacu C.* A generalization of the quasiconformality, in Topics in Analysis, Colloquium on Mathematical Analysis, Jyvaskyla 1970 [Lecture Notes in Mathematics 419, Springer-Verlag, 1974, pp. 4-17].

[123] *Andreian Cazacu C.* Partial differential equations related to extremal problems for quasiconformal mappings, in Ordinary and Partial Differential Equations. [Lecture Notes in Mathematics, 415, Springer-Verlag, 1974, pp. 1-14].

[124] *Andreian Cazacu C., Stanciu V.* BMO-mappings in the plane. Topics in analysis and its applications, 11-30, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 147. – Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.

[125] *Astala K.* A remark on quasiconformal mappings and BMO-functions // Michigan Math. J. – 1983. – **80** – P. 209-212.

[126] *Astala K., Gehring F.W.* Injectivity, the BMO norm and the universal Teichmfiller space // J. Analyse Math.– 1986. – **46**. – P. 16–57.

[127] *Astala K., Iwaniec T., Koskela P., Martin G.* Mappings of BMO-bounded distortion // Math. Ann. – 2000. – **317**. – P. 703–726.

[128] *Astala K., Iwaniec T., Martin G.* Elliptic Partial Differential Equations and Quasiconformal Mappings in the Plane. – Princeton University Press, 2009. – 677 p.

[129] *Balogh Z.M.* Hausdorff dimension distribution of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // J. Anal. Math. – 2001. – **83**. – P. 289–312.

[130] *Balogh Z., Koskela, P.* Quasiconformality, quasisymmetry, and removability in Loewner spaces // With an appendix by Jussi Vaisala. Duke Math. J. – 2000. – **101**, 3. – P. 554–577.

[131] *Balogh Z.M., Monti R., Tyson J.T.* Frequency of Sobolev and qusiconformal dimension distortion // Research Report 2010-11, 22.07.2010. – P. 1–36.

[132] *Bates S.M.* On the image size of singular maps // Proc. Amer. Math. Soc. – 1992. – **114**. – P. 699–705.

[133] *Birnbaum Z., Orlicz W.* Über die Verallgemeinerungen des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen // Studia. Math. – 1931. – **3**. – P. 1–67.

[134] *Bishop C.J.* Quasiconformal mappings which increase dimension // Ann. Acad. Sci. Fenn. – 1999. – **24**. – P. 397–407.

[135] *Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space //Preprint, Department of Mathematics, University of Helsinki. – 2000. – **256**. – 22 pp.

[136] *Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Intern. Journ. Math. and Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397–1420.

[137] *Bojarski B., Hajlasz P., Strzelecki P.* Sard's theorem for mappings in Hölder and Sobolev spaces // Manuscripta Math. – 2005. – **118**. – P. 383–397.

[138] *Bojarski B., Iwaniec T.* Analytical foundations of the theory of quasiconformal mappings in $\mathbb{R}^n$ // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. – 1983. – **8**, no. 2. – P. 257–324.

[139] *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* On Beltrami equations with two characteristics // Comp. Var. Ell. Equ. – 2009. – **54**, 10. – P. 933–950.

[140] *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* General Beltrami equations and BMO // Ukr. Math. Bull. – 2008. – **5**, no. 3 – P. 305–326.

[141] *Bourbaki N.* Functions of one real variable. – Moscow: Nauka, 1965 [in Russian].

[142] *Brakalova M.A., Jenkins J.A.* On solutions of the Beltrami equation. II. // Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.). – 2004. – **75**(89). – P. 3—8.

[143] *Brakalova M.A., Jenkins J.A.* On solutions of the Beltrami equation // J. Anal. Math. – 1998. – **76**. – P. 67–92.

[144] *Brania A., Yang Sh.* Domains with controlled modulus and quasiconformal mappings // Nonlinear Stud. – 2002. – **9**, 1. – P. 57–73.

[145] *Calderon A.P.* On the differentiability of absolutely continuous functions // Riv. Math. Univ. Parma. – 1951. – **2**. – P. 203–213.

[146] *Caraman P.* $n$-dimensional quasiconformal mappings. – Newfoundland, NJ: Haessner Publishing, 1974.

[147] *Cesary L.* Sulle funzioni assolutamente continue in due variabili // Ann. Scuola Norm. Super. – 1941. – **10**(2). – P. 91–101.

[148] *Cesari L.* Sulle transformazioni continue // Annali di Mat. Pura ed Appl. – 1942. – **IV**, no. 21. – P. 157–188.

[149] *Cianchi A.* A sharp embedding theorem for Orlicz-Sobolev spaces // Indiana Univ. Math. J. – 1996. – **45**, no. 1. – P. 39–65.

[150] *Chiarenza F., Frasca M., LongoP.* $W^{2,p}$-solvability of the Dirichlet problem for nondivergence elliptic equations with $VMO$ coefficients // Trans. Amer. Math. Soc. – 1993. – **336**, no. 2. – P. 841–853.

[151] *Church P.T., Timourian J.G.* Differentiable Maps with Small Critical Set or Critical Set Image // Indiana Univ. Math. J. – 1978. – **27**. – P. 953–971.

[152] *Church P.T., Timourian J.G.* Maps having 0-dimensional critical set image // Indiana Univ. Math. J. – 1978. – **27**. – P. 813–832.

[153] *Cristea, M.* Dilatations of homeomorphisms satisfying some modular inequalities. // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. – 2011. – **56**, no. 4. – P. 275-282.

[154] *Cristea, M.* Open discrete mapping having local $ACL^n$ inverses // Complex Var. Elliptic Equ. – 2010. – **55**, no. 1-3. – P. 61-90.

[155] *Cristea, M.* Local homeomorphisms having local $\mathrm{ACL}^n$ inverses // Complex Var. Elliptic Equ. – 2008. – **53**, no. 1. – P. 77-99.

[156] *Cristea, M.* Mappings with finite distortion and arbitrary Jacobian sign // Complex Var. Elliptic Equ. – 2007. – **52**, no. 1. – P. 43-57.

[157] *Cristea, M.* Mappings of finite distortion: Zoric's theorem, and equicontinuity results // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. – 2007. – **52**, no. 5. – P. 539-554.

[158] *Cristea, M.* Mappings of finite distortion: boundary extension // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. – 2006. – **51**, no. 5-6. – P. 607-631.

[159] *Csörnyei M., Hencl S., Maly J.* Homeomorphisms in the Sobolev space $W^{1,n-1}$ // Preprint MATH-KMA-2007/252, Prague Charles Univ. – 2007. – **252**. – P. 1–15.

[160] *David G.* Solutions de l'equation de Beltrami avec $\|\mu\|_\infty = 1$ // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1988. – **13**. – P. 25–70.

[161] *Donaldson T.* Nonlinear elliptic boundary-value problems in Orlicz-Sobolev spaces // J. Diff. Eq. – 1971. – **10**. – P. 507–528.

[162] *Dybov Yu.* On regular solutions of the Dirichlet problem for the Beltrami equations // Complex Var. Elliptic Equ. – 2010. – **55**, № 12. – P. 1099–1116.

[163] *Fadell A.G.* A note on a theorem of Gehring and Lehto // Proc. Amer. Math. Soc. – 1975. – **49**. – P. 195–198.

[164] *Federer H.* Geometric Measure Theory. – Springer, Berlin etc., 1969. – 676 p.

[165] *Ferrand J.* Conformal capacity and conformally invariant functions on manifolds // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. – 1994. – 218. – P. 213–216.

[166] *Ferrand J.* Conformal capacity and conformally invariant metrics // Pacific J. Math. – 1997. – **180**, 1. – P. 41–49.

[167] *Freedman M.H., He Z.-X.* Divergence free fields: Energy and asymptotic crossing number // Ann. of Math. – 1991. – **134**, 1. – P. 189–229.

[168] *Freedman M.H., He Z.-X.* Links of tori and the energy of incompressible flows // Topology. – 1991. – **30**, 2. – P. 283–287.

[169] *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. – 1957. – **98**. – P. 171–219.

[170] *Gehring F.W.* Symmetrization of rings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1961. – **101**. – P. 499–519.

[171] *Gehring F.W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P. 353–393.

[172] *Gehring F.W.* Lipschitz mappings and the $p$-capacity of ring in $n$-space // Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N.Y., 1969), Ann. of Math. Studies. – 1971. – **66**. – P. 175–193.

[173] *Gehring F.W.* The $L^p$-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping // Acta Math. –1973. – **130.** – P. 265–277.

[174] *Gehring F.W.* Quasiconformal mappings, in Complex Analysis and its Applications, V. 2. – International Atomic Energy Agency: Vienna, 1976.

[175] *Gehring F.W.* Characteristic Properties of Quasidisks, Les presses de l'Universite de Montreal. – 1982.

[176] *Gehring F.W., Lehto O.* On the total differentiability of functions of a complex variable // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1959. – **272**. – P. 3–8.

[177] *Gehring F.W., Martio O.* Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings // J. Anal. Math. – 1985. – **45**. – P. 181–206.

[178] *Gehring F.W., Väisälä J.* Hausdorff dimension and quasiconformal mappings // J. London Math. Soc. – 1973. – **6**, no. 2. – P. 504–512.

[179] *Gehring F.W., Väisälä J.* The coefficients of quasiconformality of domains in space // Acta Math. – 1965. – **114**. – P. 1–70.

[180] *Golberg A.* Differential properties of $(\alpha, Q)$-homeomorphisms // Further Progress in Analysis, World Scientific Publ. – 2009. – P. 218–228.

[181] *Golberg A.* Integrally quasiconformal mappings in space // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 2. – С. 53–64.

[182] *Golberg A., Salimov R.* Topological mappings of integrally bounded p-moduli // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. – 2012. – **3 (LXI)**, № 1. - P. 49-66.

[183] *Gossez J.-P., Mustonen V.* Variational inequalities in Orlicz-Sobolev spaces // Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl. – 1987. – **11**. – P. 379–392.

[184] *Grinberg E.L.* On the smoothness hypothesis in Sard's theorem // Amer. Math. Monthly. – 1985. – **92**, no. 10. – P. 733–734.

[185] *Gutlyanskiĭ V.Y., Ryazanov V.I.* On quasiconformal mappings with integral restrictions to the Lavrentieff characteristics // Siberian Math. J. – 1990. – **31**, no. 2. – P. 21–36.

[186] *Gutlyanskiĭ V.Y., Martio O., Ryazanov V.I., Vuorinen M.* On convergence theorems for space quasiregular mappings // Forum Math. –1998. – **10.** – P. 353–375.

[187] *Gutlyanskii V.Ya., Golberg A.* On Lipschitz continuity of quasiconformalmappings in space // J. Anal. Math. – 2009. – **109**, no. 1. – P. 233–251.

[188] *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami Equation: A Geometric Approach, Developments in Mathematics, vol. 26. – New York: Springer, 2012. – 301 p.

[189] *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On recent advances in the degenerate Beltrami equations // Укр. мат. вісник. – 2010. – **7**, № 4. – С. 467–515; transl in J. Math. Sci. – 2011. – **175**. – P. 413–449.

[190] *Gutlyanski V., Martio O., Sugava T., Vuorinen M.* On the degenerate Beltrami equation // Trans. Amer. Math. Soc. – 2005.– **357**, no. 3. – P. 875–900.

[191] *Gutlyanski V., Sugawa T.*, On Lipschitz continuity of quasiconformal mappings // Rep. Univ. – 2001. – **83**. – P. 91–108.

[192] *Gutlyanski V., Vuorinen M.* On maps almost conformal at the boundary // Complex Var. Theory Appl. – 1997. – **34**. – P. 445–464.

[193] *Hajlasz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric space // Potential Anal. – 1996. – **5**. – P. 403–415.

[194] *Hajlasz P.* Whitney's example by way of Assouad's embedding // Proc. Amer. Math. Soc. – 2003. – **131**. – P. 3463–3467.

[195] *Hardy G.H., Littlewood J.E., Polia G.* Inequalities. – Cambridge University Press, Cambridge, 1934.

[196] *Heinonen J.* A capacity estimate on Carnot groups // Bull. Sci. Math. – 1995. – **119**, 1. – P. 475–484.

[197] *Heinonen J.* Lectures on Analysis on Metric Spaces. – Springer, New York etc., 2000. – 150 p.

[198] *Heinonen J., Holopainen I.* Quasiregular mappings on Carnot groups // J. Geom. Anal. – 1997. – **7**, 1. – P. 109–148.

[199] *Heinonen J., Kilpelainen T., Martio O.* Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations. – Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford–New York–Tokio, 1993.

[200] *Heinonen J., Koskela P.* Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry // Acta Math. – 1998. – **181**. – P. 1–41.

[201] *Heinonen J., Koskela P., Shanmugalingam P., Tyson J.T.* Sobolev spaces of Banach space-valued functions and quasiconformal mappings // J. Anal. Math. – 2001. – **85**. – P. 87–139.

[202] *Hencl S., Koskela P.* Regularity of the inverse of a planar Sobolev homeomorphism // Arch. Rat. Mech. Anal. – **180**, 1. – 2006. – P. 75–95.

[203] *Herron D.A., Koskela P.* Locally uniform domains and quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1995. – **20**. – P. 187–206.

[204] *Hesse J.* A $p$-extremal length and $p$-capacity equality // Ark. Mat. – 1975. – **13**. – P. 131–144.

[205] *Hsini M.* Existence of solutions to a semilinear elliptic system through generalized Orlicz-Sobolev spaces // J. Partial Differ. Equ. – 2010. – **23**, no. 2. – P. 168–193.

[206] *Hurewicz W., Wallman H.* Dimension Theory. – Princeton Univ. Press, Princeton, 1948.

[207] *Ignat'ev A., Ryazanov V.* To the theory of the boundary behavior of space mappings // Ukrainian Math. Bull. – 2006. – **3**, 2. – P. 189–201.

[208] *Iwaniec T., Koskela P., Onninen J.* Mappings of finite distortion: Compactness // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 2002. – **27**, no. 2. – P. 391–417.

[209] *Iwaniec T., Koskela P., Onninen J.* Mappings of finite distortion: Monotonicity and continuity // Invent. Math. – 2001. – **144**(3). – P. 507–531.

[210] *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis. – Clarendon Press, Oxford, 2001. – 568 p.

[211] *Iwaniec T., Sbordone C.* Riecz transforms and elliptic PDEs with VMO coefficients // J. d'Anal. Math. – 1998. – **74**. – P. 183–212.

[212] *Iwaniec T., Sverák V.,* On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1993. – **118**. – P. 181–188.

[213] *Ikoma K.* On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space // Nagoya Math. J. – 1965. – **25**. – P. 175-203.

[214] *John F., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation // Comm. Pure Appl. Math. – 1961. – **14**. – P. 415–426.

[215] *Jones P.W.* Extension theorems for BMO // Indiana Univ. Math. J. – 1980. – **29** – P. 41–66.

[216] *Kaufman R.* A singular map of a cube onto a square // J. Diff. Geom. – 1979. – **14**. – P. 593–594.

[217] *Kauhanen J., Koskela P., Maly J.* On functions with derivatives in a Lorentz space // Manuscripta Math. – 1999. – **10**. – P. 87–101.

[218] *Kirszbraun M.D.* Uber die zusammenziehende und Lipschitzsche Transformationen // Fund. Math. J. – 1934. – **22**. – P. 77–108.

[219] *Khruslov E.Ya., Pankratov L.S.* Homogenization of the Dirichlet variational problems in Sobolev-Orlicz spaces. – Operator theory and its applications (Winuipeg, MB, 1998), 345-366, Fields Inst. Commun., 25, Amer. Math. Soc,. Providence, RI, 2000.

[220] *Kolomoitsev Yu., Ryazanov V.* Uniqueness of approximate solutions of the Beltrami equations // Proc. Inst. Appl. Math. & Mech. NASU. – 2009. – **19**. – P. 116–124.

[221] *Koranyi A., Reimann H.* Quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Invent, math. – 1985. – V. 80. – P. 309–338.

[222] *Koranyi A., Reimann H.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. – 1995. – **111**, 1. – P. 1–87.

[223] *Koronel J.D.* Continuity and $k$-th order differentiability in Orlicz-Sobolev spaces: $W^k L_A$" // Israel J. Math. – 1976. – **24**, no. 2. – P. 119–138.

[224] *Koskela P., Maly J.* Mappings of finite distortion: The zero set of Jacobian // J. Eur. Math. Soc. – 2003. – **5**, 2. – P. 95–105.

[225] *Kovalev L.V.* Monotonicity of generalized reduced modulus // Zapiski Nauch. Sem. POMI. – 2001. – **276**. – P. 219–236.

[226] *Kovalev L., Onninen J.* Boundary values of mappings of finite distortion // Rep. Univ. Jyvaskyla Dep. Math. Stat. – 2003. – Vol. 92. – P. 175–182.

[227] *Kovtonyuk D., Petkov I., Ryazanov V.* On homeomorphisms with finite distortion in the plane // ArXiv: 1011.3310v2 [math.CV], 18 Nov. 2010. – P. 1–16.

[228] *Kovtonyuk D., Petkov I., Ryazanov V., Salimov R.* On boundary behavior and Dirichlet problem for Beltrami equations// ArXiv: 1201.5570 [math.CV], 26 Jan 2012. – P. 1–28.

[229] *Kovtonyuk D., Ryazanov V.* On the boundary behavior of generalized quasi-isometries // J. Anal. Math. – 2011. – **115**. – P. 103–119.

[230] *Kovtonyuk D., Ryazanov V.* Toward the theory of generalized quasi-isometries // Мат. студ. – 2010. – **34**, 2. – С. 129–135.

[231] *Kovtonyuk D., Ryazanov V.* On boundary behavior of generalized quasi-isometries // ArXiv: 1005.0247v1 [math.CV], 3 May 2010. – 20 p.

[232] *Kovtonyuk D., Ryazanov V.* On the theory of mappings with finite area distortion // J. Anal. Math. – 2008. – **104**. – P. 291–306.

[233] *Kovtonyuk D., Ryazanov V., Salimov R., Sevost'yanov E.* On mappings in the Orlicz-Sobolev classes // ArXiv: 1012.5010v4 [math.CV], 12 Jan. 2011. – P. 1–42.

[234] *Kovtonyuk D.A., Ryazanov V.I., Salimov R.R., Sevost'yanov E.A.* On mappings in the Orlicz-Sobolev classes // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. - 2012. - **3(LXI)**, no. 1. - P. 67-78.

[235] *Landes R., Mustonen V.* Pseudo-monotone mappings in Sobolev-Orlicz spaces and nonlinear boundary value problems on unbounded domains // J. Math. Anal. Appl. – 1982. – **88**. – P. 25–36.

[236] *Lappalainen V., Lehtonen A.* Embedding of Orlicz-Sobolev spaces in Hölder spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1989. – **14**, no. 1. – P. 41–46.

[237] *Lee John M.* Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature. – New York: Springer, 1997.

[238] *Lehto O.* On the differentiability of quasiconformal mappings with prescribe complex dilatation // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1 Math. – 1960. – **275** . – P. 1–28.

[239] *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal Mappings in the Plane. – Springer–Verlag, New York, 1973. – 258 p.

[240] *Lelong-Ferrand J.* Invariant conform globaux sur les varietes Riemanniennes // J. Diff. Geom. – 1973. – **8**. – P. 487–510.

[241] *Lomako T., Salimov R., Sevost'yanov E.* On equicontinuity of solutions to the Beltrami equations // Ann. Univ. Bucharest, Math. Ser. – 2010. – **1 (LIX)**, no. 2. – P. 263–274.

[242] *Lomako T., Ryazanov V.* On a variational method for the Beltrami equations // Ann. Univ. Bucharest, Math. Ser. – 2011. – **2 (LX)**, no. 1. – P. 83-94.

[243] *Maly J.* A simple proof of the Stepanov theorem on differentiability alsmost everywhere // Exposition Math. – 1999. – **17**. – P. 59–61.

[244] *Maly J., Martio O.* Lusin's condition $(N)$ and mappings of the class $W^{1,n}$ // J. Reine Angew. Math. – 1995. – **485**. – P. 19–36.

[245] *Marcus M., Mizel V.* Transformations by functions in Sobolev spaces and lower semicontinuity for parametric variational problems // Bull. Amer. Math. Soc. – 1973. – **79**, no. 4. – P. 790–795.

[246] *Margulis G.A., Mostow G.D.* The differential of quasi–conformal mapping of a Carnot–Caratheodory spaces // Geom. Func. An. – 1995. – **5**, 2. – P. 402–433.

[247] *Martio O.* Modern tools in the theory of quasiconformal maps // Texts in Math. Ser. B, **27**, Univ. Coimbra, Dept. Mat., Coimbra. – 2000. – P. 1–43.

[248] *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1969. – **448**. – P. 1–40.

[249] *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. Anal. Math. – 2004. – **93**. – P. 215–236.

[250] *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* $Q$-homeomorphisms // Contemporary Math. – 2004. – **364**. – P. 193–203.

[251] *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On $Q$-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 2005. – **30**. – P. 49–69.

[252] *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory, Springer Monographs in Mathematics. – Springer, New York etc., 2009. – 367 p.

[253] *Martio O., Ryazanov V., Vuorinen M.* BMO and Injectivity of Space Quasiregular Mappings // Math. Nachr. – 1999. – **205**. – P. 149–161.

[254] *Martio O., Sarvas J.* Injectivity theorems in plane and space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. – 1978/1979. – **4**. – P. 384–401.

[255] *Martio O., Vuorinen M.* Whitney cubes, p–capacity and Minkowski coutent // Expo. Math. – 1987. – **5**. – P. 17–40.

[256] *Mattila P.* Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Fractals and rectifiability. – Cambridge University Press, Cambridge, 1995. – 356 p.

[257] *Maz'ya V.* Sobolev Spaces. – Springer-Verlag, Berlin, 1985. – 486 p.

[258] *McShane E.J.* Extension of range of functions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1934. – **40**. – P. 837–842.

[259] *Menchoff D.* Sur les differencelles totales des fonctions univalentes // Math. Ann. – 1931. – **105**. – P. 75–85.

[260] *Mitchell J.* On Carnot-Caratheodory metrics // J. Diff. Geom. – 1985. – V. 21. – P. 35–45.

[261] *Nakki R.* Boundary behavior of quasiconformal mappings in $n$-space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. – 1970. – **484**. – P. 1–50.

[262] *Norton A.* A critical set with nonnull image has large Hausdorff dimension // Trans. Amer. Math. Soc. – 1986. – **296**, no. 1. – P. 367–376.

[263] *Ohtsuka M.* Extremal length and precise functions. – Tokyo: Gakkotosho Co., Ltd., 2003.

[264] *Onninen J.* Differentiability of monotone Sobolev functions // Real. Anal. Exchange. – 2000/2001. – **26**, no. 2. – P. 761–772.

[265] *Orlicz W.* Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B // Bull. Intern. de l'Acad. Pol. Serie A, Cracovie. – 1932. – P. 207–220.

[266] *Orlicz W.* Über Räume ($L^M$) // Bull. Intern. de l'Acad. Pol. Serie A, Cracovie. – 1936. – P. 93–107.

[267] *Palagachev D.K.* Quasilinear elliptic equations with VMO coefficients // Trans. Amer. Math. Soc. – 1995. – **347**, no. 7. – P. 2481–2493.

[268] *Pansu P.* Metriques de Carnot-Caratheodory et quasiisometries des espaces symetriques de rang un // Ann. of Math. – 1989. – V. 119. – P. 1–60.

[269] *Quinn F., Sard A.* Hausdorff conullity of critical images of Fredholm maps // Amer. J. Math. – 1972. – **94**. – P. 1101–1110.

[270] *Rado T., Reichelderfer P.V.* Continuous Transformations in Analysis. – Springer–Verlag, Berlin, 1955. – 441 p.

[271] *Ragusa M.A.* Elliptic boundary value problem in vanishing mean oscillation hypothesis // Comment. Math. Univ. Carolin. – 1999. – **40**, no. 4. – P. 651–663.

[272] *Rajala K., Zapadinskaya A., Zürcher T.* Generalized Hausdorff dimension distortion in euclidean spaces under Sobolev mappings // ArXiv:1007.2091v1 [math.CA], 2010. – P. 1–13.

[273] *Ransford T.* Potential Theory in the Complex Plane. – Cambridge University Press, 1995. – 244 p.

[274] *E. Reich, H. Walczak* On the behavior of quasiconformal mappings at point // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – **117**. – P. 335–351.

[275] *Reimann H.M., Rychener T.* Functions of bounded mean oscillation and quasiconformal mappings // Comment. Math. Helv. – 1974. – **49**. – P. 260-276.

[276] *Reimann H.M., Rychener T.* Funktionen Beschränkter Mittlerer Oscillation. – Lecture Notes in Math., **487**, 1975.

[277] *Rickman S.* Quasiregular Mappings. – Springer, Berlin etc., 1993. – 213 p.

[278] *Ryazanov V.* Some Questions of Convergence and Compactness for Quasiconformal Mappings // Amer. Math. Soc. Transl. – 1986. – **131**, (2). – P. 7–19.

[279] *Ryazanov V., Salimov R.R., Sevost'yanov E.* Convergence and compactness of the Sobolev mappings // www.arxiv.org, arXiv:1208.1687v3 [math.CV] 16 Sep 2012, 47 pp.

[280] *Ryazanov V., Salimov R., Srebro U., Yakubov E.* On Boundary Value Problems for the Beltrami Equations // Contemporary Math. – 2013. – **591**. – P. 211–243.

[281] *Ryazanov V., Sevost'yanov E.* Equicontinuity of mappings quasiconformal in the mean // arXiv: 1003.1199v3 [math.CV] 28 Sep 2010. – P. 1–16.

[282] *Ryazanov V., Sevostyanov E.* Equicontinuity of mappings quasiconformal in the mean // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2011. – **36**. – P. 231–244.

[283] *Ryazanov V., Sevost'yanov E.* On convergence and compactness of space homeomorphisms // www.arxiv.org, arXiv:1207.1231v5 [math.CV] 20 Aug 2012, 23 pp.

[284] *Ryazanov V., Sevost'yanov E.* On compactness of Orlicz-Sobolev mappings // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. - 2012. - **3 (LXI)**, no. 1. - P. 79-87.

[285] *Ryazanov V., Sevost'yanov E.* On the convergence of spatial homeomorphisms // Mat. Stud. – 2013. - **39**. – P. 34–44.

[286] *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equation // J. Anal. Math. – 2005. – **96**. – P. 117–150.

[287] *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Finite mean oscillation and the Beltrami equation // Israel J. Math. – 2006. – **153**. – 247–266.

[288] *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation and ring homeomorphisms // Укр. мат. вiсник. – 2007. – **4**, № 1. – P. 79–115; transl. in Ukr. Math. Bull. - 2007. - 4, no. 1. - P. 79-115.

[289] *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On convergence theory for Beltrami equations //Укр. мат. вiсник. – 2008. – **5**, № 4. – P. 524-535; transl. in Ukr. Math. Bull. – 2008. – 5, no. 4. – P. 517-528.

[290] *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* To strong ring solutions of the Beltrami equations // Uzbek. Math. J. – 2009. – No 1. – P. 127–137.

[291] *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Integral conditions in the mapping theory // Укр. мат. вiсник. – 2010. – **7**, № 1. – С. 73 – 87; transl. in Math. Sci. J. – 2011. – **173**, No. 4. – P. 397-407.

[292] *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On strong solutions of the Beltrami equations // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2010. – **55**, 1–3. – P. 219–236.

[293] *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Integral conditions in the theory of the Beltrami equations // Complex Variables and Elliptic Equations. - 2012. - **57**, № 12. - P. 1247-1270.

[294] *Salimov R.* On regular homeomorphisms in the plane // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2010. – **35**. – P. 285–289.

[295] *Salimov R.* On Q-homeomorphisms with respect to p-modulus// Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math - 2011. - **2 (LX)**, no. 2. - P. 207-213.

[296] *Salimov R.* On finitely Lipschitz space mappings // Сиб. электрон. мат. изв. - 2011. - **8**. - С. 284-295

[297] *Sarason D.* Functions of vanishing mean oscillation // Trans. Amer. Math. Soc. – 1975. – **207**. – P. 391–405.

[298] *Sard A.* The measure of the critical values of differentiable maps // Bull. Amer. Math. Soc. – 1942. – **48**. – P. 883–890.

[299] *Sard A.* The equivalence of $n$-measure and Lebesgue measure in $E_n$ // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49**. – P. 758–759.

[300] *Sard A.* Images of critical sets // Ann. Math. – 1958. – **68**, no. 2. – P. 247–259.

[301] *Sard A.* Hausdorff measure of critical images on Banach manifolds // Amer. J. Math. – 1965. – **87**. – P. 158–174.

[302] *Schiffer M., Schober G.* Representation of fundamental solutions for generalized Cauchy–Riemann equations by quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. 1. – 1976. – **2**. – P. 501–531.

[303] *Schiffer M., Schober G.* A variational method for general families of quasiconformal mappings // J. Analyse Math. – 1978. – **34**. – P. 240–264.

[304] *Schlesinger E.* Conformal Invariants and Prime Ends // Amer. J. Math. – 1958. – **80**. – P. 83–102.

[305] *Shlyk V. A.* On the equality between $p$-capacity and $p$-modulus // Sibirsk. Mat. Zh. – 1993. – **34**, no. 6. – 216-221.

[306] *Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation. Handbook in Complex Analysis: Geometric function theory. – **2**, 555-597, Elseiver B.V., 2005.

[307] *Stein E.M.* Editor's note: The differentiability of functions in $\mathbb{R}^n$ // Ann. Math. – 1981. – **113**. – P. 383–385.

[308] *Stepanoff W.* Sur la résolution du probléme de Dirichlet á l'aide de l'intégrale de Poisson // Мат. сб. – 1924. – **32**, № 1. – С. 111–114.

[309] *Stepanoff W.* Sur les conditions de l'existence de la differentielle totale // Mat. Sb. – 1925. – **32**. – P. 511–526.

[310] *Strebel K.* Ein Konvergensatz für Folgen quasikonformer Abbildungen // Comment. Math. Helv. – **44**, № 4. – 1969. – P. 469–475.

[311] *Suominen K.* Quasiconformal maps in manifolds // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1966. – Vol. 393. – P. 1–39.

[312] *Teichmüller O.* Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung // Dentsche Math. – 1938. – **3**. – P. 621-–678.

[313] *Tuominen H.* Characterization of Orlicz-Sobolev space // Ark. Mat. – 2007. – **45**, no. 1. – P. 123–139.

[314] *Tyson J. T.* Metric and geometric quasiconformality in Ahlfors regular Loewner spaces // Conform. Geom. Dyn. – 2001. – 5. – P. 21–73 (electronic).

[315] *Ukhlov A., Vodop'yanov S.* Mappings associated with weighted Sobolev Spaces // Complex Anal. Dynam. Sys. III. Contemp. Math. – 2008. – **455**. – P. 363–382.

[316] *Väisälä J.* On quasiconformal mappings in space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. – 1961. – **298**. – P. 1–36.

[317] *Väisälä J.* On quasiconformal mappings of a ball // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1961. – **304**. – P. 1–17.

[318] *Väisälä J.* On the null-sets for extremal distances // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. – 1961. – **322**. – P. 1–12.

[319] *Väisälä J.* Two new characterizations for quasiconformality // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. – 1965. – **362.** – P. 1–12.

[320] *Väisälä J.* Lectures on $n$-dimensional quasiconformal mappings, Lecture Notes in Math., **229**. – Springer–Verlag, Berlin, 1971. – 144 p.

[321] *Vasil'ev A.* Moduli of families of curves for conformal and quasiconformal mappings, Lecture Notes in Math., **1788**. – Springer–Verlag, Berlin-–New York, 2002. – 211 p.

[322] *Vuillermot P.A.* Hölder-regularity for the solutions of strongly nonlinear eigenvalue problems on Orlicz-Sobolev space // Houston J. Math. – 1987. – **13**. – P. 281–287.

[323] *Vuorinen M.* Conformal Geometry and Quasiregular Mappings, Lecture Notes in Math. 1319. – Berlin: Springer–Verlag, 1988. – 209 p.

[324] *Vuorinen M.* Exceptional sets and boundary behavior of quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A, Dissertations. – 1976. – **11**. – P. 1–44.

[325] *Wilder R.L.* Topology of Manifolds. – AMS, New York, 1949. – 409 p.

[326] *Whitney H.* A function not constant on a connected set of critical points // Duke Math. J. – 1935. – **1**. – P. 514–517.

[327] *Ziemer W.P.* Extremal length and conformal capacity // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – **126**, no. 3. – P. 460–473.

## Предметный указатель


$k$-мерная мера Хаусдорфа 143, 242
$k$-мерная поверхность 72
$k$-мерная хаусдорфова площадь 243
$k$-мерная хаусдорфова площадь множества $B$ в $\mathbb{R}^n$ 72
$k$-мерное направление 144
$n$-мерное топологическое многообразие $\mathbb{M}^n$ 230
$p$-емкость 57, 270
$p$-модуль 55, 73
$p$-почти всех 73
$Q$-гомеоморфизм относительно $p$-модуля 56

NED-множество 185

QED-область 102, 173

билипшицево отображение 163, 247
билипшицевы отображения 103

внешняя дилатация 197
внешняя мера в смысле Каратеодори 143, 243
внутренняя дилатация, 42 197
вырожденные уравнения Бельтрами 92, 115

геодезическое расстояние 231
гиперповерхности 242
гладкое многообразие 231
гомеоморфизм с конечным искажением 245
граница области сильно достижима 172
граница области сильно достижима в точке $x_0 \in \partial D$ 83
граница сильно достижима в точке 101
граница сильно достижима в точке $x_0 \in \partial D$ 48
граница сильно достижимая 48, 83, 101, 235
граница слабо плоская 48, 83, 101, 235
граница слабо плоская в точке 83, 101, 235

дилатационное отношение 92
дилатация 115
дилатация отображения 126
дискретное отображение 106
допустимая борелева функция 55, 72, 116, 245
допустимая функция 233

емкость кольца 13

задача Дирихле 92
замкнутое семейство 125, 155

измеримое множество 143
инвариантно-выпуклая оболочка 127
инвариантно-выпуклое множество 127
интеграл над поверхностью 72, 243

карта на многообразии $\mathbb{M}^n$ 230
квазиконформный гомеоморфизм 126
класс Орлича 142
класс Орлича–Соболева 142, 243
колебание отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$ на множестве $E \subset D$ 195
кольцевая область 13
кольцевой $Q$-гомеоморфизм 97
кольцевой $Q$-гомеоморфизм в $\infty$ 117
кольцевой $Q$-гомеоморфизм в граничной точке 97

кольцевой $Q$-гомеоморфизм в точке 15, 47, 97, 116, 161, 223
кольцевой $Q$-гомеоморфизм в точке $x_0 \in \overline{D}$ 81
кольцевой $Q$-гомеоморфизм в области 15, 97
кольцевой $Q$-гомеоморфизм относительно $p$-модуля в области $D$ 56
кольцевой $Q$-гомеоморфизм относительно $p$-модуля в точке 56
кольцевой конденсатор 57
кольцо 13
компактное семейство 155
компактный класс отображений 125
комплексная характеристика 126
комплексный коэффициент 92, 115
конденсатор 57, 270
конечное среднее колебание 16, 108
конечное среднее колебание в $\infty$ 134
конечное среднее колебание в $D$, 134
конечное среднее колебание в точке 133
конечное среднее колебание в точке $x_0 \in X$ 83
континуумы 12, 82
конформный модуль семейства кривых $\Gamma$ 233
критические точки 152
критические точки ранга 152

линейно связное пространство 48, 82
липшицево отображение 163, 247
липшицевы области 103
липшицевы отображения 103
локально линейно связна в точке 82
локальные координаты 231

максимальная дилатация 115
малая окружность 196
многозначные решения задачи Дирихле 113
многозначные решения уравнения 113
модуль 12, 116
модуль семейства 73
модуль семейства $\Gamma$ 246
монотонное отображение 196

непрерывность 117
нижний $Q$-гомеоморфизм 94
нижний $Q$-гомеоморфизм в области 160
нижний $Q$-гомеоморфизм в области $D$ 247
нижний $Q$-гомеоморфизм в точке 75, 160
нижний $Q$-гомеоморфизм в точке $x_0 \in \overline{D}$ 246
нормальное семейство 155
нормальные 232
нуль-множество экстремальных длин 185

область 82
область квазиэкстремальной длины 102, 173
область локально линейно связна в точке 48
область локально связная в точке 48, 82, 100
обобщенная производная 139
обобщенно допустимая функция 246
обобщенный $p$-модуль 74
обратная функция 190
ограниченное среднее колебание 15, 107
ограниченный конденсатор 57
открытое отображение 106, 146
открытые отображения 149
отображение регулярное в точке 116

отображение с конечным искажением 140, 244
отображение с ограниченным искажением 140

п.в. 93
площадь $B$ 72, 243
поверхность спрямляемая 72
предельное множество 103
присоединенная матрица 197
продолжение друг друга 113
пространство $\alpha$-регулярное по Альфорсу 81
пространство $\alpha-$регулярно сверху в точке $x_0 \in X$ 82
пространство Орлича 142, 243
пространство регулярное по Альфорсу 82
пространство регулярно сверху 82
пространство связно 82
псевдорегулярное решение 111

равномерная область 102, 173
равностепенно непрерывное в точке семейство 155
равностепенно непрерывное семейство 123, 155
регулярное решение 106
регулярное решение уравнения Бельтрами 116
риманово многообразие 231

семейство измеримо по параметру 137
семейство минорируется 73, 246
семейство нормальное 123
семейство равностепенно непрерывно в точке 123
сильно достижима в точке $x_0 \in \partial D$ 235
слабо плоская граница области 171
спрямляемая (квадрируемая) поверхность 243
строго выпуклая функция 117, 156
суперкритические точки 152
сферическая (хордальная) метрика 12, 166
сферический (хордальный) диаметр 12, 166
сферический диаметр множества 116
сферический круг 196
сферический радиус круга $K$ 196
сферическое (хордальное) расстояние 116

топологическое пространство связное 12
точка Лебега 17, 108, 134

уравнения Бельтрами 92, 115

функция абсолютно непрерывная на линиях 126
функция исчезающего среднего колебания 16
функция кратности 72, 242
функция обобщенно $p$-допустимая 74
функция обобщенно допустимая 93
функция экспоненциально ограничена по мере 127

хаусдорфова размерность 144, 243

центр сферического круга 196

штриховая линия 93

элемент длины 231
элемент сферической площади 116

ядро последовательности открытых множеств 24

*Наукове видання*
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

Ковтонюк Денис Олександрович
Салімов Руслан Радикович
Севостьянов Євген Олександрович
(під ред. Рязанова Володимира Ілліча)

ДО ТЕОРІІ ВІДОБРАЖЕНЬ
КЛАСІВ СОБОЛЕВА ТА ОРЛИЧА–СОБОЛЕВА

(Російською мовою)

Київ, Науково-виробниче підприємство
«Видавництво "Наукова думка" НАН України», 2013

Комп'ютерна верстка *О.П. Ткаченко*

Підп. до друку 08.04.2013. Формат 70 × 100/16. Папір офс. № 1.
Гарн. Таймс. Друк. офс.
Ум. друк. арк. 19,0. Обл.-вид. арк. 14,68.
Тираж 300 прим.
Зам. №

НВП «Видавництво "Наукова думка" НАН України»
Свідоцтво про внесення субєкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 2440 від 15.03.2006
01601 Київ 1, вул. Терещенківська, 3

ЗАТ фірма «Віпол»
03151 Київ 151, вул. Волинська, 60