

УДК 517.5

РАВНОСТЕПЕННАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ КВАЗИКОНФОРМНЫХ В СРЕДНЕМ ОТОБРАЖЕНИЙ

В. И. Рязанов, Е. А. Севостьянов

Аннотация. Установлены равностепенная непрерывность и нормальность семейств \mathfrak{F}^Φ так называемых кольцевых $Q(x)$ -гомеоморфизмов с ограничениями интегрального типа $\int \Phi(Q(x)) dm(x) < \infty$ в области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Показано, что найденные условия на функцию Φ являются не только достаточными, но и необходимыми для равностепенной непрерывности и нормальности таких семейств отображений. Также приведены приложения этих результатов к классам Соболева $W_{loc}^{1,n}$.

Ключевые слова: равностепенная непрерывность, нормальное семейство, квазиконформное в среднем отображение, класс Соболева.

1. Введение

Всюду далее m — мера Лебега в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$.

В теории отображений, называемых квазиконформными в среднем, условия вида

$$\int_D \Phi(Q(x)) dm(x) < \infty \quad (1.1)$$

являются стандартными для различных характеристик Q отображений (см., например, [1–15]). Изучение классов с интегральными условиями вида (1.1) также актуально в связи с развитием в последнее время теории вырожденных уравнений Бельтрами (см., например, монографии [16, 17], а также обзоры [18, 19]) и так называемых отображений с конечным искажением (см. гл. VI в [20] и разд. 8.4 в [17]).

Статья является естественным продолжением работы [21]. Здесь мы исследуем вопросы, связанные с равностепенной непрерывностью и нормальностью так называемых кольцевых $Q(x)$ -гомеоморфизмов с условием (1.1), и приводим соответствующие приложения к классам Соболева, включающим, в частности, квазиконформные отображения, геометрическое определение которых также основано на понятии модуля.

Напомним, что *модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_D \rho^n(x) dm(x),$$

где борелевы функции $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ допустимы для семейства кривых Γ в D , $\rho \in \text{adm } \Gamma$, т. е.

$$\int_\gamma \rho(x) |dx| \geq 1 \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Одно из эквивалентных геометрических определений K -квазиконформных отображений f с $K \in [1, \infty)$, заданных в области D в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, сводится к неравенству

$$M(f\Gamma) \leq K M(\Gamma) \quad (1.2)$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D (см. [22, гл. II, определение 13.1]). Другими словами, (1.2) означает, что искажение внешней меры M над пространством всех кривых в D ограничено при квазиконформных отображениях.

Аналогично для заданной области D в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, и измеримой (по Лебегу) функции $Q : D \rightarrow [1, \infty]$, гомеоморфизм $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, называется $Q(x)$ -гомеоморфизмом, если

$$M(f\Gamma) \leq \int_D Q(x) \rho^n(x) dm(x) \quad (1.3)$$

для каждого семейства Γ кривых γ в D и каждой $\rho \in \text{adm } \Gamma$ (см., например, [23, 24], а также [17, разд. 4.1]).

В случае $Q(x) \leq K$ п. в. снова приходим к неравенству вида (1.2). В общем случае последнее неравенство означает, что модуль семейства $f\Gamma$ оценивается через модуль Γ с некоторым весом $Q(x)$, $M(f\Gamma) \leq M_Q(\Gamma)$ (см., например, [25]). В монографии В. М. Миклюкова [26] можно найти другой класс отображений, удовлетворяющих аналогичным неравенствам в терминах емкостей. Впервые неравенство типа (1.3) установлено Лехто и Виртаненом для квазиконформных отображений на плоскости в [27, гл. V, разд. 6.3] и Ю. Ф. Струговым в работе [12] для пространственных отображений, квазиконформных в среднем. В [28] неравенство вида (1.3) установлено для квазиконформных отображений в пространстве с $Q(x)$, равным $K_I(x, f)$.

Напомним, что *внутренней дилатацией* отображения $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, в точке $x \in D$ дифференцируемости f называется величина

$$K_I(x, f) = \frac{|J(x, f)|}{l(f'(x))^n},$$

если $J(x, f) \neq 0$, $K_I(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_I(x, f) = \infty$ в остальных точках, где $J(x, f)$ — якобиан отображения f в точке x и

$$l(f'(x)) = \inf_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}.$$

Следующее понятие обобщает и локализует вышеприведенное понятие Q -гомеоморфизма. Оно мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу (см., например, [29]), введено впервые В. И. Рязановым, У. Сребро и Э. Якубовым на плоскости, а позже распространено В. И. Рязановым и Е. А. Севостьяновым на пространственный случай (см., например, [21; 17, гл. VII, XI]). Пусть $E, F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ — произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E, F, D)$ семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D , т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$.

Пусть $x_0 \in D$ и $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ — измеримая (по Лебегу) функция. Гомеоморфизм $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ называют *кольцевым Q -гомеоморфизмом в точке $x_0 \in D$* , если f удовлетворяет соотношению

$$M(f(\Gamma(S_1, S_2, R))) \leq \int_R Q(x) \eta^n(|x - x_0|) dm(x) \quad (1.4)$$

для каждого кольца $R = R(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$, $S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_i\}$, где $0 < r_1 < r_2 < r_0 := \text{dist}(x_0, \partial D)$, и каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1.$$

Гомеоморфизм f называется *кольцевым Q -гомеоморфизмом в области D* , если он является кольцевым Q -гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in D$. Заметим, что, в частности, гомеоморфизмы $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ класса $W_{\text{loc}}^{1,n}$ при $K_I(x, f) \in L_{\text{loc}}^1$ являются кольцевыми Q -гомеоморфизмами, а также Q -гомеоморфизмами с $Q(x) := K_I(x, f)$ (см., например, теоремы 8.1 и 8.6 в [17], а также теорему 6.10 и следствие 4.9 в [30]).

Понятие кольцевого Q -гомеоморфизма может быть естественным образом распространено на случай $x_0 = \infty$. Именно, при $\infty \in D \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ гомеоморфизм $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ называется *кольцевым Q -гомеоморфизмом в ∞* , если отображение $\tilde{f} = f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$ является кольцевым Q' -гомеоморфизмом в нуле при $Q'(x) = Q\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$. Другими словами, отображение $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ является кольцевым Q -гомеоморфизмом в ∞ тогда и только тогда, когда соотношение

$$M(f(\Gamma(S(R_1), S(R_2), R))) \leq \int_R Q(y)\eta^n(|y|) dm(y)$$

выполнено для каждого кольца $R = R(R_1, R_2, 0) = \{y \in \mathbb{R}^n : R_1 < |y| < R_2\}$ в D при $0 < R_1 < R_2 < \infty$, $S(R_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = R_i\}$ и каждой измеримой функции $\eta : (R_1, R_2) \rightarrow [0, \infty]$ при $\int_{R_1}^{R_2} \eta(r) dr \geq 1$.

2. Предварительные сведения

Пусть (X, d) и (X', d') — метрические пространства с расстояниями d и d' соответственно. Семейство \mathfrak{F} непрерывных отображений $f : X \rightarrow X'$ называется *нормальным*, если из любой последовательности отображений $f_m \in \mathfrak{F}$ можно выделить подпоследовательность f_{m_k} , которая сходится локально равномерно в X к непрерывному отображению $f : X \rightarrow X'$. Введенное понятие очень тесно связано со следующим. Семейство \mathfrak{F} отображений $f : X \rightarrow X'$ называется *равностепенно непрерывным в точке $x_0 \in X$* , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всех x с $d(x, x_0) < \delta$ и для всех $f \in \mathfrak{F}$. Говорят, что \mathfrak{F} *равностепенно непрерывно*, если \mathfrak{F} равностепенно непрерывно в каждой точке из X .

Следующая версия теоремы Арцела — Асколи будет полезна в дальнейшем (см., например, п. 20.4 в [22]).

Предложение 2.1. *Если (X, d) — сепарабельное метрическое пространство, а (X', d') — компактное метрическое пространство, то семейство \mathfrak{F} отображений $f : X \rightarrow X'$ нормально тогда и только тогда, когда \mathfrak{F} равностепенно непрерывно.*

В частности, предложение 2.1 имеет место в случае, когда $X = \mathbb{R}^n$ с обычным расстоянием и X' — расширенное пространство $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, являющееся компактным, со сферической метрикой.

Напомним, что сферическая (хордальная) метрика $h(x, y)$ равна $|\pi(x) - \pi(y)|$, где π — стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2})$ в \mathbb{R}^{n+1} , т. е. в явном виде

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}, \quad h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2}\sqrt{1 + |y|^2}}, \quad x \neq \infty \neq y.$$

Сферическим диаметром множества E в $\overline{\mathbb{R}^n}$ называется величина

$$h(E) = \sup_{x_1, x_2 \in E} h(x_1, x_2).$$

Пусть $\mathfrak{K}_{Q, \Delta}(D)$ — класс всех кольцевых Q -гомеоморфизмов f в области $D \subseteq \mathbb{R}^n, n \geq 2$, таких, что $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \geq \Delta > 0$. Следующая оценка искажения сферического расстояния при Q -гомеоморфизмах может быть найдена в [21] (см. также [17, теорема 7.3]).

Предложение 2.2. Пусть $\Delta > 0$ и $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ — измеримая функция. Тогда

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\Delta} \exp \left\{ - \int_{|x-x_0|}^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} \right\} \tag{2.1}$$

для каждого $f \in \mathfrak{K}_{Q, \Delta}(D)$ и $x \in B(x_0, \varepsilon(x_0)), \varepsilon(x_0) < \text{dist}(x_0, \partial D)$, где $\alpha_n > 0$ зависит только от n и $q_{x_0}(r)$ — среднее интегральное значение функции $Q(z)$ на сфере $|z - x_0| = r$.

Обратная функция Φ^{-1} может быть корректно определена для любой неубывающей функции $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$:

$$\Phi^{-1}(\tau) = \inf_{\Phi(t) \geq \tau} t. \tag{2.2}$$

Как обычно, \inf в (2.2) равен ∞ , если множество $t \in [0, \infty]$ таких, что $\Phi(t) \geq \tau$, пусто. Заметим, что функция Φ^{-1} также неубывающая.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из определения очевидно, что

$$\Phi^{-1}(\Phi(t)) \leq t \quad \forall t \in [0, \infty] \tag{2.3}$$

с равенством в (2.3), исключая интервалы постоянства функции $\Phi(t)$.

Поскольку отображение $t \mapsto t^p$ для каждого положительного p является сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом $[0, \infty]$ на $[0, \infty]$, теорема 2.1 из [31] может быть переписана в следующем виде, более удобном для дальнейших приложений. Здесь, в (2.5) и (2.6), мы дополняем определения интегралов, полагая их равными ∞ при $\Phi_p(t) = \infty$, соответственно $H_p(t) = \infty$, для всех $t \geq T \in [0, \infty)$. Интеграл в (2.6) понимается в смысле Лебега — Стильтьеса, а интегралы в (2.5) и (2.7)–(2.10) — как обычные интегралы Лебега.

Предложение 2.3. Пусть $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ — неубывающая функция. Положим

$$H_p(t) = \log \Phi_p(t), \quad \Phi_p(t) = \Phi(t^p), \quad p \in (0, \infty). \tag{2.4}$$

Тогда равенство

$$\int_{\delta}^{\infty} H'_p(t) \frac{dt}{t} = \infty \tag{2.5}$$

влечет

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{dH_p(t)}{t} = \infty \tag{2.6}$$

и (2.6) эквивалентно соотношению

$$\int_{\delta}^{\infty} H_p(t) \frac{dt}{t^2} = \infty \tag{2.7}$$

для некоторого $\delta > 0$. Равенство (2.7) эквивалентно каждому из равенств:

$$\int_0^{\Delta} H_p\left(\frac{1}{t}\right) dt = \infty \tag{2.8}$$

при некотором $\delta > 0$,

$$\int_{\delta_*}^{\infty} \frac{d\eta}{H_p^{-1}(\eta)} = \infty \tag{2.9}$$

при некотором $\delta_* > H(+0)$,

$$\int_{\delta_*}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi_p^{-1}(\tau)} = \infty \tag{2.10}$$

при некотором $\delta_* > \Phi(+0)$.

Более того, (2.5) эквивалентно соотношению (2.6), и, следовательно, (2.5)–(2.10) эквивалентны друг другу при дополнительном условии, что Φ абсолютно непрерывна. В частности, все условия (2.5)–(2.10) эквивалентны друг другу при условии, что функция Φ выпуклая и неубывающая.

Легко видеть, что условия (2.5)–(2.10) более слабые при больших p (см., например, (2.7)). Необходимо дать еще одно пояснение. В правых частях условий (2.5)–(2.10) подразумевается символ $+\infty$. При $\Phi_p(t) = 0$ для $t \in [0, t_*]$ имеем $H_p(t) = -\infty$ для $t \in [0, t_*]$ и полагаем $H'_p(t) := 0$ для $t \in [0, t_*]$. Заметим, что условия (2.6) и (2.7) исключают случай, когда t_* принадлежит интервалу интегрирования в указанных выше соотношениях. В противном случае левые части в (2.6) и (2.7) либо одновременно равны $-\infty$, либо не определены. Следовательно, мы можем предполагать в (2.5)–(2.8), что $\delta > t_0$ и соответственно $\Delta < 1/t_0$, где $t_0 := \sup_{\Phi_p(t)=0} t$, $t_0 = 0$, если $\Phi_p(0) > 0$.

3. Основная лемма и ее следствия

Напомним, что функция $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ называется *выпуклой*, если

$$\Phi(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \leq \lambda\Phi(t_1) + (1 - \lambda)\Phi(t_2)$$

при всех $t_1, t_2 \in [0, \infty]$ и $\lambda \in [0, 1]$.

В дальнейшем $\mathbb{R}^n(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, 1)$, обозначает сферическое кольцо в пространстве \mathbb{R}^n , $n \geq 2$:

$$\mathbb{R}^n(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x| < 1\}. \tag{3.1}$$

Следующее утверждение является обобщением и усилением леммы 3.1 из [31].

Лемма 3.1. Пусть $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ — измеримая функция, $\Phi : [0, \infty] \rightarrow (0, \infty]$ — неубывающая выпуклая функция, и пусть среднее интегральное значение $M(\varepsilon)$ функции $\Phi \circ Q$ в кольце $\mathbb{R}^n(\varepsilon)$ конечно. Тогда

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dr}{r q^{\frac{1}{p}}(r)} \geq \frac{1}{n} \int_{eM(\varepsilon)}^{\frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^n}} \frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{p}}} \quad \forall p \in (0, \infty), \varepsilon \in (0, 1), \quad (3.2)$$

где $q(r)$ — среднее интегральное значение функции $Q(x)$ над сферой $|x| = r$.

Замечание 3.1. При каждом $p \in (0, \infty)$ соотношение (3.2) эквивалентно неравенству

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dr}{r q^{\frac{1}{p}}(r)} \geq \frac{1}{n} \int_{eM(\varepsilon)}^{\frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^n}} \frac{d\tau}{\tau \Phi_p^{-1}(\tau)}, \quad \Phi_p(t) := \Phi(t^p). \quad (3.3)$$

Доказательство леммы 3.1. Обозначим $t_* = \sup_{\Phi_p(t)=\tau_0} t$, $\tau_0 = \Phi(0) > 0$.

Полагая $H_p(t) := \log \Phi_p(t)$, видим, что $H_p^{-1}(\eta) = \Phi_p^{-1}(e^\eta)$, $\Phi_p^{-1}(\tau) = H_p^{-1}(\log \tau)$ (см. лемму 2.1 в [31]). Следовательно,

$$q^{\frac{1}{p}}(r) = H_p^{-1} \left(\log \frac{h(r)}{r^n} \right) = H_p^{-1} \left(n \log \frac{1}{r} + \log h(r) \right) \quad \forall r \in R_*, \quad (3.4)$$

где $h(r) := r^n \Phi(q(r)) = r^n \Phi_p(q^{\frac{1}{p}}(r))$ и $R_* = \{r \in (\varepsilon, 1) : q^{\frac{1}{p}}(r) > t_*\}$. Тогда

$$q^{\frac{1}{p}}(e^{-s}) = H_p^{-1}(ns + \log h(e^{-s})) \quad \forall s \in S_*, \quad (3.5)$$

где $S_* = \{s \in (0, \log \frac{1}{\varepsilon}) : q^{\frac{1}{p}}(e^{-s}) > t_*\}$.

В силу неравенства Иенсена и выпуклости функции Φ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\log \frac{1}{\varepsilon}} h(e^{-s}) ds &= \int_{\varepsilon}^1 h(r) \frac{dr}{r} = \int_{\varepsilon}^1 \Phi(q(r)) r^{n-1} dr \\ &\leq \int_{\varepsilon}^1 \left(\int_{S(r)} \Phi(Q(x)) d\mathcal{A} \right) r^{n-1} dr \leq \frac{\Omega_n}{\omega_{n-1}} M(\varepsilon) = \frac{1}{n} M(\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где использовано среднее значение функции $\Phi \circ Q$ на сфере $S(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$ относительно меры площади. Как обычно, здесь Ω_n и ω_{n-1} — объем единичного шара и площадь единичной сферы в \mathbb{R}^n соответственно. Рассуждая от противного, легко видеть, что

$$|T| = \int_T ds \leq \frac{1}{n}, \quad (3.7)$$

где $T = \{s \in (0, \log \frac{1}{\varepsilon}) : h(e^{-s}) > M(\varepsilon)\}$. Следующим шагом покажем, что

$$q^{\frac{1}{p}}(e^{-s}) \leq H_p^{-1}(ns + \log M(\varepsilon)) \quad \forall s \in (0, \log(1/\varepsilon)) \setminus T_*, \quad (3.8)$$

где $T_* := T \cap S_*$. Заметим, что $(0, \log \frac{1}{\varepsilon}) \setminus T_* = [(0, \log \frac{1}{\varepsilon}) \setminus S_*] \cup [(0, \log \frac{1}{\varepsilon}) \setminus T] = [(0, \log \frac{1}{\varepsilon}) \setminus S_*] \cup [S_* \setminus T]$. Неравенство (3.8) имеет место для $s \in S_* \setminus T$ ввиду (3.5), поскольку функция H_p^{-1} неубывающая. Заметим также, что

$$e^{ns} M(\varepsilon) > \Phi(0) = \tau_0 \quad \forall s \in (0, \log(1/\varepsilon)), \quad (3.9)$$

а тогда

$$t_* < \Phi_p^{-1}(e^{ns} M(\varepsilon)) = H_p^{-1}(ns + \log M(\varepsilon)) \quad \forall s \in (0, \log(1/\varepsilon)). \quad (3.10)$$

Следовательно, (3.8) имеет место также для $s \in (0, \log \frac{1}{\varepsilon}) \setminus S_*$.

Поскольку функция H_p^{-1} неубывающая, ввиду (3.7) и (3.8) получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dr}{rq^{\frac{1}{p}}(r)} &= \int_0^{\log \frac{1}{\varepsilon}} \frac{ds}{q^{\frac{1}{p}}(e^{-s})} \geq \int_{(0, \log \frac{1}{\varepsilon}) \setminus T_*} \frac{ds}{H_p^{-1}(ns + \Delta)} \\ &\geq \int_{|T_*|}^{\log \frac{1}{\varepsilon}} \frac{ds}{H_p^{-1}(ns + \Delta)} \geq \int_{\frac{1}{n}}^{\log \frac{1}{\varepsilon}} \frac{ds}{H_p^{-1}(ns + \Delta)} = \frac{1}{n} \int_{1+\Delta}^{n \log \frac{1}{\varepsilon} + \Delta} \frac{d\eta}{H_p^{-1}(\eta)}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $\Delta = \log M(\varepsilon)$. Заметим, что $1 + \Delta = \log eM(\varepsilon)$. Таким образом,

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dr}{rq^{\frac{1}{p}}(r)} \geq \frac{1}{n} \int_{\log eM(\varepsilon)}^{\log \frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^n}} \frac{d\eta}{H_p^{-1}(\eta)}, \quad (3.12)$$

и после замены переменной $\eta = \log \tau$ получаем (3.3), а значит, и (3.2). \square

Следствие 3.1. Пусть $\Phi : [0, \infty] \rightarrow (0, \infty]$ — неубывающая выпуклая функция, $Q : \mathbb{B}^n \rightarrow [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $Q_*(x) = 1$ при $Q(x) < 1$ и $Q_*(x) = Q(x)$ при $Q(x) \geq 1$. Предположим, что среднее значение $M_*(\varepsilon)$ функции $\Phi \circ Q_*$ над кольцом $\mathbb{B}^n(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, 1)$, конечно. Тогда

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dr}{rq^{\frac{\lambda}{p}}(r)} \geq \frac{1}{n} \int_{eM_*(\varepsilon)}^{\frac{M_*(\varepsilon)}{\varepsilon^n}} \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{p}}} \quad \forall \lambda \in (0, 1), p \in (0, \infty), \quad (3.13)$$

где $q(r)$ — среднее интегральное значение функции $Q(x)$ на сфере $|x| = r$.

Действительно, пусть $q_*(r)$ — среднее интегральное значение функции $Q_*(x)$ на сфере $|x| = r$. Тогда $q(r) \leq q_*(r)$ и, кроме того, $q_*(r) \geq 1$ для всех $r \in (0, 1)$. Таким образом, $q^{\frac{\lambda}{p}}(r) \leq q_*^{\frac{\lambda}{p}}(r) \leq q_*^{\frac{1}{p}}(r)$ для всех $\lambda \in (0, 1)$, и по лемме 3.1, примененной к функции $Q_*(x)$, получаем (3.13).

Теорема 3.1. Пусть $Q : \mathbb{B}^n \rightarrow [0, \infty]$ — измеримая функция такая, что

$$\int_{\mathbb{B}^n} \Phi(Q(x)) dm(x) < \infty, \quad (3.14)$$

где $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ — неубывающая выпуклая функция такая, что

$$\int_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{p}}} = \infty, \quad p \in (0, \infty), \quad (3.15)$$

при некотором $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$. Тогда

$$\int_0^1 \frac{dr}{rq^{\frac{1}{p}}(r)} = \infty, \quad (3.16)$$

где $q(r)$ — среднее интегральное значение функции $Q(x)$ на сфере $|x| = r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\Phi(0) \neq 0$, то теорема 3.1 является прямым следствием леммы 3.1. В случае $\Phi(0) = 0$ фиксируем произвольное число $\delta \in (0, \delta_0)$ и полагаем $\Phi_*(t) = \Phi(t)$, если $\Phi(t) > \delta$, и $\Phi_*(t) = \delta$, если $\Phi(t) \leq \delta$. Тогда по (3.14) имеем $\int_{\mathbb{B}^n} \Phi_*(Q(x)) dm(x) < \infty$, поскольку $|\Phi_*(t) - \Phi(t)| \leq \delta$, а мера \mathbb{B}^n конечна.

Кроме того, $\Phi_*^{-1}(\tau) = \Phi^{-1}(\tau)$ при $\tau \geq \delta$, а тогда по (3.15) $\int_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau[\Phi_*^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{p}}} = \infty$.

Таким образом, (3.16) имеет место снова по лемме 3.1. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Так как $[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{p}} = \Phi_p^{-1}(\tau)$, где $\Phi_p(t) = \Phi(t^p)$, из соотношения (3.15) вытекает, что

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi_p^{-1}(\tau)} = \infty \quad \forall \delta \in [0, \infty). \quad (3.17)$$

С другой стороны, соотношение вида (3.17), выполненное при некотором $\delta \in [0, \infty)$, вообще говоря, не влечет (3.15). Действительно, (3.15), очевидно, влечет (3.17) для $\delta \in [0, \delta_0)$, а для $\delta \in (\delta_0, \infty)$ имеем

$$0 \leq \int_{\delta_0}^{\delta} \frac{d\tau}{\tau \Phi_p^{-1}(\tau)} \leq \frac{1}{\Phi_p^{-1}(\delta_0)} \log \frac{\delta}{\delta_0} < \infty, \quad (3.18)$$

поскольку функция Φ_p^{-1} не убывает и $\Phi_p^{-1}(\delta_0) > 0$. Кроме того, по определению обратной функции $\Phi_p^{-1}(\tau) \equiv 0$ для всех $\tau \in [0, \tau_0]$, $\tau_0 = \Phi_p(0)$, следовательно, (3.17) при $\delta \in [0, \tau_0)$, вообще говоря, не влечет (3.15). Если $\tau_0 > 0$, то

$$\int_{\delta}^{\tau_0} \frac{d\tau}{\tau \Phi_p^{-1}(\tau)} = \infty \quad \forall \delta \in [0, \tau_0). \quad (3.19)$$

Однако соотношение (3.19) не несет никакой информации собственно о функции $Q(x)$ и, стало быть, из (3.17) при $\delta < \Phi(0)$ не может следовать (3.16).

Аналогично следствию 3.2 из [31] получаем

Следствие 3.2. Если $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ — неубывающая выпуклая функция, а Q удовлетворяет условию (3.14), то каждое из условий (2.5)–(2.10) при $p \in (0, \infty)$ влечет (3.16).

Если, кроме того, $\Phi(1) < \infty$ либо $q(r) \geq 1$ на подмножестве интервала $(0, 1)$, имеющем положительную меру, каждое из условий (2.5)–(2.10) при $p \in (0, \infty)$ влечет, что

$$\int_0^1 \frac{dr}{r q^{\frac{\lambda}{p}}(r)} = \infty \quad \forall \lambda \in (0, 1), \quad (3.20)$$

а также

$$\int_0^1 \frac{dr}{r^{\alpha} q^{\frac{\beta}{p}}(r)} = \infty \quad \forall \alpha \geq 1, \beta \in (0, \alpha]. \quad (3.21)$$

**4. Достаточные условия
равностепенной непрерывности**

Всюду далее D — фиксированная область в расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, $n \geq 2$. Предположим, что заданы функция $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$, числа $M > 0$ и $\Delta > 0$. Обозначим через $\mathfrak{R}_{M,\Delta}^\Phi$ семейство всех кольцевых $Q(x)$ -гомеоморфизмов в D таких, что $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \geq \Delta$ и

$$\int_D \Phi(Q(x)) \frac{dm(x)}{(1 + |x|^2)^n} \leq M. \tag{4.1}$$

Иногда может быть использовано обозначение $\mathfrak{R}_{M,\Delta}^\Phi(D)$, чтобы явно указать на область D .

Теорема 4.1. Пусть $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ — неубывающая выпуклая функция. Если

$$\int_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \tag{4.2}$$

для некоторого $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$, то класс $\mathfrak{R}_{M,\Delta}^\Phi$ равностепенно непрерывен и, следовательно, образует нормальное семейство отображений при всех $M \in (0, \infty)$ и $\Delta \in (0, 1)$.

Замечание 4.1. Условие

$$\int_D \Phi(Q(x)) dm(x) \leq M \tag{4.3}$$

влечет соотношение (4.1). Следовательно, (4.1) является более общим, чем (4.3), а соответствующий класс кольцевых Q -гомеоморфизмов, удовлетворяющих (4.3), представляет собой подкласс семейства $\mathfrak{R}_{M,\Delta}^\Phi$. С другой стороны, если область D ограничена, то условие (4.1) влечет условие

$$\int_D \Phi(Q(x)) dm(x) \leq M_*, \tag{4.4}$$

где $M_* = M \cdot (1 + \delta_*^2)^n$, $\delta_* = \sup_{x \in D} |x|$.

Доказательство теоремы 4.1. Ввиду предложения 2.1 достаточно показать, что семейство отображений $\mathfrak{R}_{M,\Delta}^\Phi$ равностепенно непрерывно в каждой точке $x_0 \in D$. Если $x_0 \neq \infty$, то по предложению 2.2

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\Delta} \exp \left\{ - \int_{|x-x_0|}^{\rho} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} \right\} \tag{4.5}$$

для всех $x \in B(x_0, \rho)$ и каждого положительного $\rho = \rho(x_0) < \text{dist}(x_0, \partial D)$, где $q_{x_0}(r)$ обозначает среднее значение $Q(x)$ на сфере $|z - x_0| = r$ и постоянная α_n зависит только от n . После замены $t = r/\rho$ интеграл в правой части (4.5) по лемме 3.1 оценивается следующим образом:

$$\int_{|x-x_0|}^{\rho} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} = \int_{\varepsilon}^1 \frac{dr}{r q^{\frac{1}{n-1}}(r)} \geq \frac{1}{n} \int_{\varepsilon M(\varepsilon)}^{\frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^n}} \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}},$$

где $\varepsilon = |x - x_0|/\rho$, $q(r) = q_{x_0}(\rho r)$ и

$$M(\varepsilon) = \int_R \Phi(Q(z)) dm(z) = \frac{1}{\Omega_n \rho^n (1 - \varepsilon^n)} \int_R \Phi(Q(z)) dm(z),$$

$R = \{z \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < |z - x_0| < \rho\}$ — кольцо с центром в точке x_0 и Ω_n — объем единичного шара \mathbb{B}^n в \mathbb{R}^n . Так как $|z| \leq |z - x_0| + |x_0| \leq \rho(x_0) + |x_0|$, получаем, что

$$M(\varepsilon) \leq \frac{\beta_n(x_0)}{\Omega_n (1 - \varepsilon^n)} \int_R \Phi(Q(z)) \frac{dm(z)}{(1 + |z|^2)^n},$$

где $\beta_n(x_0) = (1 + (\rho(x_0) + |x_0|)^2)^n / \rho^n(x_0)$. Следовательно, при $\varepsilon \leq 1/\sqrt[n]{2}$ и, в частности, при $\varepsilon \leq 1/2$,

$$\Phi(0) \leq M(\varepsilon) \leq \frac{2\beta_n(x_0)}{\Omega_n} M.$$

Таким образом, для всех x таких, что $|x - x_0| < \rho(x_0)/2$, имеем

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\Delta} \exp \left\{ -\frac{1}{n} \int_{\lambda_n \beta_n(x_0) M}^{\frac{\Phi(0)\rho^n(x_0)}{|x-x_0|^n}} \frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(r)]^{\frac{1}{n-1}}} \right\}, \quad (4.6)$$

где постоянная $\lambda_n = 2e/\Omega_n$ зависит только от n . Стало быть, семейство $\mathfrak{R}_{M,\Delta}^\Phi$ равномерно непрерывно в точке x_0 . Наконец, случай $x_0 = \infty$ может быть сведен к случаю $x_0 = 0$ через инверсию относительно сферы $|x| = 1$. \square

Следствие 4.1. Каждое из условий (2.5)–(2.10) при $p \in (0, n-1]$ влечет равномерную непрерывность и нормальность класса $\mathfrak{R}_{M,\Delta}^\Phi$ для всех $M \in (0, \infty)$ и $\Delta \in (0, 1)$.

Для данных функции $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ и чисел $M > 0$, $\Delta > 0$ обозначим через $S_{M,\Delta}^\Phi$ семейство всех гомеоморфизмов f , заданных в области D , принадлежащих классу Соболева $W_{\text{loc}}^{1,n}$ и имеющих локально интегрируемую внутреннюю дилатацию $K_I(x, f)$ таких, что $h(\mathbb{R}^n \setminus f(D)) \geq \Delta$, для которых выполнено соотношение вида (4.1) при $Q(x) := K_I(x, f)$. Заметим, что если функция Φ выпуклая, неубывающая и непостоянная на $[0, \infty)$, то условие (4.1) автоматически влечет, что $K_I(x, f) \in L_{\text{loc}}^1$. Заметим также, что $S_{M,\Delta}^\Phi \subset \mathfrak{R}_{M,\Delta}^\Phi$ (см., например, теорему 6.10 и следствие 4.9 в [30]). Таким образом, из теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.2. Каждое из условий (2.5)–(2.10) при $p \in (0, n-1]$ влечет равномерную непрерывность и нормальность семейства $S_{M,\Delta}^\Phi$ для всех $M \in (0, \infty)$ и $\Delta \in (0, 1)$.

Замечание 4.2. При $p = n-1$ условия типа (2.5)–(2.10) являются наиболее слабыми, которые ведут к равномерной непрерывности и нормальности классов отображений $S_{M,\Delta}^\Phi$ и $\mathfrak{R}_{M,\Delta}^\Phi$ (см. ниже теорему 5.1). Наиболее интересным из этих условий является соотношение (2.7), которое может быть переписано в виде

$$\int_{\delta}^{\infty} \log \Phi(t) \frac{dt}{t^{n'}} = \infty, \quad (4.7)$$

где $\frac{1}{n'} + \frac{1}{n} = 1$, т. е. $n' = 2$ при $n = 2$, n' строго возрастает по n и $n' = n/(n - 1) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Заметим также, что условие (4.2), как и соотношение (5.1), приводимое ниже, может быть переписано в виде

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi_{n-1}^{-1}(\tau)} = \infty, \quad \Phi_{n-1}(t) := \Phi(t^{n-1}). \tag{4.8}$$

**5. Необходимые условия
равностепенной непрерывности**

Теорема 5.1. *Предположим, что классы отображений $S_{M,\Delta}^{\Phi} \subset \mathfrak{R}_{M,\Delta}^{\Phi}$ равностепенно непрерывны (нормальны) при неубывающей выпуклой функции $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ для всех $M \in (0, \infty)$, $\Delta \in (0, 1)$. Тогда*

$$\int_{\delta_*}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \tag{5.1}$$

для всех $\delta_* \in (\tau_0, \infty)$, где $\tau_0 := \Phi(0)$.

Ясно, что функция $\Phi(t)$ в теореме 5.1 не может быть постоянной, ибо в противном случае никаких ограничений на K_I в указанной выше теореме не возникает, за исключением условия $\Phi(t) \equiv \infty$, когда классы $S_{M,\Delta}^{\Phi}$ пусты. Более того, согласно известному критерию выпуклости (см., например, [32, I.4.3, предложение 5]) наклон $[\Phi(t) - \Phi(0)]/t$ является неубывающей функцией. Поэтому доказательство теоремы 5.1 сводится к следующему утверждению.

Лемма 5.1. *Пусть функция $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ не убывает и*

$$\Phi(t) \geq C \cdot t^{\frac{1}{n-1}} \quad \forall t \in [T, \infty] \tag{5.2}$$

для некоторых $C > 0$ и $T \in (0, \infty)$. Если классы $S_{M,\Delta}^{\Phi} \subset \mathfrak{R}_{M,\Delta}^{\Phi}$ равностепенно непрерывны (нормальны) при всех $M \in (0, \infty)$ и $\Delta \in (0, 1)$, то (5.1) имеет место при всех $\delta_* \in (\tau_0, \infty)$, где $\tau_0 := \Phi(+0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Хорошо известно, что критический показатель $n - 1$ играет ключевую роль во многих проблемах пространственных отображений. Условие (5.2) может быть переписано в виде

$$\Phi_{n-1}(t) \geq Ct \quad \forall t \in [T, \infty], \tag{5.3}$$

где $\Phi_{n-1}(t) = \Phi(t^{n-1})$ и $C > 0$, $T \in (0, \infty)$, что еще раз подчеркивает важное значение функции Φ_{n-1} в данном контексте. Фактически в теореме 5.1 достаточно потребовать более слабое условие выпуклости Φ_{n-1} вместо Φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.1. Предположим, что соотношение (5.1) не выполнено, т. е.

$$\int_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi_{n-1}^{-1}(\tau)} < \infty \tag{5.4}$$

для некоторого $\delta_0 \in (\tau_0, \infty)$, где $\Phi_{n-1}(t) := \Phi(t^{n-1})$. Тогда также

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi_{n-1}^{-1}(\tau)} < \infty \quad \forall \delta \in (\tau_0, \infty), \tag{5.5}$$

поскольку $\Phi^{-1}(\tau) > 0$ для всех $\tau > \tau_0$ и функция $\Phi^{-1}(\tau)$ не убывает. Заметим, что по условию (5.2)

$$\Phi_{n-1}(t) \geq Ct \quad \forall t \geq T \quad (5.6)$$

при некоторых $C > 0$ и $T \in (1, \infty)$. Более того, применяя линейное преобразование $\alpha\Phi + \beta$, где $\alpha = 1/C$ и $\beta = T$ (см., например, (2.7)), можем считать, что

$$\Phi_{n-1}(t) \geq t \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (5.7)$$

Конечно, мы можем также предполагать, что $\Phi(t) = t$ при всех $t \in [0, 1)$, поскольку значения функции Φ на полуинтервале $[0, 1)$ не несут в себе информации относительно $K_I(x, f) \geq 1$ в (4.1). Ясно, что соотношение (5.5) влечет условие $\Phi(t) < \infty$ при всех $t < \infty$ (см. критерий (2.7), а также (2.10)).

Заметим, что функция $\Psi(t) := t\Phi_{n-1}(t)$ строго возрастает, $\Psi(1) = \Phi(1)$ и $\Psi(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому функциональное уравнение

$$\Psi(K(r)) = (\gamma/r)^2 \quad \forall r \in (0, 1], \quad (5.8)$$

где $\gamma = \Phi^{1/2}(1) \geq 1$, разрешимо с $K(1) = 1$ и строго возрастающей непрерывной функцией $K(r)$ такой, что $K(r) < \infty$, $r \in (0, 1]$, и $K(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$. Беря логарифм в (5.8), имеем

$$\log K(r) + \log \Phi_{n-1}(K(r)) = 2 \log \frac{\gamma}{r}$$

и ввиду (5.7) получаем, что $\log K(r) \leq \log(\gamma/r)$, т. е.

$$K(r) \leq \gamma/r. \quad (5.9)$$

Тогда в силу (5.8) $\Phi_{n-1}(K(r)) \geq \gamma/r$ и по (2.3)

$$K(r) \geq \Phi_{n-1}^{-1}(\gamma/r). \quad (5.10)$$

Достаточно рассмотреть случай $D = \mathbb{B}^n$. Определим следующие отображения в проколоте единичном шаре $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$:

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \rho(|x|), \quad f_m(x) = \frac{x}{|x|} \rho_m(|x|), \quad m = 1, 2, \dots,$$

где

$$\rho(t) = \exp\{I(0) - I(t)\}, \quad \rho_m(t) = \exp\{I(0) - I_m(t)\},$$

$$I(t) = \int_t^1 \frac{dr}{rK(r)}, \quad I_m(t) = \int_t^1 \frac{dr}{rK_m(r)}$$

и

$$K_m(r) = \begin{cases} K(r), & \text{если } r \geq 1/m, \\ K(\frac{1}{m}), & \text{если } r \in (0, 1/m). \end{cases}$$

Из (5.10) получаем

$$I(0) - I(t) = \int_0^t \frac{dr}{rK(r)} \leq \int_0^t \frac{dr}{r\Phi_{n-1}^{-1}(\frac{\gamma}{r})} = \int_{\frac{\gamma}{t}}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\Phi_{n-1}^{-1}(\tau)} \quad \forall t \in (0, 1],$$

где $\gamma/t \geq \gamma \geq 1 > \Phi(0) = 0$. Поэтому ввиду (5.5)

$$I(0) - I(t) \leq I(0) = \int_0^1 \frac{dr}{rK(r)} < \infty \quad \forall t \in (0, 1]. \quad (5.11)$$

Кроме того, f_m и f принадлежат $C^1(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})$, поскольку $K_m(r)$ и $K(r)$ непрерывны, поэтому локально квазиконформны в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Более того, f_m являются K_m -квазиконформными отображениями в \mathbb{B}^n , где $K_m = K(1/m)$.

Теперь касательная и радиальная дилатации f на сфере $|x| = \rho$, $\rho \in (0, 1)$, легко вычисляются:

$$\delta_\tau(x) = \frac{|f(x)|}{|x|} = \frac{\exp\left\{\int_0^\rho \frac{dr}{rK(r)}\right\}}{\rho}, \quad \delta_r(x) = \frac{\partial|f(x)|}{\partial|x|} = \frac{\exp\left\{\int_0^\rho \frac{dr}{rK(r)}\right\}}{\rho K(\rho)},$$

и видим, что $\delta_\tau(x) \geq \delta_r(x)$, поскольку $K(r) \geq 1$. Следовательно, ввиду сферической симметрии имеем

$$K_I(x, f) = \frac{\delta_\tau^{n-1}(x)\delta_r(x)}{\delta_r^n(x)} = K^{n-1}(|x|)$$

во всех точках $x \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ (см., например, [33, п. I.2.1]). Заметим, что

$$f_m(x) \equiv f(x) \quad \text{для любого } x \text{ такого, что } \frac{1}{m} < |x| < 1, \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.12)$$

Поэтому аналогично вычисляются $K_I(x, f_m) = K_I(x, f) = K^{n-1}(|x|)$ для $1/m < |x| < 1$ и $K_I(x, f_m) = K^{n-1}(1/m)$ для $0 < |x| < 1/m$. Таким образом, f_m квазиконформны в \mathbb{B}^n , поэтому $f_m \in W_{\text{loc}}^{1,n}$ и ввиду (5.8)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}^n} \Phi(K_I(x, f_m)) \, dm(x) &\leq \int_{\mathbb{B}^n} \Phi_{n-1}(K(|x|)) \, dm(x) \\ &= \omega_{n-1} \int_0^1 \frac{\Psi(K(r))}{rK(r)} r^n \, dr \leq \gamma^2 \omega_{n-1} \int_0^1 \frac{dr}{rK(r)} \leq M =: \gamma^2 \omega_{n-1} I(0) < \infty. \end{aligned}$$

Заметим, что f_m отображают единичный шар \mathbb{B}^n на шар с центром в начале координат радиуса $R = e^{I(0)} < \infty$. Таким образом, $f_m \in S_{M,\Delta}^\Phi$ при некотором $\Delta > 0$, где M указано выше.

С другой стороны, легко видеть, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \lim_{t \rightarrow 0} \rho(t) = e^0 = 1, \quad (5.13)$$

т. е. f отображает проколотый шар $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ на кольцо $1 < |y| < R = e^{I(0)}$. Тогда в силу (5.12) и (5.13) получаем, что $|f_m(x)| = |f(x)| \geq 1$ для любого x такого, что $|x| \geq 1/m$, $m = 1, 2, \dots$, т. е. семейство $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ не является равномерно непрерывным в нуле.

Полученное противоречие опровергает предположение (5.4). \square

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Теорема 5.1 показывает, что условие (4.2) теоремы 4.1 не только достаточно, но и необходимо для равнотепенной непрерывности (нормальности) классов отображений с интегральными ограничениями вида (4.1) либо (4.4) при выпуклой неубывающей функции Φ . Ввиду предложения 2.3 это относится также к каждому из условий (2.5)–(2.10) при $p = n - 1$.

Отметим, наконец, что еще в работе [11] была установлена необходимость условий неубывания и выпуклости функции Φ для компактности (замкнутости) классов отображений с ограничениями интегрального типа (4.3).

Следствие 5.1. Если классы отображений $S_{M,\Delta}^\Phi \subset \mathfrak{R}_{M,\Delta}^\Phi$ равностепенно непрерывны (нормальны) для всех $M \in (0, \infty)$, $\Delta \in (0, 1)$ при неубывающей выпуклой функции Φ , то

$$\int_{\delta}^{\infty} \log \Phi(t) \frac{dt}{t^{n'}} = \infty \quad (5.14)$$

для всех $\delta > t_0$, где $t_0 := \sup_{\Phi(t)=0} t$, $t_0 = 0$, если $\Phi(0) > 0$, $\frac{1}{n'} + \frac{1}{n} = 1$, т. е. $n' = n/(n-1)$.

По замечанию 4.2 и предложению 2.3 условие (5.14) также достаточно для равностепенной непрерывности (нормальности) классов отображений $S_{M,\Delta}^\Phi$ и $\mathfrak{R}_{M,\Delta}^\Phi$ при всех $M \in (0, \infty)$ и $\Delta \in (0, 1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ahlfors L. On quasiconformal mappings // J. Anal. Math. 1951/54. V. 3. P. 1–58.
2. Билута П. А. Некоторые экстремальные задачи для отображений, квазиконформных в среднем // Сиб. мат. журн. 1965. Т. 6, № 4. С. 717–726.
3. Golberg A. Homeomorphisms with finite mean dilatations // Contemp. Math. 2005. V. 382. P. 177–186.
4. Кругликов В. И. Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Мат. сб. 1986. Т. 130, № 2. С. 185–206.
5. Крушкаль С. Л. Об отображениях, квазиконформных в среднем // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157, № 3. С. 517–519.
6. Крушкаль С. Л., Кюнау Р. Квазиконформные отображения: новые методы и приложения. Новосибирск: Наука, 1984.
7. Кудьявин В. С. Поведение класса отображений, квазиконформных в среднем, в изолированной особой точке // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 5. С. 1056–1058.
8. Kühnau R. Über Extremalprobleme bei im Mittel quasiconformen Abbildungen // Complex analysis. Fifth Romanian–Finnish Seminar. Berlin: Springer-Verl., 1983. P. 113–124. (Lect. Notes Math.; V. 1013).
9. Perovich M. Isolated singularity of the mean quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. 1979. V. 743. P. 212–214.
10. Песин И. Н. Отображения, квазиконформные в среднем // Докл. АН СССР. 1969. Т. 187, № 4. С. 740–742.
11. Рязанов В. И. Об отображениях, квазиконформных в среднем // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 2. С. 378–388.
12. Стругов Ю. Ф. Компактность классов отображений, квазиконформных в среднем // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 4. С. 859–861.
13. Ukhlov A., Vodopyanov S. K. Mappings associated with weighted Sobolev spaces // Complex Anal. Dynam. Syst. III, Contemp. Math. 2008. V. 455. P. 369–382.
14. Зорич В. А. О допустимом порядке роста характеристики квазиконформности в теореме М. А. Лаврентьева // Докл. АН СССР. 1968. Т. 181, № 3. С. 530–533.
15. Зорич В. А. Изолированные особенности отображений с ограниченным искажением // Мат. сб. 1970. Т. 123, № 4. С. 634–638.
16. Astala K., Iwaniec T., Martin G. J. Elliptic differential equations and quasiconformal mappings in the plane. Princeton: Princeton Univ. Press, 2009. (Princeton Math. Ser.; V. 48).
17. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Moduli in modern mapping theory. New York: Springer-Verl., 2009. (Springer Monogr. Math.).
18. Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On recent advances in the Beltrami equations // Укр. мат. вестн. 2010. Т. 7, № 4. С. 467–515.
19. Srebro U., Yakubov E. The Beltrami equation // Handbook in Complex Analysis: Geometric Function Theory. Basel: Elsevier, 2005. V. 2. P. 555–597.
20. Iwaniec T., Martin G. Geometric function theory and nonlinear analysis. Oxford: Clarendon Press, 2001.
21. Рязанов В. И., Севостьянов Е. А. Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q -гомеоморфизмов // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 6. С. 1361–1376.

22. Väisälä J. Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings. Berlin etc.: Springer-Verl., 1971. (Lecture Notes Math.; V. 229).
23. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Q -homeomorphisms // Contemp. Math. 2004. V. 364. P. 193–203.
24. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On Q -homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. 2005. V. 30, N 1. P. 49–69.
25. Andreian Cazacu C. On the length-area dilatation // Complex Var. Theory Appl. 2005. V. 50, N 7–11. P. 765–776.
26. Миклюков В. М. Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения. Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2005.
27. Lehto O., Virtanen K. Quasiconformal mappings in the plane. New York etc.: Springer-Verl., 1973.
28. Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M. On conformal dilatation in space // Int. J. Math. Sci. 2003. V. 22. P. 1397–1420.
29. Gehring F. W. Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 103. P. 353–393.
30. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Mappings with finite length distortion // J. Anal. Math. 2004. V. 93, N 1. P. 215–236.
31. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On integral conditions in the mapping theory // Укр. мат. вестн.. 2010. Т. 7, № 1. С. 73–87.
32. Bourbaki N. Functions of real variable. Berlin: Springer-Verl., 2004.
33. Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.

Статья поступила 13 апреля 2010 г.

Рязанов Владимир Ильич, Севостьянов Евгений Александрович
Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
ул. Розы Люксембург, 74, Донецк 83114, Украина
vlryazanov1@rambler.ru, brusin2006@rambler.ru