Математические заметки

Том 90 выпуск 3 сентябрь 2011

УДК 517.5

О квазилинейных уравнениях типа Бельтрами с вырождением

Е. А. Севостьянов

В статье рассматривается вопрос о разрешимости уравнения $f_{\overline{z}}=\nu(z,f(z))f_z$, где функция двух переменных $\nu(z,w)$ может быть близка к единице. Такие уравнения мы называем квазилинейными уравнениями Бельтрами с вырождением эллиптичности. В статье доказано, что при некоторых достаточно общих условиях на $\nu(z,w)$ приведенное выше уравнение имеет регулярное гомеоморфное решение в классе Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. Более того, указанные решения f таковы, что $f^{-1}\in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Одна из первых наиболее содержательных работ, касающихся изучения квазилинейных уравнений типа Бельтрами, принадлежит известному ученому, академику Боярскому, см. [1]. В указанной выше работе, ставшей классической по данной тематике, сформулирован ряд фундаментальных теорем, частный случай одной из которых приведен ниже. Для комплекснозначной функции $f\colon D\to\mathbb{C}$, заданной в области $D\subset\mathbb{C}$, имеющей частные производные по x и y при п.в. $z=x+iy$, положим $\overline{\partial}f=f_{\overline{z}}=(f_x+if_y)/2$ и $\partial f=f_z=(f_x-if_y)/2$. Говорят, что функция $\nu=\nu(z,w)\colon D\times\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ удовлетворяет *условиям Каратеодори*, если ν измерима по $z\in D$ при каждом фиксированном $w\in\mathbb{C}$ и непрерывна по $w\in\mathbb{C}$ при п.в. $z\in D$. В единичном круге $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ рассмотрим уравнение

$$f_{\overline{z}}=\nu(z,f(z))f_z, \tag{1.1}$$

называемое в дальнейшем *квазилинейным уравнением типа Бельтрами*. Предположим, что функция $\nu(z,w)$ удовлетворяет условиям Каратеодори и

$$|\nu(z,w)|\leqslant k<1 \tag{1.2}$$

для п.в. $z\in\mathbb{D}$ при каждом фиксированном $w\in\mathbb{C}$. Тогда уравнение (1.1) имеет гомеоморфное решение $f\colon\mathbb{D}\to\mathbb{C}$, удовлетворяющее условиям нормировки $f(0)=0$, $f(1)=1$, см. теорему 8.2 в [1]. Здесь и далее под *решением* уравнения (1.1) понимается отображение $f\colon\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ класса ACL, удовлетворяющее уравнению (1.1) при п.в. $z\in\mathbb{D}$. Напомним, что отображение $f\colon D\to\mathbb{C}$, $D\subset\mathbb{C}$, называется *абсолютно непрерывным на линиях* $f\in ACL$, если в любом прямоугольнике P с ребрами, параллельными осям координат, и таком, что $\overline{P} \subset D$, функция f абсолютно непрерывна на почти всех (п.в.) отрезках в P, которые параллельны осям координат. Хорошо известно, что $ACP^p_{\rm loc} = W^{1,p}_{\rm loc}$, $1 \leqslant p < \infty$, где $ACP^p_{\rm loc}$ обозначает класс всех ACL-отображений, частные производные первого порядка которых локально интегрируемы в соответствующей степени p, см., например, [2; с. 8]. В частности, $W^{1,1}_{\rm loc} \subset ACL$. Любой гомеоморфизм $f\colon D \to \mathbb{C}$ класса ACL является дифференцируемым почти всюду, см., например, [3; с. 128]. Таким образом, для гомеоморфизмов класса ACL запись (1.1) имеет смысл; в дальнейшем мы будем говорить о решениях уравнения (1.1) в указанном выше смысле только в классе ACL гомеоморфизмов.

Основная цель данной работы – установить теоремы существования для уравнения (1.1), минуя условия вида (1.2). Насколько известно, тематика вырожденных уравнений типа Бельтрами, т.е., уравнений, для которых комплексный коэффициент ν может быть близок к единице, достаточно интенсивно изучается, см., например, [4]–[8] и др. В то же время, хорошо известно, что в контексте разрешимости уравнения (1.1) в классе ACL гомеоморфизмов, условие ограниченности левой части в (1.2) нельзя, например, заменить на условие локальной суммируемости ν в произвольной сколь угодно большой степени $p \geqslant 1$, даже в том простом случае, когда ν зависит только от z. Условия, гарантирующие существование решений указанного выше уравнения, являются предметом более тонкого анализа, связанного, в частности, с функциями *ограниченного среднего колебания*, см. [9], и с более общими классами функций, о которых пойдет речь ниже.

2. Основные определения. Всюду далее D – область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $Q\colon D \to [0,\infty]$ – измеримая по Лебегу функция, m – мера Лебега в $\mathbb{C}$; для множества $A \subset \mathbb{C}$ запись $m(A)$ означает меру Лебега в $\mathbb{C}$, $\operatorname{dist}(A,B)$ – евклидово расстояние между множествами $A, B \subset \mathbb{C}$. Запись $f\colon D \to \mathbb{C}$ предполагает, что отображение f непрерывно. Мы будем также предполагать, что отображение $f\colon D \to \mathbb{C}$ *сохраняет ориентацию*, т.е. топологический индекс $\mu(y,f,G) > 0$ для произвольной области $G \subset D$ такой, что $\overline{G} \subset D$, и произвольного $y \in f(G) \setminus f(\partial G)$. Якобиан (сохраняющего ориентацию) гомеоморфизма $f\colon D \to \mathbb{C}$ класса ACL почти всюду неотрицателен:

$$J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \geqslant 0, \tag{2.1}$$

см. [3; с. 10]. Гомеоморфизм $f\colon D \to \mathbb{C}$ класса ACL называется *регулярным*, если для него неравенство в (2.1) строгое. Аналогично, решение $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ уравнения (1.1) называется *регулярным*, если для этого решения $J_f(z) > 0$ п.в. в $\mathbb{D}$. *Комплексной дилатацией* гомеоморфизма $f\colon D \to \mathbb{C}$ класса ACL в точке z называется величина $\mu(z) = \mu_f(z) = f_{\overline{z}}/f_z$ если $f_z \neq 0$ и $\mu(z) = 0$ в противном случае. *Максимальная дилатация* определяется как

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}\,.$$

Отметим, что в силу условия (2.1), всегда $|\mu(z)| \leqslant 1$ п.в. и $K_\mu \geqslant 1$ п.в. Кроме того, заметим, что любой гомеоморфизм класса ACL удовлетворяет уравнению (1.1), где $\nu(z, f(z)) = \mu_f(z)$. Гомеоморфизм $f\colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ класса ACL условимся называть $Q(z)$*-квазиконформным*, если $K_\mu(z) \leqslant Q(z)$ при п.в. $z \in D$. В дальнейшем в расширенном пространстве $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ используется *сферическая* (*хордальная*) *метрика*

$h(x,y)=|\pi(x)-\pi(y)|$, где π – стереографическая проекция $\overline{\mathbb{C}}$ на сферу $S^3(e_3/2,1/2)$, $e_3=(0,0,1)$, в $\mathbb{R}^3$:

$$h(x,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}\,,\quad h(x,y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\,\sqrt{1+|y|^2}}\,,\qquad x\neq\infty\neq y.$$

Положим $h(E)=\sup_{x,y\in E}h(x,y)$ – “хордальный” (сферический) диаметр множества $E\subset\overline{\mathbb{C}}$. Напомним, что борелева функция $\rho\colon\mathbb{C}\to[0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{C}$, если $\int_\gamma\rho(z)\,|dz|\geqslant 1$ для всех кривых $\gamma\in\Gamma$. В этом случае мы пишем: $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma)=\inf_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma}\int_D\rho^2(z)\,dm(z).$$

Пусть $E,F\subset\overline{\mathbb{C}}$ – произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E,F,D)$ семейство всех кривых $\gamma\colon[a,b]\to\overline{\mathbb{C}}$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a)\in E$, $\gamma(b)\in F$ и $\gamma(t)\in D$ при $t\in(a,b)$. Пусть $r_0=\operatorname{dist}(z_0,\partial D)$,

$$A(r_1,r_2,z_0)=\{z\in\mathbb{C}:r_1<|z-z_0|<r_2\},\qquad S_i=S(z_0,r_i)=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|=r_i\}.$$

Говорят, что гомеоморфизм $f\colon D\to\overline{\mathbb{C}}$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $z_0\in D$, см., например, разделы 7 и 11 в [6], см. также [8] и [10], если соотношение

$$M(f(\Gamma(S_1,S_2,A)))\leqslant\int_A Q(z)\cdot\eta^2(|z-z_0|)\,dm(z)\tag{2.2}$$

выполнено для любого кольца $A=A(r_1,r_2,z_0)$, $0<r_1<r_2<r_0$, и для каждой измеримой функции $\eta\colon(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr\geqslant 1.\tag{2.3}$$

При этом, гомеоморфизм $f\colon D\to\overline{\mathbb{C}}$ будем называть *кольцевым Q-гомеоморфизмом в области* D, если соотношение (2.2) выполнено в каждой точке $z_0\in D$ и для каждой функции η из (2.3). Приведем еще одно определение, в котором мы нуждаемся. Предположим, что $Q(z)\colon D\to[1,\infty]$ – некоторая вещественнозначная функция. Гомеоморфизм $f\colon D\to\overline{\mathbb{C}}$ будем называть *Q-гомеоморфизмом*, если

$$M(f(\Gamma))\leqslant\int_D Q(z)\cdot\rho^2(z)\,dm(z)\tag{2.4}$$

для любого семейства Γ путей γ в D и для каждой допустимой функции $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma$. Заметим, что соотношения (2.2) и (2.4) являются частью определения q-квазиконформных отображений, если $Q(z)\equiv q=\mathrm{const}$. В общем случае эти “весовые” соотношения с весом $Q(z)$ не эквивалентны, см., например, [6], и нужны нам как некоторый аппарат при исследовании уравнений вида (1.1).

Предложение 1. *Пусть $f_m\colon D\to\overline{\mathbb{C}}$ – последовательность $Q(z)$-гомеоморфизмов в D, где $Q(z)$ – фиксированная функция, одна и та же для всех m. Предположим, что последовательность f_m сходится к отображению f в D локально равномерно. Тогда f – либо кольцевой Q-гомеоморфизм, либо постоянная в D, при условии, что $Q(z)\in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$, см. теорему 7.7 в [6].*

Замечание 1. Отметим, что в формулировке предложения 1 мы, вообще говоря, не можем прибегнуть к последовательности “кольцевых” гомеоморфизмов, так как в этом случае справедливость сделанного выше заключения, вообще говоря, не установлена. Аналогично, нельзя утверждать, что предельным отображением f в предложении 1 будет Q-гомеоморфизм. Детали см. в разделе 7 в [6].

Предложение 2. *Пусть* $f\colon D\to\overline{\mathbb{C}}$ *– кольцевой* Q*-гомеоморфизм в точке* $z_0\in D$ *такой, что* $h(\overline{\mathbb{C}}\setminus f(D))\geqslant\delta>0$. *Если для некоторого* $0<\varepsilon_0\leqslant\operatorname{dist}(z_0,\partial D)$

$$\int_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} Q(z)\cdot\psi^2(|z-z_0|)\,dm(z)\leqslant c\cdot I^p(\varepsilon)\qquad \text{для всех}\quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0), \tag{2.5}$$

где $p\leqslant 2$ *и* $\psi(t)$ *– неотрицательная измеримая функция на* $(0,\infty)$ *такая, что*

$$0<I(\varepsilon)=\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt<\infty\qquad \text{для всех}\quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0),$$

то для $z\in B(z_0,\varepsilon_0)$

$$h(f(z),f(z_0))\leqslant\frac{\alpha}{\delta}\exp\{-\beta I^{\gamma_p}(|z-z_0|)\}, \tag{2.6}$$

где α, β, γ_p *– некоторые постоянные, первые две из которых абсолютные, а последняя зависит только от* p, *см. лемму* 7.6 *в* [6].

Замечание 2. В частности, из оценки вида (2.6), в силу хорошо известной теоремы Арцела–Асколи следует, что класс всех кольцевых Q-гомеоморфизмов $\mathfrak{H}_{Q,\delta}=\{f\colon D\to\overline{\mathbb{C}}\}$ в D таких, что

$$h(\overline{\mathbb{C}}\setminus f(D))\geqslant\delta>0, \tag{2.7}$$

и при Q, удовлетворяющих условию (2.5), является нормальным семейством отображений относительно метрики h, как только $I(\varepsilon)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$, т.е. из любой последовательности $f_m\in\mathfrak{H}_{Q,\delta}$ можно выделить подпоследовательность f_{m_k} такую, что $\sup_{z\in E}h(f_{m_k}(z),f(z))\to 0$ при $k\to\infty$ для некоторого непрерывного отображения $f\colon D\to\overline{\mathbb{C}}$ и для любого компактного множества $E\subset D$, см. более подробно раздел 7.5 в [6]. Наконец, легко видеть, что для справедливости заключения о равностепенной непрерывности и нормальности соответствующего семейства гомеоморфизмов, условие вида (2.7) предложения 2 можно заменить требованием: $f(z_1)=y_1, f(z_2)=y_2$ для некоторых фиксированных (не зависящих от f) элементов z_1, y_1, z_2, y_2.

Предложение 3. *Пусть* $D\subset\mathbb{C}$, $f_n\colon D\to\mathbb{C}$ *– последовательность гомеоморфизмов класса* ACL, *имеющих комплексные дилатации* $\mu_n(z)$, *которые удовлетворяют условию*

$$\frac{1+|\mu_n(z)|}{1-|\mu_n(z)|}\leqslant Q(z)\in L^1_{\mathrm{loc}}\qquad \text{при всех}\quad n=1,2,\dots .$$

Если $f_n\to f$ *локально равномерно в* D *при* $n\to\infty$ *и* f *– гомеоморфизм в* D, *то* $f\in ACL$ *и* ∂f_n, $\overline{\partial}f_n$ *сходятся слабо в* L^1_{loc} *к* ∂f *и* $\overline{\partial}f$, *соответственно. В этом случае отображение* f *является* $Q(z)$*-квазиконформным. Более того, если* $\mu_n\to\mu$ *при* $n\to\infty$, *то* $\overline{\partial}f=\mu\partial f$ *п.в., см., например, теорему* 3.1 *и замечание* 3.1 *в* [8].

3. Основная лемма.

Лемма 1. *Пусть функция* $\nu = \nu(z,w)\colon \mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ *удовлетворяет условиям Каратеодори и*

$$K_\nu(z,w) := \frac{1+|\nu(z,w)|}{1-|\nu(z,w)|} \leqslant Q(z) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D}) \tag{3.1}$$

при п.в. $z\in\mathbb{D}$ *для любого* $w\in\mathbb{C}$. *Предположим, что для любого* $z_0\in\mathbb{D}$ *и некотором* $\varepsilon_0<\operatorname{dist}(z_0,\partial\mathbb{D})$ *выполнено соотношение*

$$\int_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} Q(z)\cdot\psi^2(|z-z_0|)\,dm(z) \leqslant c\cdot I^p(\varepsilon), \tag{3.2}$$

где $I(\varepsilon)\to\infty$ *при* $\varepsilon\to 0$, p – *некоторая постоянная такая, что* $0<p\leqslant 2$, *и* $\psi(t)$ – *некоторая неотрицательная измеримая функция на* $(0,\infty)$ *такая, что* $0<I(\varepsilon)=\int_\varepsilon^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt<\infty$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. *Тогда уравнение* (1.1) *имеет регулярное гомеоморфное решение* f *класса* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ *в* $\mathbb{D}$ *такое, что* $f^{-1}\in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(\mathbb{D}))$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций

$$\nu_n(z,w) = \begin{cases} \nu(z,w), & Q(z)\leqslant n, w\in\mathbb{C},\\ 0, & Q(z)>n, w\in\mathbb{C}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Заметим, что $K_{\nu_n}(z,w)\leqslant n$ при п.в. $z\in\mathbb{D}$ и для всех $w\in\mathbb{C}$. Следовательно, $\nu_n(z,w)\leqslant(n-1)/(n+1)<1$, поэтому уравнение (1.1), где вместо ν в правой части взято $\nu:=\nu_n$, а ν_n определено соотношениями (3.3), имеет гомеоморфное решение $f_n\colon\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ с нормировками $f_n(0)=0$, $f_n(1)=1$, которое является n-квазиконформным в $\mathbb{D}$, см. теорему 8.2 в [1]. Одновременно, f_n являются $Q(z)$-квазиконформными в силу соотношения (3.1) и того, что $K_{\nu_n}(z,w)\leqslant K_\nu(z,w)$. Следовательно, согласно соотношению (6.6) гл. V в [3], каждое f_n является Q-гомеоморфизмом, а, значит, и кольцевым Q-гомеоморфизмом. По предложению 2 и замечанию 2, учитывая соотношение (3.2), получаем, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ имеет подпоследовательность f_{n_k}, которая сходится локально равномерно к некоторому отображению f. В силу предложений 1 и 3, а также условий нормировки $f_n(0)=0$, $f_n(1)=1$, предельное отображение f является $Q(z)$-квазиконформным. Заметим, что для п.в. $z\in\mathbb{D}$ существует номер $k_0=k_0(z)$: $\nu_{n_k}(z,w)=\nu(z,w)$ при $n_k\geqslant n_{k_0}(z)$ и всех $w\in\mathbb{C}$. Поэтому для п.в. z, $\mu_{n_k}(z)=\nu_{n_k}(z,f_{n_k}(z))\to\nu(z,f(z))$ при $k\to\infty$. Пусть $\mu_f(z)$ – характеристика предельного отображения f. Снова по предложению 3 получаем, что п.в. $\nu(z,f(z))=\mu_f(z)$. Но это и означает, что отображение f является решением исходного уравнения (1.1).

Осталось показать, что отображение f-регулярное и $f^{-1}\in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$. Так как f-гомеоморфизм, то $f_n^{-1}\to f^{-1}$ локально равномерно при $n\to\infty$. Обозначим $g_n=f_n^{-1}$. Заметим, что комплексная характеристика обратного отображения $g=f^{-1}$ связана с характеристикой f соотношением $\mu_g=-\mu_f\circ g$, см., например, соотношение 4 раздел C гл. I в [11]. В таком случае, будем иметь

$$\int_B |\partial g_n(w)|^2\,dm(w) = \int_B (|\partial g_n(w)|^2 - |\overline{\partial} g_n(w)|^2)\cdot \frac{|\partial g_n(w)|^2\,dm(w)}{(|\partial g_n(w)|^2 - |\overline{\partial} g_n(w)|^2)}$$
$$= \int_B J_{g_n}(w)\cdot \frac{1}{1-|\overline{\partial} g_n(w)/\partial g_n(w)|^2}\,dm(w) = \int_{g_n(B)} \frac{dm(z)}{1-|\mu_n(z)|^2}$$
$$\leqslant \int_{B^*} Q(z)\,dm(z) < \infty$$

для достаточно больших n, где B и B^* – относительно компактные области в $\mathbb{D}$ и $f(\mathbb{D})$, соответственно, такие, что $g(\overline{B}) \subset B^*$. Замена переменных в интегралах справедлива, ибо g_n, $f_n \in W^{1,2}_{\rm loc}$. Из последней оценки следует, что $f^{-1} \in W^{1,2}_{\rm loc}(f(\mathbb{D}))$, см. [12; гл. III, лемма 3.5]. Отсюда следует, что f обладает (N^{-1})-свойством, см. замечание 8.4 (3) раздела 8.4 в [6], что, в свою очередь, эквивалентно тому, что $J_f(z) \neq 0$ п.в., см. [13]. Наконец, для произвольного компакта $C \subset \mathbb{D}$ в силу неравенства Шварца норму производных ∂f и $\overline{\partial} f$ в $L^1(C)$ можно оценить следующим образом:

$$\|\overline{\partial} f\| \leqslant \|\partial f\| \leqslant \|Q(z)\|^{1/2}\cdot \|J_f(z)\|^{1/2} \leqslant \|Q(z)\|^{1/2}\cdot m(f(C)),$$

откуда следует, что $f \in W^{1,1}_{\rm loc}(\mathbb{D})$, см. [2; с. 8]. Лемма 1 доказана.

4. Важнейшие следствия. Лемма 1, сформулированная и доказанная нами выше, является важнейшим инструментом, позволяющим сформулировать теперь основные результаты настоящей работы. Прежде всего, мы формулируем достаточные условия существования гомеоморфных решений уравнения (1.1) на основе условия расходимости некоторого интеграла. Рассмотрение такого условия не является случайным – в работах многих известных математиков, таких как Шабат, Зорич, см., например, [14], [15], см. также разделы 11.4–11.6 в [6], встречались условия расходимости интеграла вида $\int \frac{dt}{tK(t)}$, где $K(t)$ – некоторая функция. Обозначим через $q_{z_0}(r)$ среднее значение функции $Q(z)$ над окружностью $\{|z-z_0|=r\}$,

$$q_{z_0}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(z_0+re^{i\theta})\,d\theta.$$

Теорема 1. *Пусть функция $\nu(z,w)\colon \mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ удовлетворяет условиям Каратеодори и пусть $K_\nu(z,w) \leqslant Q(z) \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{D})$. Предположим, что*

$$\int_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{rq_{z_0}(r)} = \infty,$$

где $\delta(z_0)$ – некоторое положительное число, $\delta(z_0) < \operatorname{dist}(z_0,\partial\mathbb{D})$. Тогда уравнение (1.1) имеет регулярное гомеоморфное решение f класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ в $\mathbb{D}$, такое, что $f^{-1} \in W^{1,2}_{\rm loc}(f(\mathbb{D}))$.

Доказательство. Заметим, что $Q(z)$ не меньше единицы, ибо, по определению, $K_\nu(z,w) \geqslant 1$ при п.в. z и каждом фиксированном w. Следовательно, $q_{z_0}(t) \geqslant 1$ при п.в. t. Положим

$$\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{tq_{z_0}(t)}, & t \in (0,\delta(z_0)),\\ 0, & t \notin (0,\delta(z_0)).\end{cases}$$

Заметим, что $\int_{\varepsilon}^{\delta(z_0)}\psi(t)\,dt>0$ для всех $\varepsilon\in(0,\delta(z_0))$, поскольку в противном случае $q_{z_0}(t)=\infty$ при п.в. $t\in(0,\delta(z_0))$, что невозможно, ибо по условию теоремы $Q(z)\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{D})$. Кроме того,

$$\int_{\varepsilon}^{\delta(z_0)}\psi(t)\,dt\leqslant\int_{\varepsilon}^{\delta(z_0)}\frac{dt}{t}<\infty\qquad\text{для всех}\quad\varepsilon\in(0,\delta(z_0)).$$

Таким образом, к указанной выше функции ψ можно применить лемму 1, из которой следует требуемое заключение.

Следующий важный раздел настоящей работы относится к некоторым функциям специального вида. Напомним, что функция $\varphi\colon D\to\mathbb{R}$, $\varphi\in L^1_{\rm loc}(D)$, имеет *ограниченное среднее колебание* в области D, что записывается в виде $\varphi\in BMO$, если

$$\|\varphi\|_*=\sup_{B\subset D}\frac{1}{m(B)}\int_B|\varphi(z)-\varphi_B|\,dm(z)<\infty,\tag{4.1}$$

где sup берется по всем кругам $B\subset D$ и $\varphi_B=\frac{1}{m(B)}\int_B\varphi(z)\,dm(z)$ – среднее значение функции φ на круге B, см., например, [9]. Хорошо известно, что $L^\infty(D)\subset BMO(D)\subset L^p_{\rm loc}(D)$, см., например, [9]. Рассмотрим следующее определение, обобщающее понятие ограниченного среднего колебания в плане отсутствия “равномерности” по заданной области величины, стоящей под знаком sup в (4.1), см., например, раздел 6.1 в [6]. Будем говорить, что функция $\varphi\colon D\to\mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $z_0\in D$, пишем $\varphi\in FMO(z_0)$, если

$$\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\pi\varepsilon^2}\int_{B(z_0,\varepsilon)}|\varphi(z)-\overline{\varphi}_\varepsilon|\,dm(z)<\infty,\tag{4.2}$$

где $\overline{\varphi}_\varepsilon=(1/\pi\varepsilon^2)\int_{B(z_0,\varepsilon)}\varphi(z)\,dm(z)$. Заметим, что при выполнении условия (4.2) возможна ситуация, когда $\overline{\varphi}_\varepsilon\to\infty$ при $\varepsilon\to0$. Также будем говорить, что $\varphi\colon D\to\mathbb{R}$ – функция конечного среднего колебания в области D, пишем $\varphi\in FMO(D)$, если φ имеет конечное среднее колебание в каждой точке $z_0\in D$. Очевидно, $BMO\subset FMO$. Заметим, что $FMO\neq BMO_{\rm loc}$, см. пример раздела 11.2 в [6].

Предложение 4. *Пусть $0\in D\subset\mathbb{C}$, $\varphi\colon D\to\mathbb{R}$ – неотрицательная функция, имеющая конечное среднее колебание в точке $z_0=0$. Тогда*

$$\int_{\varepsilon<|z|<\varepsilon_0}\frac{\varphi(z)\,dm(z)}{(|z|\log(1/|z|))^2}=O\biggl(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\biggr)$$

при $\varepsilon\to0$ и для некоторого $\varepsilon_0\leqslant\operatorname{dist}(0,\partial D)$, см. следствие 6.3 в [6].

Отметим, в частности, что всякая постоянная функция $\varphi(z)\equiv c$ всегда удовлетворяет соотношению вида (4.2). В то же время, функции с конечным средним колебанием суммируемы, вообще говоря, только в первой степени; можно построить пример функции класса FMO, которая локально суммируема в первой степени и не суммируема локально ни в какой степени $p>1$, см. пример раздела 11.3 в [6].

Теорема 2. *Пусть функция $\nu(z,w)\colon\mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Предположим, что $K_\nu(z,w)\leqslant Q(z)\in FMO(\mathbb{D})$. Тогда уравнение (1.1) имеет регулярное гомеоморфное решение f класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ в $\mathbb{D}$ такое, что $f^{-1}\in W^{1,2}_{\rm loc}(f(\mathbb{D}))$.*

Доказательство. Пусть $z_0 \in \mathbb{D}$, $\varepsilon_0 < \min\{\operatorname{dist}(z_0, \partial\mathbb{D}),\ e^{-1}\}$. На основании предложения 4 для функции $0 < \psi(t) = 1/(t\log(1/t))$ будем иметь, что

$$\int_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} Q(z)\cdot\psi^2(|z-z_0|)\,dm(z) = O\biggl(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\biggr).$$

Заметим также, что $I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \displaystyle\int_\varepsilon^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt = \log(\log(1/\varepsilon)/\log(1/\varepsilon_0))$. Утверждение теоремы 2 следует теперь из леммы 1.

Следствие 1. *В частности, если в каждой точке* $z_0 \in \mathbb{D}$

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi\varepsilon^2}\int_{B(z_0,\varepsilon)} Q(z)\,dm(z) < \infty,$$

то уравнение (1.1) *имеет регулярное гомеоморфное решение* f *класса* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ *в* $\mathbb{D}$ *такое, что* $f^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(\mathbb{D}))$.

Теорема 3. *Пусть функция* $\nu(z,w)\colon \mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ *удовлетворяет условиям Каратеодори. Предположим, что* $K_\nu(z,w) \leqslant Q(z)$, *где*

$$q_{z_0}(r) = O\biggl(\log\frac{1}{r}\biggr) \qquad \text{для всех}\quad z_0\in\mathbb{D} \tag{4.3}$$

при $r\to 0$. *Тогда уравнение* (1.1) *имеет регулярное гомеоморфное решение* f *класса* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ *в* $\mathbb{D}$ *такое, что* $f^{-1}\in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(f(\mathbb{D}))$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно выбрать в лемме 1 произвольно $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(z_0,\partial\mathbb{D})$ и функцию $\psi(t) = 1(t\log(1/t))$. Заметим, что

$$\begin{aligned}
&\int_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0}\frac{Q(z)\,dm(z)}{(|z-z_0|\log(1/|z-z_0|))^2}\\
&\qquad=\int_\varepsilon^{\varepsilon_0}\biggl(\int_{|z-z_0|=r}\frac{Q(z)\,dm(z)}{(|z-z_0|\log(1/|z-z_0|))^2}\,dS\biggr)\,dr\\
&\qquad\leqslant 2\pi\int_\varepsilon^{\varepsilon_0}\frac{dr}{r\log(1/r)} = 2\pi\log\frac{\log(1/\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon_0)} = 2\pi\cdot I(\varepsilon,\varepsilon_0),
\end{aligned}$$

где $I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \displaystyle\int_\varepsilon^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt$. Заключение теоремы следует теперь из леммы 1.

Следствие 2. *Условие* (4.3) *и заключение теоремы* 3 *выполнены, если потребовать, чтобы в каждой точке* $z_0\in\mathbb{D}$

$$Q(z)\leqslant C\cdot\log\frac{1}{|z-z_0|}$$

для некоторой постоянной C *(которая может зависеть от* z_0*) при* $z\to z_0$.

Замечание 3. Отметим, что решения квазилинейного уравнения Бельтрами, о которых идет речь в данной статье, вообще говоря, не единственны. Единственность решений для уравнения Бельтрами – предмет отдельных исследований, требующих применения иной техники, не связанной с теорией сходимости отображений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Б. В. Боярский, “Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами”, *Матем. сб.*, **43**:4 (1957), 451–503.

[2] V. G. Maz’ya, *Sobolev Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[3] O. Lehto, K. Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane*, Grundlehren Math. Wiss., **126**, Springer, New York, 1973.

[4] M. A. Brakalova, J. A. Jenkins, “On solutions of the Beltrami equation”, *J. Anal. Math.*, **76**:1 (1998), 67–92.

[5] V. Gutlyanskii, O. Martio, T. Sugawa, M. Vuorinen, “On the degenerate Beltrami equation”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **357**:3 (2005), 875–900.

[6] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory*, Springer Monogr. Math., Springer, New York, 2009.

[7] O. Martio, V. Miklyukov, “On existence and uniqueness of degenerate Beltrami equation”, *Complex Var. Theory Appl.*, **49**:7-9 (2004), 647–656.

[8] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, “On convergence theory for Beltrami equations”, *Ukr. Math. Bull.*, **5**:4 (2008), 517–528.

[9] F. John, L. Nirenberg, “On functions of bounded mean oscillation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **14**:3 (1961), 415–426.

[10] C. J. Bishop, V. Ya. Gutlyanskii, O. Martio, M. Vuorinen, “On conformal dilatation in space”, *Int. J. Math. Math. Sci.*, **2003**:22 (2003), 1397–1420.

[11] Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям*, Мир, М., 1969.

[12] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Наука, Новосибирск, 1982.

[13] С. П. Пономарев, “N^{-1}-свойство отображений и условие (N) Лузина”, *Матем. заметки*, **58**:3 (1995), 411–418.

[14] Б. В. Шабат, “К теории квазиконформных отображений в пространстве”, *Докл. АН СССР*, **132**:5 (1960), 1045–1048.

[15] В. А. Зорич, “Допустимый порядок роста характеристики квазиконформности в теореме Лаврентьева”, *Докл. АН СССР*, **181**:3 (1968), 530–533.

Е. А. Севостьянов
Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
г. Донецк
E-mail: brusin2006@rambler.ru, sevostyanov@skif.net

Поступило
07.03.2009
Исправленный вариант
03.07.2010