УДК 531.38

©2013. **Е. А. Севостьянов**

ОБ ОДНОМ МОДУЛЬНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ КРИВЫХ, ВРАЩАЮЩИХСЯ ОТОБРАЖЕНИЕМ ВОКРУГ СЕБЯ

Работа посвящена изучению пространственных отображений, более общих, чем отображения с ограниченным искажением. Для открытых дискретных дифференцируемых почти всюду отображений, обладающих N, N^{-1} и ACP^{-1}-свойствами, получен аналог неравенства типа Вяйсяля относительно модуля произвольного порядка $p \geq 1$. Указанное неравенство доказано для кривых, которые вращаются отображением f вокруг себя m раз, где m – некоторое положительное целое число.

Ключевые слова: *открытые дискретные отображения, модуль семейств кривых, абсолютная непрерывность на кривых.*

Основные определения, встречающиеся в статье, могут быть найдены в более ранней работе автора [1]. Основная цель настоящей заметки заключается в доказательстве так называемого модульного неравенства типа Ю. Вяйсяля, которое для отображений с ограниченным искажением было получено Ю. Вяйсяля в 1972г. в работе [2]. Для случая отображений f с конечным искажением длины, конформного модуля семейств кривых и семейств путей Γ и Γ', состоящих, соответственно, из кривых α и β, связанных соотношением $f \circ \alpha \subset \beta$, подобное неравенство было доказано автором данной работы (см. [1, теорема 1]). (Здесь и далее запись $f \circ \alpha \subset \beta$ означает, что кривая $f \circ \alpha$ является подкривой кривой β). Настоящая публикация касается семейств кривых с несколько другими свойствами, нежели в работе [1], для которых будет установлено аналогичное неравенство. Отметим, что его доказательство приведено здесь не только для порядка модуля $p = n$ (где n – размерность пространства), но и для случая модуля семейств кривых произвольного порядка $p \geq 1$. Отметим также, что общая методология, предложенная при доказательстве в настоящей статье, несколько отличается от подхода, использованного Ю. Вяйсяля в [2] в классическом случае ограниченности искажения заданного отображения f.

Всюду далее D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Следуя [3, раздел 8.4], будем говорить, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ – *слабо нульмерное*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ не содержит никакую кривую, отличную от точки. Заметим, что, по определению, все дискретные отображения слабо нульмерны. Однако, несложно указать простые примеры слабо нульмерных отображений (более того, так называемых *отображений с конечным искажением длины*), не являющихся дискретными, см. [3, пример, разд. 8.10, с. 172], см. также замечание 8.3 и предложение 8.5 там же.

Как обычно, *кривой* γ мы называем непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ (открытого, либо полуоткрытого интервала одного из видов: (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$,) в $\mathbb{R}^n$, пишем $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ (см. [4, определение 1.1]). Под семейством кривых Γ подразумевается некоторый фиксированный набор кривых γ, а $f(\Gamma) = \{f \circ \gamma | \gamma \in \Gamma\}$.

Везде далее запись $f : D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f непрерывно и сохраняет ориентацию (т.е., топологический индекс $\mu(y, f, G)$ отображения f в точке $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial G)$ относительно компактной области $G \subset D$, $\overline{G} \subset D$, больше нуля, см. [5, разд. 4, гл. I]).

Следующие определения могут быть найдены, напр., в [4, разд. 1–6, гл. I]. Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если $\int\limits_{\gamma} \rho(x)|dx| \geq 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. В этом случае мы пишем: $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. (Здесь и далее символом $\int\limits_{\gamma} \rho(x)|dx|$ определяется криволинейный интеграл первого рода от функции ρ по кривой γ, см. [4, разд. 4, гл. I]).

Пусть $p \geq 1$, ν – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, тогда *p-модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{D} \rho^p(x)\, d\nu(x)\,.$$

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \operatorname{Int} A$, $f : A \to \mathbb{R}^n$. Напомним, что отображение f называется *дифференцируемым в точке* x_0, если для любых $\Delta x \in \mathbb{R}^n$, таких, что $(x_0 + \Delta x) \in A$, и некоторого линейного преобразования $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, выполнено равенство

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = L\Delta x + \alpha(x_0, \Delta x) \cdot |\Delta x|\,,$$

где $\alpha(x_0, \Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. В этом случае, оператор L называют *матрицей Якоби* отображения f в точке x_0 и обозначается символом $f'(x_0)$.

Полагаем $l\,(f'(x)) := \inf\limits_{h \in \mathbb{R}^n : |h| = 1} |f'(x)h|$. *Внутренней дилатацией порядка* p отображения f в точке x называется величина

$$K_{I,p}\,(x, f) \quad = \quad = \begin{cases} \frac{|J(x,f)|}{l(f'(x))^p}, & J(x, f) \neq 0, \\ 1, & f'(x) = 0, \\ \infty, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определения спрямляемой и локально спрямляемой кривой, натурального параметра кривой, а также длины кривой, используемые ниже, могут быть найдены, например, в книге Ю. Вяйсяля [4] (см. здесь главу I). Здесь и далее кривая $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ будет называться *замкнутой* (т.е., кривая – замкнута, если её областью определения является некоторый отрезок $[a, b]$). Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}$ – открытый интервал числовой прямой, $\gamma : \Delta \to \mathbb{R}^n$ – локально спрямляемая кривая. В таком случае, очевидно, существует единственная неубывающая функция длины $l_\gamma : \Delta \to \Delta_\gamma \subset \mathbb{R}$ с условием $l_\gamma(t_0) = 0$, $t_0 \in \Delta$, такая что значение $l_\gamma(t)$ равно длине подкривой $\gamma\,|_{[t_0,t]}$ кривой γ, если $t > t_0$, и длине подкривой $\gamma\,|_{[t,\,t_0]}$ со знаком "-", если $t < t_0$, $t \in \Delta$ (по этому поводу см., напр., [3, разд. 8.1, гл. 8]). Пусть $g : |\gamma| \to \mathbb{R}^n$ – непрерывное отображение, где $|\gamma| = \gamma(\Delta) \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что кривая $\widetilde{\gamma} = g \circ \gamma$ также локально спрямляема. Тогда, очевидно, существует единственная неубывающая функция $L_{\gamma,\,g} : \Delta_\gamma \to \Delta_{\widetilde{\gamma}}$ такая, что $L_{\gamma,\,g}\,(l_\gamma\,(t)) = l_{\widetilde{\gamma}}\,(t)$ при всех $t \in \Delta$.

Весьма полезным для дальнейшего исследования является следующее замечание.

Замечание 1. Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ спрямляемая кривая. Заметим, что свойства функции $L_{\gamma,f}$ между натуральными параметрами $l_\gamma(t)$ и $l_{\widetilde{\gamma}}(t)$ (локально спрямляемых) кривых γ и $\widetilde{\gamma}$ таких, что $\widetilde{\gamma} = f\circ\gamma$, существенно не зависят от выбора $t_0 \in (a,b)$. В случае замкнутой кривой γ мы будем считать, что $t_0 = a$, поскольку при заданном $t_0 \in (a,b)$ выполнено равенство $S(\gamma,[a,t]) = S(\gamma,[a,t_0]) + l_\gamma(t)$, где $S(\gamma,[a,t])$ обозначает длину кривой $\gamma|_{[a,t]}$. Пусть $I = [a,b]$. Для спрямляемой кривой $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ определим функцию длины $l_\gamma(t)$ по следующему правилу: $l_\gamma(t) = S\left(\gamma,[a,t]\right)$.

Кривая γ называется *(полным) поднятием кривой* $\widetilde{\gamma}$ *при отображении* $f : D \to \mathbb{R}^n$, если $\widetilde{\gamma} = f\circ\gamma$. Будем говорить, что свойство P имеет место для p-почти всех кривых, если p-модуль семейства всех кривых Γ, для которых свойство P нарушается, равен нулю.

Предположим, что $f : D \to \mathbb{R}^n$ – слабо нульмерное отображение, тогда (корректно) может быть определена функция $L^{-1}_{\gamma,f}$. В таком случае, согласно [3, разд. 8.4, гл. 8], будем говорить, что f обладает *свойством* ACP_p^{-1} в области D, пишем $f \in ACP_p^{-1}$, если для p-почти всех кривых $\widetilde{\gamma} \in f(D)$ каждое поднятие γ кривой $\widetilde{\gamma}$ при отображении f, $f\circ\gamma = \widetilde{\gamma}$, является локально спрямляемой кривой и, кроме того, обратная функция $L^{-1}_{\gamma,f}$ абсолютно непрерывна на всех замкнутых интервалах, лежащих в $\Delta_{\widetilde{\gamma}}$ для p-почти всех кривых $\widetilde{\gamma}$ в $f(D)$ и каждого поднятия γ кривой $\widetilde{\gamma} = f\circ\gamma$.

Пусть $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ – спрямляемая замкнутая кривая в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $l(\alpha)$ – её длина. *Нормальным представлением кривой* α называется кривая $\alpha^0 : [0, l(\alpha)] \to \mathbb{R}^n$ такая, что $\alpha(t) = \alpha^0\left(S\left(\alpha,[a,t]\right)\right) = \alpha^0 \circ l_\alpha(t)$. Отметим, что такая кривая α^0 существует и единственна, при этом, $S\left(\alpha^0,[0,t]\right) = t$ при $t \in [0,l(\alpha)]$, см. [4, теорема 2.4].

Далее I означает открытый, замкнутый или полуоткрытый конечный интервал числовой оси. Следующее определение может быть найдено в [5, п. 5, гл. II].

Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ – слабо нульмерное отображение, $\beta : I_0 \to \mathbb{R}^n$ замкнутая спрямляемая кривая и $\alpha : I \to D$ кривая такая, что $f\circ\alpha \subset \beta$. Если функция длины $l_\beta : I_0 \to [0, l(\beta)]$ постоянна на некотором интервале $J \subset I$, то β постоянна на J и, в силу слабой нульмерности f, кривая α также постоянна на J. Следовательно, существует единственная кривая $\alpha^* : l_\beta(I) \to D$ такая, что $\alpha = \alpha^* \circ (l_\beta|_I)$. Будем говорить, что α^* является *f-представлением кривой α относительно β*.

Пусть $\alpha : [a,b] \to D$ – замкнутая кривая. Будем говорить, что f *вращает кривую α m раз вокруг себя*, если кривая $f\circ\alpha = \beta$ спрямляема и выполнено следующее условие. Пусть $\beta^0 : [0,c] \to \mathbb{R}^n$ – нормальное представление кривой β, кривая $\alpha^* : [0,c] \to D$, $c = l(\beta)$, является f-представлением α по отношению к β и $h = c/m$. Тогда $\beta^0(t+jh) = \beta^0(t)$ и $\alpha^*(t+jh) \neq \alpha^*(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ таких, что $0 \leq t < t+jh < c$ и $j \in \{1,\ldots,m-1\}$.

Напомним, что отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ обладает *N-свойством* (Лузина), если из условия $\nu(E) = 0$ следует, что $\nu(f(E)) = 0$. Отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ обладает *N^{-1}-свойством* (Лузина), если из условия $\nu(E) = 0$ следует, что $\nu\left(f^{-1}(E)\right) = 0$.

Следующий результат при $p = n$ для отображений f с ограниченным искажением, что соответствует ограниченной функции $K_{I,n}(x,f)$, доказан в работе [2, теорема 3.9]. В настоящей работе аналогичное заключение приводится для более широкого класса отображений, когда функция $K_{I,p}(x,f)$ просто измерима (не обязательно интегрируема), а $p\in\mathbb{N}$ – некоторое число, которое может не совпадать с размерностью пространства n. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $p\geq 1$, отображение $f:D\to\mathbb{R}^n$ дифференцируемо почти всюду и имеет N, N^{-1} и ACP_p^{-1}-свойства. Предположим, что Γ – семейство кривых в D и $m\in\mathbb{N}$ – фиксированное число такое, что f вращает каждую кривую семейства Γ вокруг себя m раз. Тогда*

$$M_p(f(\Gamma)) \quad\leq\quad \frac{1}{m}\cdot\int\limits_D K_{I,p}(x,f)\cdot\rho^p(x)\,d\nu(x)$$

для каждой функции $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma$.

Следующее утверждение содержит в себе критерий выполнения свойства ACP_p^{-1} для произвольного отображения в терминах абсолютной непрерывности соответствующих кривых (результат доказан автором работы).

Лемма 1. *Слабо нульмерное отображение $f:D\to\mathbb{R}^n$ обладает ACP_p^{-1}-свойством при некотором $p\geq 1$ тогда и только тогда, когда кривая γ^* является спрямляемой и абсолютно непрерывной для p-почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma}=f\circ\gamma$.*

Тут и далее γ^* означает f-представление кривой γ по отношению к $\widetilde{\gamma}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть f обладает ACP_p^{-1}-свойством. Тогда, во-первых, $L_{\gamma,f}^{-1}$ определена корректно для p-почти всех кривых $\widetilde{\gamma}$ таких, что $\widetilde{\gamma}=f\circ\gamma$. Во-вторых, кривая γ^* является спрямляемой для p-почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma}$ как только $\widetilde{\gamma}=f\circ\gamma$, поскольку $(\gamma^*)^0=\gamma^0$ (см. [4, теорема 2.6]). Кроме того, для p-почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma}$ и всех γ таких, что $\widetilde{\gamma}=f\circ\gamma$, мы получаем

$$\gamma(t)=\gamma^*\circ l_{\widetilde{\gamma}}(t)=\gamma^0\circ l_{\gamma}(t)=\gamma^0\circ L_{\gamma,f}^{-1}\left(l_{\widetilde{\gamma}}(t)\right).$$

Полагая $l_{\widetilde{\gamma}}(t):=s$, имеем

$$\gamma^*(s)=\gamma^0\circ L_{\gamma,f}^{-1}(s).$$

Таким образом, кривая γ^* абсолютно непрерывна, поскольку $L_{\gamma,f}^{-1}(s)$ абсолютно непрерывна и

$$|\gamma^0(t_1)-\gamma^0(t_2)|\leq|t_1-t_2|$$

для всех $t_1,t_2\in[0,l(\gamma)])$.

Достаточность. Поскольку отображение f слабо нульмерно, функция $L_{\gamma,f}^{-1}$ корректно определена для p-почти всех $\widetilde{\gamma}$ и всех γ таких, что $\widetilde{\gamma}=f\circ\gamma$. Согласно предположению, кривая γ^* спрямляема для p-почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma}=f\circ\gamma$; в частности, $\gamma^{*0}=\gamma^0$. Более того, для таких кривых $l_{\gamma^*}(s)=L_{\gamma,f}^{-1}(s)$. Следовательно, для p-почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma}$ и всех γ таких, что $\widetilde{\gamma}=f\circ\gamma$, кривая γ спрямляема и функция $L_{\gamma,f}^{-1}(s)$ абсолютно непрерывна (см. [4, теорема 1.3]). Пусть

Γ_1 – семейство всех замкнутых кривых $\widetilde{\alpha} = f \circ \alpha$ в области $f(D)$ таких, что кривая α^* либо не спрямляема, либо функция $L^{-1}_{\alpha,f}(s)$ не абсолютно непрерывна. Пусть Γ – семейство всех кривых $\widetilde{\gamma} = f\circ\gamma$ в области $f(D)$ таких, что γ либо не локально спрямляема, либо функция $L^{-1}_{\gamma,f}(s)$ не локально абсолютно непрерывна. Тогда $\Gamma > \Gamma_1$ и, следовательно, $M_p(\Gamma) \leq M_p(\Gamma_1) = 0$, что и требовалось доказать. $\Box$

Пусть E – множество в $\mathbb{R}^n$ и $\gamma : \Delta \to \mathbb{R}^n$ – некоторая кривая. Обозначим через $\gamma \cap E = \gamma(\Delta) \cap E$. Имеет место следующее утверждение, связывающее свойства функции длины локально спрямляемой кривой со свойствами произвольного измеримого множества в $\mathbb{R}^n$, вытекающее из [3, теорема 9.1].

Предложение 1. Пусть $p \geq 1$, E – множество в области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Тогда множество E измеримо тогда и только тогда, когда множество $\gamma \cap E$ измеримо для p-почти всех кривых γ в D. Более того, $\nu(E) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{mes}_1 \{s \in (0, l(\gamma)) : \gamma^0(s) \in E\} = 0$ для p-почти всех кривых γ в D, где mes_1 обозначает линейную меру Лебега на $\mathbb{R}$.

Доказательство теоремы 1. Поскольку отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ почти всюду дифференцируемо и обладает N и N^{-1}-свойствами Лузина, найдётся не более чем счётная последовательность компактных множеств $C_k^* \subset D$ такая, что $\nu(B) = 0$, где $B = D \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_k^*$ и $f|_{C_k^*}$ взаимно однозначно и билипшицево для каждого $k = 1, 2, \ldots$ (см. [3, гл. 8, леммы 8.2 и 8.3]). Более того, f дифференцируемо при всех $x \in C_k^*$ и выполнено условие $J(x, f) \neq 0$. Полагаем $B_0 = B$, $B_1 = C_1^*$, $B_2 = C_2^* \setminus B_1 \ldots$,

$$B_k \quad = \quad C_k^* \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} B_l\,.$$

Таким образом, мы получим не более, чем счётное покрытие области D борелевскими множествами B_k, $k = 0, 1, \ldots$, причём $B_l \cap B_j = \varnothing$ при $l \neq j$ и $\nu(B_0) = 0$, где $B_0 = D \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Поскольку отображение f обладает N-свойством, получаем $\nu(f(B_0)) = 0$. По предложению 1 получаем, что $\widetilde{\gamma}^0(s) \notin f(B_0)$ для p-почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma}$ в области $f(D)$ и почти всех $s \in [0, l(\widetilde{\gamma})]$; здесь $\widetilde{\gamma}^0(s)$ обозначает нормальное представление кривой $\widetilde{\gamma}(s)$. Кроме того, по лемме 1 кривая γ^*, являющаяся f-представлением кривой γ, абсолютно непрерывна для p-почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$. Здесь f-представление γ^* кривой γ корректно определено для p-почти всех кривых $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$, поскольку по предположению f – слабо нульмерное отображение.

Пусть $\rho \in \mathrm{adm}\,\Gamma$. Полагаем

$$\rho^*(x) = \begin{cases} \rho(x)/l\left(f'(x)\right), & x \in D \setminus B_0, \\ 0, & x \in B_0\,, \end{cases}$$

где, как обычно, $l\left(f'(x)\right) = \min\limits_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}$. Рассмотрим следующую функцию:

$$\widetilde{\rho}(y) \quad = \quad \frac{1}{m} \cdot \chi_{f(D \setminus B_0)}(y) \sup_{C} \sum_{x \in C} \rho^*(x)\,,$$

где C пробегает все подмножества $f^{-1}(y)$ в $D\setminus B_0$, количество элементов которых не больше m. Заметим, что

$$\widetilde{\rho}(y) \quad = \quad \frac{1}{m}\cdot \sup\sum\limits_{i=1}^{s}\rho_{k_i}(y)\,, \tag{1}$$

где sup в (1) берётся по всем возможным наборам $\{k_{i_1},\ldots, k_{i_s}\}$ таким, что $i\in {\Bbb N}$, $k_i\in {\Bbb N}$, $k_i\ne k_j$ при $i\ne j$, всех $s\le m$ и

$$\rho_k(y)\,=\left\{\begin{array}{rr} \rho^*\left(f_k^{-1}(y)\right), & y\in f(B_k),\\ 0, & y\notin f(B_k)\,, \end{array} \right.$$

а каждое из отображений $f_k=f|_{B_k}$, $k=1,2,\ldots$, инъективно. Из (1) следует, что функция $\widetilde{\rho}(y)$ является борелевской, поскольку множества $f(B_k)$ борелевские, см. [6, разд. 2.3.2].

Для заданной спрямляемой кривой β обозначим числом c её длину, $c:=l(\beta)$, а через β^0, как обычно, её нормальное представление. Используя определения семейств кривых Γ и $f(\Gamma)$, для каждой кривой $\beta\in f(\Gamma)$ мы будем иметь

$$\int\limits_{\beta}\widetilde{\rho}(y)|dy|=\int\limits_{0}^{c}\widetilde{\rho}(\beta^0(t))dt=$$

$$=\sum\limits_{j=1}^m\int\limits_{\frac{c(j-1)}{m}}^{\frac{cj}{m}}\widetilde{\rho}(\beta^0(t))dt=\sum\limits_{j=1}^m\int\limits_{0}^{\frac{c}{m}}\widetilde{\rho}\left(\beta^0\left(t+\frac{c(j-1)}{m}\right)\right)dt= \tag{2}$$

$$=m\int\limits_{0}^{h}\widetilde{\rho}(\beta^0(t))dt, \qquad h=c/m.$$

Пусть $0<t<h$, тогда точки $\alpha^*(t)$, $\alpha^*(t+h),\ldots$, $\alpha^*(t+(m-1)h)$ являются различными точками множества $f^{\,-1}(\beta^0(t))$. Следовательно,

$$\widetilde{\rho}(\beta^0(t))\ge\frac{1}{m}\sum\limits_{j=0}^{m-1}\rho^*\left(\alpha^*(t+jh)\right) \tag{3}$$

для всех $t\in (0,h)$. В силу предложения 1 можно считать, что $\beta^0(t)\notin f(B_0)$ при почти всех $t\in[0,c]$. Поскольку кривая $\beta(t)$ спрямляема, $\beta(t)$ дифференцируема почти всюду на $[0,c]$ (см. [4, теорема 1.3]). Кроме того, кривая α^* спрямляема и абсолютно непрерывна для p-почти всех кривых β, более того, $\alpha^*(t)\notin B_0$ при почти всех $t\in[0,c]$. Следовательно, производные $f^{\,\prime}\left(\alpha^*(t)\right)$ и $\alpha^{*\prime}(t)$ существуют при почти всех $t\in[0,c]$. Учитывая формулу вычисления производной сложной функции, а также то, что модуль производной кривой по натуральному параметру равен 1 (см., напр., [4, п. (5) теоремы 1.3 и п. (2) теоремы 2.4]), получаем

$$1=\left|(f\circ\alpha^*)^{\,\prime}\left(t\right)\right|=\left|f^{\,\prime}\left(\alpha^*(t)\right)\alpha^{*\prime}(t)\right|=$$

$$= \left| f'(\alpha^*(t)) \cdot \frac{\alpha^{*\prime}(t)}{|\alpha^{*\prime}(t)|} \right| \cdot |\alpha^{*\prime}(t)| \geq l\left(f'(\alpha^*(t))\right) \cdot |\alpha^{*\prime}(t)| \tag{4}$$

для p-почти всех кривых $\beta \in f(\Gamma)$, $\beta = f \circ \alpha$. Из (4) следует, что

$$\rho^*(\alpha^*(t)) = \frac{\rho(\alpha^*(t))}{l\left(f'(\alpha^*(t))\right)} \geq \rho(\alpha^*(t)) \cdot |\alpha^{*\prime}(t)|\,. \tag{5}$$

В силу абсолютной непрерывности кривой α^*, формулы для вычисления криволинейного интеграла первого рода (см. [4, теорема 4.1]), (2), (3) и (5) мы получаем, что

$$\int\limits_{\beta} \widetilde{\rho}(y)|dy| \geq \sum\limits_{j=0}^{m-1} \int\limits_{0}^{h} \rho(\alpha^*(t+jh)) \cdot |\alpha^{*\prime}(t+jh)| dt = \int\limits_{\alpha} \rho(x)|dx| \geq 1\,.$$

Следовательно, $\widetilde{\rho} \in \ \operatorname{adm} f(\Gamma) \setminus \Gamma_0$, где $M_p(\Gamma_0) = 0$. Отсюда

$$M_p\left(f(\Gamma)\right) \quad \leq \quad \int\limits_{f(D)} \widetilde{\rho}^{\,p}(y)\ d\nu(y)\,. \tag{6}$$

По [6, теорема 3.2.5] при $m = n$ мы получаем, что

$$\int\limits_{B_k} K_{I,p}(x,\, f) \cdot \rho^p(x)\ d\nu(x) \quad = \quad \int\limits_{f(D)} \rho_k^p(y)\, d\nu(y)\,. \tag{7}$$

По неравенству Гёльдера для сумм

$$\left(\frac{1}{m} \cdot \sum\limits_{i=1}^{s} \rho_{k_i}(y)\right)^p \quad \leq \quad \frac{1}{m} \cdot \sum\limits_{i=1}^{s} \rho_{k_i}^p(y) \tag{8}$$

для каждого $1 \leq s \leq m$ и $\{k_1, \ldots, k_s\}$, $k_i \in \mathbb{N}$, $k_i \neq k_j$, как только $i \neq j$.

По теореме Лебега о сходимости (см. [7, теорема 12.3, § 12, гл. I]), из соотношений (6)–(8) вытекает, что

$$\frac{1}{m} \cdot \int\limits_{D} K_{I,p}(x,\, f) \cdot \rho^p(x)\ d\nu(x) \quad = \quad \frac{1}{m} \cdot \int\limits_{f(D)} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \rho_k^p(y)\, d\nu(y) \quad \geq$$

$$\geq \quad \frac{1}{m} \cdot \int\limits_{f(D)} \sup\limits_{\substack{\{k_1,\ldots,k_s\},\, k_i \in \mathbb{N},\\ k_i \neq k_j \text{ if } i \neq j}} \sum\limits_{i=1}^{s} \rho_{k_i}^p(y)\, d\nu(y) \quad \geq \quad \int\limits_{f(D)} \widetilde{\rho}^{\,p}(y)\, d\nu(y) \quad \geq \quad M_p(f(\Gamma))\,.$$

Доказательство завершено. $\Box$

Замечание 2. В частности, теорема 1 имеет место для так называемых отображений с конечным искажением длины (в этом случае $p = n$, см. [3, гл. 8]). Результаты работы могут быть применены к различным классам отображений, скажем, к проблеме устранения особенностей (см., например, работу [2]). По этому поводу см. также [8], [9], [10] и [11].

1. *Sevost'yanov E.A.* The Väisälä inequality for mappings with finite length distortion // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2010. – Vol. 55, No. 1–3. – P. 91–101.
2. *Väisälä J.* Modulus and capacity inequalities for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1 Math. – 1972. – Vol. 509. – P. 1–14.
3. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
4. *Väisälä J.* Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings. Lecture Notes in Math., **229**. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.
5. *Rickman S.* Quasiregular mappings. Results in Mathematic and Related Areas (3), 26. – Berlin: Springer-Verlag, 1993.
6. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – Москва: Наука, 1987.
7. *Сакс С.* Теория интеграла. – Москва: ИЛ, 1949.
8. *Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Intern. Journ. Math. and Math. Scie. – 2003. – Vol. 22. – P. 1397–1420.
9. *Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г.* Введение в теорию функций с обобщёнными производными и квазиконформные отображения. – Москва: Наука, 1983.
10. *Golberg A., Salimov R.* Topological mappings of integrally bounded p-moduli // Ann. Univ. Bucharest (math. series). – 2012. – Vol. 3, No. 1. – P. 49–66.
11. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami Equation: A Geometric Approach, Developments in Mathematics, **26**. – New York: Springer, 2012.

E. A. Sevost'yanov

On one modulus inequality for curves turning around itself by a mapping.

The paper is devoted to study of space mappings which are more general than mappings with bounded distortion. For open discrete differentiable a.a. mappings having N, N^{-1} and ACP^{-1}-properties, it is obtained an analog of Väisälä inequality with respect to modulus of the order $p \geq 1$. The inequality mentioned above is proved for curves turning around itself m times by a mapping f, where m is some positive number.

Keywords: *open discrete mappings, modulus of families of curves, absolute continuity on curves.*

Є. О. Севостьянов

Про одну модульну нерівність для кривих, що обертаються відображенням навколо себе.

Работу присвячено вивченню просторових відображень, більш загальних, ніж відображення з обмеженим спотворенням. Для відкритих дискретних диференційовних майже скрізь відображень, що мають N, N^{-1} і ACP^{-1}-властивості, отримано аналог нерівності типу Вяйсяля відносно модуля довільного порядку $p \geq 1$. Вказану нерівність доведено для кривих, котрі обертаються відображенням f навколо себе m разів, де m – деяке додатнє ціле число.

Ключові слова: *відкриті дискретні відображення, модуль сімей кривих, абсолютна неперервність на кривих.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`esevostyanov2009@mail.ru`

Получено 25.11.13