УДК 517.5

©2007. **Е.А. Севостьянов**

ОЦЕНКИ ИСКАЖЕНИЯ И НОРМАЛЬНОСТЬ СЕМЕЙСТВ КОЛЬЦЕВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Доказано, что семейство открытых дискретных кольцевых Q–отображений, опускающих множество положительной ёмкости, нормально при условии, что Q имеет конечное среднее колебание в каждой точке, либо имеет лишь логарифмические особенности порядка не выше, чем $n-1$.

1. Введение. Выдающийся математик современности, крупнейший специалист в теории отображений Георгий Дмитриевич Суворов считал, что "сегодня идеалом (и целью!) в теории функций можно считать достижение такой ситуации, когда мы будем располагать большим числом различных классов функций и для каждого класса иметь разработанный каталог свойств (метрических и топологических)". Данная работа посвящена исследованиям отображений с конечным искажением в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, которые интенсивно изучаются в последнее десятилетие в работах многих специалистов по теории отображений, таких как К.Астала, Э.Вилламора, С.Водопьянова, Ф.Геринга, В. Гутлянского, Т.Иванца, П.Коскела, В.Миклюкова, Дж.Манфреди, Г.Мартина, О.Мартио, В.Рязанова, У.Сребро, П.Тамразова, Э.Якубова и других. Как известно, в основу определения квазиконформных отображений, заданных в области D из $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, положено неравенство

$$M(f\Gamma) \leq K\, M(\Gamma), \tag{1}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D, где M – модуль семейства кривых (внешняя мера, определённая на семействах кривых в $\mathbb{R}^n$), а $K \geq 1$ – некоторая постоянная. Другими словами, модуль любого семейства кривых искажается не более, чем в K раз. На языке ёмкостей соотношение (1) означает, что отображение f искажает ёмкость любого конденсатора в D не более, чем в K раз. Предположим теперь, что в основе определения рассматриваемого класса отображений, вместо соотношения (1) лежит неравенство вида

$$M(f\Gamma) \leq \int\limits_D Q(x) \cdot \rho^n(x) \;\; dm(x),$$

где ρ – произвольная неотрицательная борелевская функция, такая что произвольная кривая γ семейства Γ имеет длину, не меньшую 1 в метрике ρ, а $Q : D \to [1, \infty]$ – фиксированная вещественнозначная функция. В случае, когда $Q(x) \leq K$ п.в. мы снова приходим к неравенству (1). В общем случае, последнее неравенство означает, что искажение модуля исходного семейства Γ происходит с некоторым весом $Q(x)$, $M(f\Gamma) \leq M_{Q(x)}(\Gamma)$.

Приведём основные определения и обозначения, используемые в дальнейшем. Всюду далее D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subseteq D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. Везде далее запись $f : D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f непрерывно в области задания. Мы также предполагаем, что отображение f сохраняет ориентацию, т.е., топологический индекс $\mu(y, f, G) > 0$ для произвольной области $G \Subset D$ и произвольного $y \in f(G) \setminus f\partial G$. В дальнейшем $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$, $B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$, $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Приведённые выше понятия естественным образом распространяются на отображения $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, где область $D \subset \mathbb{R}^n$ и $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ – одноточечная компактификация $\mathbb{R}^n$.

В 2001г. финский профессор Олли Мартио предложил к рассмотрению следующее определение. Пусть $Q : D \to [1, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Говорят, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *$Q-$гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma) \leq \int\limits_D Q(x) \cdot \rho^n(x) \ \ dm(x) \tag{2}$$

для любого семейства Γ путей γ в D и для каждой допустимой функции $\rho \in adm\,\Gamma$. Напомним, что борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если

$$\int\limits_\gamma \rho(x) \ \ |dx| \geq 1$$

для всех путей $\gamma \in \Gamma$. В этом случае мы пишем: $\rho \in adm\,\Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in adm\,\Gamma} \int\limits_D \rho^n(x) \ \ dm(x).$$

Определение $Q-$гомеоморфизма, предложенное О.Мартио, очевидно, можно рассматривать как обобщение геометрического определения квазиконформного отображения Ю.Вяйсяля на весовые модули, ср. [Tam] и [Va]. Пусть D – область в $\overline{\mathbb{R}^n}, n \geq 2$, $E, F \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ – произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E, F, D)$ семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$. Положим $\Gamma(E, F) = \Gamma(E, F, \overline{\mathbb{R}^n})$, если $D = \overline{\mathbb{R}^n}$. Напомним, что *кольцом* в $\overline{\mathbb{R}^n}$ называется область R, дополнение к которой в $\overline{\mathbb{R}^n}$ состоит из двух связных компонент, скажем, C_1 и C_2. Коротко это записывают так: $R = R(C_1, C_2)$. Пусть $R = R(C_1, C_2)$ – кольцо в $\overline{\mathbb{R}^n}$, тогда *ёмкость $cap\,R$* кольца R может быть определена соотношением $cap\,R = M\left(\Gamma\left(C_1, C_2\right)\right)$, см., напр., Теорему 1 Главы 2 в [Ge$_1$] и Теорему 11.3 в [Va]. Следующее понятие, мотивированное кольцевым определением квазиконформности по Герингу, см. [Ge$_2$], и представляющее собой обобщение и локализацию понятия Q–отображения, впервые было введено В.И.Рязановым, У.Сребро и Э.Якубовым на плоскости, см., напр., [RSY$_1$], [RSY$_2$]. Пусть $r_0 = dist(x_0, \partial D)$ и пусть $Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Положим $A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$, $S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_i\}$, $i = 1, 2$. Говорят, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q–гомеоморфизмом в точке $x_0 \in D$*, если соотношение

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S_1, S_2, A\right)\right)\right) \ \leq \int\limits_A Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|) \ dm(x) \tag{3}$$

выполнено для любого кольца $A = A(r_1, r_2, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < r_0$ и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что $\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r) \ dr \ \geq \ 1$. Если (3) выполнено для каждой точки $x_0 \in D$, то f называется кольцевым $Q-$гомеоморфизмом. Следует отметить, что в случае ограниченной функции $Q(x)$, определения кольцевого Q–гомеоморфизма и Q–гомеоморфизма эквивалентны, и, фактически, генерируют собой определение квазиконформных отображений, см. знаменитую работу Геринга [Ge_2]. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Назовём непрерывное сохраняющее ориентацию отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *кольцевым $Q-$отображением в области* D, если соотношение (3) выполнено для любого $x_0 \in D$. Пусть (X, d) и (X', d') – метрические пространства с расстоянием d и d', соответственно. Семейство $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений $f : X \to X'$ называется *нормальным*, если из любой последовательности отображений $f_m \in \mathfrak{F}$ можно выделить подпоследовательность f_{m_k}, которая сходится локально равномерно в X к непрерывной функции $f : X \to X'$. Семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f : X \to X'$ называется *равностепенно непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всех x с $d(x, x_0) < \delta$ и для всех $f \in \mathfrak{F}$. Говорят, что $\mathfrak{F}$ *равностепенно непрерывно*, если $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно в каждой точке из X. Ниже мы формулируем одну из версий теоремы Арцела–Асколи, см. 20.4 в [Va].

Предложение 1. Если (X, d) – сепарабильное метрическое пространство, (X', d') – компактное метрическое пространство, то семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f : X \to X'$ нормально тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно.

В последнее время теория Q–гомеоморфизмов, в основном, развивалась, когда функция Q принадлежала известному классу BMO (ограниченного среднего колебания по Джону–Ниренбергу), см. [MRSY_1]–[MRSY_2]. В контексте изучения нормальных семейств, автором были сделаны некоторые продвижения, см., напр., [RS], где некоторые теоремы, аналогичные изложенным в этой статье, получены для гомеоморфизмов.

2. Предварительные сведения. *Конденсатором* в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называют пару $E = (A, C)$, где A – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а C – компактное подмножество A. Конденсатор E называют *кольцевым,* если $A \setminus C$ является кольцом. *Ёмкостью* конденсатора E называется следующая величина:

$$cap\, E = cap\,(A, C) = \inf_{u \in W_0(E)} \int\limits_A |\nabla u|^n \, dm(x), \qquad (4)$$

где $W_0(E) = W_0(A, C)$ – семейство неотрицательных непрерывных функций $u : A \to \mathbb{R}$ с компактным носителем в A, таких что $u(x) \geq 1$ при $x \in C$ и $u \in ACL$. В формуле выше, как обычно, $|\nabla u| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} (\partial_i u)^2\right)^{1/2}$. Согласно Лемме 5.5 в [$\mathrm{MRV}_1$], inf в (4) можно брать по множеству $W_0^\infty(E) = W_0(E) \cap C_0^\infty(A)$, где $C_0^\infty(A)$ – множество вещественнозначных, бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в A. Более того, условие $u(x) \geq 1$ для каждого $x \in C$ может быть заменено условием $u(x) = 1$ для каждого $x \in C$ или даже условием $u(x) = 1$ в некоторой окрестности C, см. Замечание 2.2 в [MRV_2]. Пусть $E = (A, C)$ – кольцевой конденсатор. Тогда $cap\, E = cap\,(A \setminus C)$, где в левой части $cap\, E$ означает ёмкость конденсатора, определённую соотношением (4), а в правой части $cap\,(A \setminus C)$ – ёмкость кольца в смысле Геринга, см. Лемму 5.6 в [MRV_1]. Понятие ёмкости конденсатора в $\mathbb{R}^n$ можно перенести в $\overline{\mathbb{R}^n}$, см. раздел 2.1 в [MRV_1]. В дальнейшем в расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$ используется *сферическая (хордальная) метрика* $h(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, где π – стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$h(x,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}, \quad h(x,y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}, \quad x \neq \infty \neq y.$$

Хордальным диаметром множества $E \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ называется величина $h(E) = \sup\limits_{x,y\in E} h(x,y)$. *Кольцом Тейхмюллера* называют кольцо $R_T(t) = R([-1,0],[t,\infty])$, $t>1$. Сформулируем теперь очень важный результат, принадлежащий Герингу, см. [Ge$_1$] или 7.37 в [Vu].

Лемма 1. Пусть $R(E,F)$ – произвольное кольцо. Тогда

$$cap\ (R(E,F)) \geq cap\left(R_T\left(\frac{1}{h\,(E)\ h\,(F)}\right)\right). \tag{5}$$

Как известно, $cap\ \ (R_T(t)) = \frac{\omega_{n-1}}{\{\log\Phi(t)\}^{n-1}}$, где ω_{n-1} – площадь единичной сферы S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$, а функция Φ удовлетворяет условиям: $t+1 \leq \Phi(t) \leq \lambda_n^2\cdot(t+1) < 2\lambda_n^2\cdot t$, $t>1$, $\lambda_n \in [4, 2e^{n-1})$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_n^{1/n} \to e$ при $n\to\infty$, см., напр., [Ge$_1$], стр. 225–226, (7.19) и (7.22) в [Vu]. Следовательно, из соотношения (5) получаем следующую оценку ёмкости.

Лемма 2. Для любых континуумов E и F в $\overline{\mathbb{R}^n}$

$$cap\ (R(E,F))\ \geq\ \frac{\omega_{n-1}}{\left[\log\frac{2\lambda_n^2}{h(E)h(F)}\right]^{n-1}}.$$

Лемма 3. Предположим, что $E=(A,C)$ – конденсатор, такой что $A\subset B(r)$ и что множество C связно. Тогда имеет место следующее соотношение:

$$cap\, E\ \geq\ \frac{\omega_{n-1}}{\left\{\log\frac{2\lambda_n^2}{h(C)h\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus B(r)\right)}\right\}^{n-1}},$$

где ω_{n-1} – площадь сферы S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$, $\lambda_n\in[4,2e^{n-1})$, $\lambda_2=4$ и $\lambda_n^{1/n}\to e$ при $n\to\infty$.

Доказательство. Обозначим через U неограниченную компоненту множества $\overline{\mathbb{R}^n}\setminus C$. Пусть C_1 – компакт $\overline{\mathbb{R}^n}\setminus U$. Ясно, что $C\subset C_1$ и $C_1\setminus C$ – открытое множество, состоящее из всех компонент связности множества $\overline{\mathbb{R}^n}\setminus C$ за исключением U. Кроме того, известно, что C_1 связно, см., напр., Теорему 5, Гл. 5, § 46, раздел III в [Ku], с. 149. Из последнего факта следует, что конденсатор $E_1=(B(r), C_1)$ является кольцевым конденсатором. Покажем, что $cap\,E\geq cap\,E_1$. Предположим, что функция $u\in W_0^{\infty}(E)$ такая, что $u(x)=1$ в некоторой окрестности C. Определим функцию $v(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ следующим образом: $v(x)=1$ при $x\in C_1$ и $v(x)=u(x)$ в противном случае. Покажем, что $v\in W_0^{\infty}(E_1)$. Заметим, что $\overline{\mathbb{R}^n}=U\cup(C_1\setminus C)\cup C$. Точки $x_0\in U\cap B(r)$ не могут быть особыми для функции v и её производных, ибо U по построению является открытым множеством, в точках которого v совпадает с u. Аналогично, множество $C_1\setminus C$ является открытым, в виду чего $v(x)\equiv 1$ в некоторой окрестности каждой точки $x_0\in C_1\setminus C$. Поэтому точки $x_0\in C_1\setminus C$ также не могут быть особенностями функции $v(x)$ и её производных. Наконец, точки $x_0\in C$ не могут быть особыми для v и её производных, поскольку в некоторой окрестности C мы будем иметь $u(x)=v(x)=1$.

Таким образом, $v \in W_0^{\infty}(E_1)$, откуда $cap\, E_1 \le \int\limits_{B(r)} |\nabla v|^n\, dm(x) \le \int\limits_{A} |\nabla u|^n\, dm(x)$ и $cap\, E_1 \le cap\, E$. Остальная часть доказательства непосредственно вытекает из того, что E_1 – кольцевой конденсатор и из Леммы 2. $\Box$

3. Основная лемма об оценке искажения. Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, – открытое дискретное отображение, $\beta : [a,\, b) \to \mathbb{R}^n$ – некоторая кривая и пусть $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Кривая $\alpha : [a,\, c) \to D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x, если (1) $\alpha(a) = x$; (2) $f \circ \alpha = \beta|_{[a,\, c)}$; (3) если $c < c' \le b$, то не существует кривой $\alpha' : [a,\, c') \to D$, такой что $\alpha = \alpha'|_{[a,\, c)}$ и $f \circ \alpha = \beta|_{[a,\, c')}$. Пусть f – открытое дискретное отображение и $x \in f^{-1}(\beta(a))$, тогда кривая β имеет максимальное поднятие при отображении f с началом в точке x, см. Следствие 3.3 Главы 2 в [Ri]. Говорят, что семейство кривых Γ_1 *минорируется* семейством Γ_2, пишем $\Gamma_1 > \Gamma_2$, если для каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2. Известно, что $M(\Gamma_1) \le M(\Gamma_2)$ при $\Gamma_1 > \Gamma_2$, см., напр., Теорему 6.4 в [Va]. Пусть $E = (A,\, C)$ – произвольный конденсатор в $\mathbb{R}^n$ и пусть Γ_E – семейство всех кривых вида $\gamma : [a,\, b) \to A$ с $\gamma(a) \in C$ и $|\gamma| \cap (A \setminus F) \ne \varnothing$ для произвольного компакта $F \subset A$.

Лемма 4. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, и пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное кольцевое Q–отображение. Предположим, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi_{\varepsilon}^n(|x-x_0|)\, dm(x) \le F(\varepsilon), \qquad \forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \tag{6}$$

для некоторого $x_0 \in D$ и $0 < \varepsilon_0 < dist(x_0, \partial D)$, где $\psi_{\varepsilon}(t)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ – семейство измеримых (по Лебегу) неотрицательных на $(0, \infty)$ функций, таких что $0 < I(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{\varepsilon}(t) dt < \infty\ \ \forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Тогда

$$cap\, fE \le F(\varepsilon)/I^n(\varepsilon), \qquad \forall\ \varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0), \tag{7}$$

где $E = (A,\, C)$, $A = B(x_0,\, r_0)$, $C = \overline{B(x_0,\, \varepsilon)}$, $r_0 = dist(x_0,\, \partial D)$.

Доказательство. Поскольку f – открытое и непрерывное отображение, то $E' = f\, E$ также является конденсатором. Если $cap\, fE = 0$, доказывать нечего. Пусть $cap\, fE \ne 0$. Обозначим через Γ_{fE}^* семейство всех спрямляемых кривых Γ_{fE}. Отметим, что $M\left(\Gamma_{fE}^*\right) = M(\Gamma_{fE}) = cap\, fE$, см. Предложение 10.2 и Замечание 10.8 Главы II в [Ri]. Пусть Γ^* – семейство максимальных $f-$поднятий кривых Γ_{fE}^*. Покажем, что $\Gamma^* \subset \Gamma_E$.

Предположим противное, т.е., что существует кривая $\beta : [a,\, b) \to \mathbb{R}^n$ семейства Γ_{fE}^*, для которой соответствующее максимальное поднятие $\alpha : [a,\, c) \to A$ лежит в некотором компакте K внутри A. Следовательно, его замыкание $\overline{\alpha}$ – компакт в A, см., напр., Теорему 2 §45 в [Ku], с.12. Заметим, что $c \ne b$, поскольку в противном случае $\overline{\beta}$ – компакт в fA, что противоречит условию $\beta \in \Gamma_{fE}^*$. Рассмотрим множество $G = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x = \lim\limits_{k\to\infty} \alpha(t_k)\right\}$, $t_k \in [a,\, c)$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = c$. Проще говоря, G – предельное множество $\alpha(t)$ при $t \to c - 0$. Отметим, что переходя к подпоследовательностям, здесь можно ограничиться монотонными последовательностями t_k. Для $x \in G$, в силу непрерывности f, будем иметь $f(\alpha(x_k)) \to f(x)$ при $k \to \infty$, где $x_k \in [a,\, c)$, $x_k \to c$ при $k \to \infty$. Однако, $f(\alpha(x_k)) = \beta(x_k) \to \beta(c)$ при $k \to \infty$. Отсюда заключаем, что

f постоянна на G в A. С другой стороны, по условию Кантора в компакте $\overline{\alpha}$, см. [Ku], с. 8–9, $G = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha\left([t_k,\, c)\right)} = \limsup\limits_{k\to\infty} \alpha\left([t_k,\, c)\right) = \liminf\limits_{k\to\infty} \alpha\left([t_k,\, c)\right) \neq \varnothing$ в виду монотонности относительно последовательности связных множеств $\alpha\left([t_k,\, c)\right)$ и, таким образом, G является связным по $I(9.12)$ в [Wh]. В силу дискретности f, G не может состоять более чем из одной точки, и кривая $\alpha : [a,\, c) \to A$ продолжается до замкнутой кривой $\alpha : [a,\, c] \to K \subset A$ и $f\left(\alpha(c)\right) = \beta(c)$. Снова по Следствию 3.3 Главы II в [Ri] можно построить максимальное поднятие α' кривой $\beta|_{[c,\, b)}$ с началом в точке $\alpha(c)$. Объединяя поднятия α и α', получаем новое поднятие α'' кривой β, которое определено на $[a, c')$, $c' \in (c,\, b)$, что противоречит максимальности поднятия α.

Таким образом, $\Gamma^* \subset \Gamma_E$. Заметим, что $\Gamma^*_{fE} > f\Gamma^*$, и, следовательно,

$$M\left(\Gamma^*_{fE}\right) \leq M\left(f\Gamma^*\right). \tag{8}$$

Рассмотрим $S_\varepsilon = S(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = \varepsilon\}$, $S_{\varepsilon_0} = S(x_0, \varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = \varepsilon_0\}$, где ε_0 – из условия леммы и $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0)$. Заметим, что, поскольку $\Gamma^* \subset \Gamma_E$, то семейство кривых $\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}\right)$ минорирует семейство Γ^* и, следовательно, $f\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}\right)$ минорирует $f\Gamma^*$ и, потому

$$M\left(f\Gamma^*\right) \leq M\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}\right)\right)\right). \tag{9}$$

Из соотношений (8) и (9) следует, что $M\left(\Gamma^*_{fE}\right) \leq M\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}\right)\right)\right)$ и, таким образом,

$$cap\ fE \leq M\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}\right)\right)\right). \tag{10}$$

Рассмотрим семейство измеримых функций $\eta_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon(t)/I(\varepsilon)$, $t \in (\varepsilon,\, \varepsilon_0)$. По определению кольцевого Q–отображения

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}\right)\right)\right) \leq \frac{1}{I^n(\varepsilon)} \int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi_\varepsilon^n(|x - x_0|)\ dm(x). \tag{11}$$

Из соотношений (6), (10) и (11) следует соотношение (7). Лемма 4 доказана. $\Box$

Лемма 5. Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ – открытое дискретное кольцевое Q–отображение, такое что $D' = f(D) \subset B(r)$ с $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(r)\right) \geq \delta > 0$. Предположим, что для $x_0 \in D$ и $0 < \varepsilon_0 < r_0 = dist(x_0, \partial D)$

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi_\varepsilon^n(|x - x_0|)\, dm(x) \leq K \cdot I^p(\varepsilon), \qquad \forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \tag{12}$$

где $p \leq n$ и $\psi_\varepsilon(t)$, $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0)$ – семейство измеримых (по Лебегу) неотрицательных на $(0, \infty)$ функций, таких что $0 < I(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_\varepsilon(t)\ dt < \infty$, $\forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Тогда

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\left\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(|x - x_0|)\right\}$$

для всех $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$, где

$$\alpha_n = 2\lambda_n^2, \quad \beta_n = \left(\frac{\omega_{n-1}}{K}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad \gamma_{n,p} = 1 - \frac{p-1}{n-1}, \tag{13}$$

$\lambda_n \in [4, 2e^{n-1})$, $\lambda_2 = 4$ и $\lambda_n^{1/n} \to e$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим конденсатор $E = (A, C)$, где $A = B\,(x_0, r_0)$, $C = \overline{B(x_0, \varepsilon)}$, $\varepsilon < \varepsilon_0$. По Лемме 4 будем иметь

$$cap\, fE \leq K \cdot I^{p-n}\,(\varepsilon)\,. \tag{14}$$

Поскольку $fA \subset B(r)$, в силу Леммы 3, примененной к конденсатору fE, будем иметь

$$cap\, fE \geq \frac{\omega_{n-1}}{\left\{\log \frac{2\lambda_n^2}{h(fC)h\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus B(r)\right)}\right\}^{n-1}}\,, \tag{15}$$

где ω_{n-1} – площадь сферы S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$, $\lambda_n \in [4, 2e^{n-1})$, $\lambda_2 = 4$ и $\lambda_n^{1/n} \to e$ при $n \to \infty$. Поскольку по условию $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(r)\right) \geq \delta$, из (14) и (15) будем иметь $h\,(fC) \leq \frac{2\,\lambda_n^2}{\delta}\exp\left\{-\left(\frac{\omega_{n-1}}{K}\right)^{\frac{1}{n-1}}(I(\varepsilon))^{\frac{p-n}{n-1}}\right\}$. Принимая обозначения $\alpha_n = 2\lambda_n^2$, $\beta_n = \left(\frac{\omega_{n-1}}{K}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \gamma_{n,p} = 1 - \frac{p-1}{n-1}$, получим

$$h\,(fC) \leq \frac{\alpha_n}{\delta}\exp\left\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(\varepsilon)\right\}. \tag{16}$$

Пусть теперь $x \in D$ такое, что $|x - x_0| = \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Тогда $x \in \overline{B\,(x_0, \varepsilon)}$ и $f(x) \in f\left(\overline{B\,(x_0, \varepsilon)}\right) = fC$ и из (16) имеем оценку

$$h\,(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\delta}\exp\left\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(|x - x_0|)\right\} \quad \forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \tag{17}$$

В силу произвольности $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, неравенство (17) имеет место во всём шаре $B(x_0, \varepsilon_0)$. $\Box$

4. Оценки искажения расстояния при кольцевых Q–отображениях.

Теорема 1. Пусть $f : D \to \mathbb{B}^n$, $n \geq 2$ – открытое дискретное кольцевое Q–отображение. Если

$$q_{x_0}(r) \leq \left[\log\frac{1}{r}\right]^{n-1} \tag{18}$$

для $r < \varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) < r_0 = dist(x_0, \partial D)$, где $q_{x_0}(r)$ – среднее интегральное значение Q над сферой $|x - x_0| = r$, то

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \alpha_n \frac{\log\frac{1}{\varepsilon(x_0)}}{\log\frac{1}{|x-x_0|}} \tag{19}$$

для всех $x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))$.

Доказательство. Заметим, что

$$\int\limits_{\varepsilon < |x-x_0| < \varepsilon_0} \frac{Q(x)dm(x)}{\left(|x|\log\frac{1}{|x|}\right)^n} = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\left(\int\limits_{|x-x_0|=r}\frac{Q(x)dm(x)}{\left(|x|\log\frac{1}{|x|}\right)^n}dS\right)dr \leq$$

$$\leq \omega_{n-1} \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r\log\frac{1}{r}} = \omega_{n-1} \log \frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{\varepsilon_0}} = \omega_{n-1} \cdot I(\varepsilon).$$

Таким образом, соотношение (19) следует из Леммы 5 при $p = 1$, $K = \omega_{n-1}$ и $\psi_\varepsilon(t) \equiv \frac{1}{t\log\frac{1}{t}}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. $\Box$

Следуя работе [IR], введём следующие определения. Будем говорить, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$, пишем $\varphi \in FMO(x_0)$, если

$$\overline{\lim\limits_{\varepsilon \to 0}} \ \fint_{B(x_0,\,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon| \ dm(x) \ < \ \infty, \tag{20}$$

где $\overline{\varphi}_\varepsilon = \fint_{B(x_0,\,\varepsilon)} \varphi(x) \ dm(x)$. Заметим, что при выполнении условия (20) возможна ситуация, когда $\overline{\varphi_\varepsilon} \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Также будем говорить, что $\varphi : D \to \mathbb{R}$ – функция конечного среднего колебания в области D, пишем $\varphi \in FMO(D)$, или $\varphi \in FMO$, если φ имеет конечное среднее колебание в каждой точке $x_0 \in D$.

Теорема 2. Пусть $f : D \to \mathbb{B}^n$, $n \geq 2$ – открытое дискретное кольцевое Q–отображение. Если функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке $x_0 \in D$, то

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \alpha_n \cdot \left\{ \frac{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}{\log\frac{1}{|x-x_0|}} \right\}^{\beta_0}$$

для $x \in B\,(x_0,\, \varepsilon_0)$ при некотором $\varepsilon_0 < dist\,(x_0, \partial D)$, где α_n зависит только от n и $\beta_0 > 0$ зависит только от функции Q.

Доказательство. Пусть $\varepsilon_0 < \min\{e^{-1},\ dist\ (x_0, \partial D)\}$. По Следствию 2.3 в [IR], для функции $\psi(t) = \frac{1}{t\ \log\frac{1}{t}}$ будем иметь, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x-x_0|) dm(x) = \int\limits_{\varepsilon<|y|<\varepsilon_0} Q(x_0+y) \cdot \psi^n\,(|y|)\, dm(y) =$$

$$= \int\limits_{\varepsilon\,<\,|y|\,<\varepsilon_0} \frac{Q(x_0+y)}{\left(|y|\ \log\frac{1}{|y|}\right)^n} dm(y) = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{21}$$

Заметим, что

$$I(\varepsilon) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt = \log\left(c\log\frac{1}{\varepsilon}\right), \tag{22}$$

где $c = \frac{1}{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}$. На основании соотношений (21) и (22) теперь получаем, что для выбранной функции ψ в точности выполнено соотношение (12) с $p = 1$. Оставшаяся часть утверждения следует теперь из Леммы 5. $\Box$

Замечание 1. Пусть $f : D \to \mathbb{B}^n$, $n \geq 2$ – открытое дискретное кольцевое Q–отображение и пусть дополнительно $Q(x) \geq 1$ п.в. в D. Тогда для каждой точки $x \in B(x_0,\, \varepsilon(x_0))$, $\varepsilon(x_0) < dist\,(x_0, \partial D)$, и для любого $\beta \geq 1/(n-1)$

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \alpha_n \cdot \exp\left\{ -\int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{rq^{\beta}_{x_0}(r)} \right\}, \tag{23}$$

где α_n задаётся соотношением (13) и $q_{x_0}(r)$ – среднее интегральное значение функции $Q(x)$ над сферой $|x-x_0|=r$.

Обозначим через $\mathfrak{F}_Q(D)$ класс всех открытых дискретных кольцевых Q–отображений $f:D\to\mathbb{B}^n$, $n\geq 2$.

Теорема 3. Класс $\mathfrak{F}_Q(D)$ образует нормальное семейство отображений в $\overline{\mathbb{R}^n}$, если выполнено одно из следующих условий:

1) $Q\in FMO(D)$;

2) для каждого $x_0\in D$, $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\ \fint_{B(x_0,\,\varepsilon)} Q(x)\ \ dm(x)<\infty$;

3) каждая точка $x_0\in D$ является точкой Лебега функции $Q(x)$;

4) $Q(x)\geq 1$ п.в. и условие расходимости интеграла $\int\limits_0^{\varepsilon(x_0)}\frac{dr}{rq_{x_0}^{\beta}(r)}=\infty$ при некотором $\beta\geq 1/(n-1)$, например, при $\beta=1$ в каждой точке $x_0\in D$, где $\varepsilon(x_0)<dist(x_0,\partial D)$, а $q_{x_0}(r)$ обозначает среднее интегральное значение функции $Q(x)$ над сферой $|x-x_0|=r$;

5) $Q(x)$ имеет особенности логарифмического типа порядка не выше, чем $n-1$, в каждой точке $x\in D$.

5. Равностепенная непрерывность и нормальность семейств в случае неограниченной области. Говорят, что компактное множество E в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$ имеет *нулевую ёмкость,* пишем $cap\,E=0$, если существует ограниченное открытое множество A с $E\subset A$ такое, что $cap\,(A,E)=0$. Академик Ю.Г.Решетняк доказал, см. [Re$_1$], что в последнем случае и для любого другого ограниченного открытого A, содержащего E, будет выполнено $cap\,(A,E)=0$. В противном случае, если существует открытое множество A с $E\subset A$ такое, что ёмкость $cap\,(A,E)>0$, полагаем $cap\,E>0$. Легко видеть, что если E является одноточечным множеством, $E=\{a\}$, то оно имеет ёмкость нуль. Аналогично тому, как последнее определение введено в $\mathbb{R}^n$, можно определить понятие множества ёмкости нуль в $\overline{\mathbb{R}^n}$, см., напр., раздел 2.12 в [MRV$_2$].

Лемма 6. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$ и пусть $E\subset\overline{\mathbb{R}^n}$ – компактное множество положительной ёмкости. Пусть $\mathfrak{F}_Q$ – семейство открытых дискретных кольцевых Q–отображений $f:D\to\overline{\mathbb{R}^n}\setminus E$. Предположим, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi_{\varepsilon}^n(|x-x_0|)\,dm(x)\,=\,o\left(I^n\left(\varepsilon\right)\right),\qquad\forall\,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)\tag{24}$$

для некоторой точки $x_0\in D$, $0<\varepsilon_0<dist(x_0,\partial D)$, где $\psi_\varepsilon(t)$ – семейство измеримых (по Лебегу) неотрицательных на $(0,\infty)$ функций, таких что $0<I(\varepsilon)=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi_\varepsilon(t)dt<\infty$, $\forall\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. Тогда семейство отображений $\mathfrak{F}_Q$ равностепенно непрерывно в точке x_0.

Доказательство. Выберем произвольно число $a>0$. Для этого числа найдётся число $\delta=\delta(a)$, такое что $cap\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus E,\,C\right)\geq\delta$, где C – произвольный континуум в $\overline{\mathbb{R}^n}\setminus E$ с $h(C)\geq a$, см. Лемму 3.11 в [MRV$_2$] или Лемму 2.6 Главы III в [Ri]. Рассмотрим конденсатор $\mathcal{E}=(A,\,C)$, $A=B\left(x_0,\,r_0\right)$, $C=\overline{B(x_0,\,\varepsilon)}$, а $r_0=dist\left(x_0,\,\partial D\right)$. Используя оценку (7) из Леммы 4, из условия (24) получаем $cap\,f\mathcal{E}\leq\alpha(\varepsilon)\quad\forall\,\varepsilon\in(0,\,\varepsilon_0)$, где $\alpha(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Тогда для числа $\delta=\delta(a)$ найдётся $\varepsilon_*=\varepsilon_*(a)$ такое, что

$$cap\,f\mathcal{E}\leq\delta\qquad\forall\,\varepsilon\,\in(0,\,\varepsilon_*(a))\,.\tag{25}$$

Используя соотношение (25), будем иметь

$$cap\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus E,\, f\left(\overline{B(x_0,\,\varepsilon)}\right)\right)\le cap\left(f\left(B(x_0,\,r_0)\right),\, f\left(\overline{B(x_0,\,\varepsilon)}\right)\right)\le\delta \qquad (26)$$

при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_*(a))$. Тогда $h\left(f\left(\overline{B(x_0,\varepsilon)}\right)\right)<a$. Окончательно, для любого $a>0$ существует $\varepsilon_*=\varepsilon_*(a)$ такое, что $h\left(f\left(\overline{B(x_0,\,\varepsilon)}\right)\right)<a$ как только $\varepsilon\in(0,\varepsilon_*(a))$. Лемма доказана. □

Теорема 4. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n\ge 2$ и пусть $E\subset\overline{\mathbb{R}^n}$ – компактное множество положительной ёмкости. Пусть $\mathfrak{F}_Q$ – семейство открытых дискретных кольцевых Q–отображений $f:D\to\overline{\mathbb{R}^n}\setminus E$ с $Q\in FMO(D)$. Тогда $\mathfrak{F}_Q$ образует нормальное семейство отображений.

Доказательство. Зафиксируем точку $x_0\in D$ и положим $\psi(t)=\frac{1}{t\log\frac{1}{t}}$. Тогда в каждой точке $x_0\in D$ для функции $Q(x)$ выполнено условие (24) из Леммы 6, см. Следствие 2.3 в [IR]. Нормальность семейства $\mathfrak{F}_Q$ следует теперь из версии теоремы Арцела–Асколи, сформулированной в Предложении 1. □

Теорема 5. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n\ge 2$ и пусть $E\subset\overline{\mathbb{R}^n}$ – компактное множество положительной ёмкости. Пусть $\mathfrak{F}_Q$ – семейство открытых дискретных кольцевых Q–отображений $f:D\to\overline{\mathbb{R}^n}\setminus E$. Предположим, что

$$q_{x_0}(r)=O\left(\left[\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$$

при $r\to 0$ для произвольного $x_0\in D$. Тогда $\mathfrak{F}_Q$ образует нормальное семейство отображений.

Доказательство. Выбирая в Лемме 6 $\psi_\varepsilon(t)\equiv\frac{1}{t\log\frac{1}{t}}$, получаем справедливость утверждения по Предложению 1. □

6. Об отображениях с конечным искажением длины. Отображение $f:D\to\mathbb{R}^n$ называется *отображением с ограниченным искажением,* если f непрерывно, $f\in W^{1,n}_{loc}$, якобиан $J(x,\,f)$ не меняет знак в D и

$$\|f'(x)\|^n\le K\cdot|J(x,f)| \qquad \text{п.в.} \qquad (27)$$

для некоторого числа $K\ge 1$, ср. [Re_1], [Re_2] и [MRV_1]. Если условие (27) заменить более общим условием $\|f'(x)\|^n\le K(x)\cdot|J(x,f)|$ п.в. с конечной функцией $K(x)$, то получится одно из определений *отображения с конечным искажением*, см. [IM]. Следуя [MRSY_1], говорим, что непрерывное отображение $f:D\to\mathbb{R}^n$,, $n\ge 2$ является отображением с *конечным метрическим искажением,* пишем $f\in FMD$, если f обладает (N)–свойством Лузина и $0<l(x,f)\le L(x,f)<\infty$ п.в., где $L(x,f)=\limsup\limits_{y\to x,\,y\in D}\frac{|f(x)-f(y)|}{|y-x|}$, $l(x,f)=\liminf\limits_{y\to x,\,y\in D}\frac{|f(x)-f(y)|}{|y-x|}$. Напомним, что отображение $f:X\to Y$ между пространствами с мерой (X,Σ,μ) и (X',Σ',μ') обладает (N)–*свойством,* если $\mu'(f(S))=0$ как только $\mu(S)=0$. Аналогично, f обладает (N^{-1})–*свойством,* если $\mu(S)=0$ как только $\mu'(f(S))=0$. Пусть $\Delta\subseteq\mathbb{R}$ – открытый интервал числовой прямой, $\gamma:\Delta\to\mathbb{R}^n$ – локально спрямляемая кривая. Тогда существует единственная неубывающая функция длины $l_\gamma:\Delta\to\Delta_\gamma\subseteq\mathbb{R}$ с условием $l_\gamma(t_0)=0$,

$t_0 \in \Delta$, такая что значение $l_\gamma(t)$ равно длине подкривой $\gamma\mid_{[t_0,\,t]}$ кривой γ, если $t > t_0$ и $-l\left(\gamma\mid_{[t,\,t_0]}\right)$, если $t < t_0$, $\quad t \in \Delta$. Пусть $g : |\gamma| \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, где $|\gamma| = \gamma(\Delta) \subseteq \mathbb{R}^n$. Предположим, что кривая $\widetilde{\gamma} = g \circ \gamma$ также локально спрямляема. Тогда существует единственная неубывающая функция $L_{\gamma,\,g} :\ \Delta_\gamma \to \Delta_{\widetilde{\gamma}}$ такая, что $L_{\gamma,\,g}\left(l_\gamma\left(t\right)\right) = l_{\widetilde{\gamma}}\left(t\right) \quad \forall\, t \in \Delta$. Будем говорить, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ обладает $(L)-$*свойством*, если выполнены следующие условия: (L_1) для п.в. кривых $\gamma \in D$ кривая $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$ локально спрямляема и функция $L_{\gamma,\,f}$ обладает (N)—свойством; (L_2) для п.в. кривых $\widetilde{\gamma} \in f\left(D\right)$ каждое *поднятие* γ кривой $\widetilde{\gamma}$ локально спрямляемо и функция $L_{\gamma,\,f}$ обладает (N^{-1})—свойством. Здесь кривая $\gamma \in D$ называется *поднятием кривой* $\widetilde{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ *при отображении* $f : D \to \mathbb{R}^n$, если $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$. Говорят, что некоторое свойство выполнено для *почти всех кривых* области D, если оно имеет место для всех кривых, лежащих в D, кроме, быть может, некоторого их семейства, модуль которого равен нулю.

Следуя [MRSY$_1$], говорим, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ является *отображением с конечным искажением длины*, пишем $f \in FLD$, если $f \in FMD$ и обладает $(L)-$свойством. Заметим, что развитая выше теория применима к семействам отображений $f : D \to \mathbb{R}^n$ с конечным искажением длины, поскольку отображения класса FLD являются $Q-$отображениями с $Q(x) = K_I(x,\,f)$, где $K_I(x,\,f)-$ внутренняя дилатация отображения f в точке $x \in D$, см. Теорему 6.10 в [MRSY$_1$]. Для отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, имеющего в D частные производные почти всюду, пусть $f'(x)$ – якобиева матрица отображения f в точке x, $J(x,f)$ – якобиан отображения f в точке x, т.е. детерминант $f'(x)$. Пусть, кроме того, $l\left(f'(x)\right) = \min\limits_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}$. Напомним, что *внутренняя дилатация* отображения f в точке x есть величина

$$K_I(x,f) \ = \ \frac{|J(x,f)|}{l\left(f'(x)\right)^n}\,,$$

если $J(x,f) \neq 0$, $\ K_I(x,f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_I(x,f) = \infty$ в остальных точках. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $\ n \geq 2$ и пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ – компактное множество положительной ёмкости.

Обозначим через $\mathcal{L}_{Q,E}(D)$ семейство всех открытых дискретных отображений конечного искажения длины $f : D \to \mathbb{R}^n \setminus E$, таких, что $K_I\left(x,\,f\right) \leq Q(x)$ п.в.

Теорема 6. Если $Q \in FMO(D)$, то семейство отображений $\mathcal{L}_{Q,E}(D)$ нормально в $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Следствие 1. Семейство отображений $\mathcal{L}_{Q,E}(D)$ нормально в $\overline{\mathbb{R}^n}$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \ \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x) \ \ dm(x) < \infty, \qquad\qquad \forall\, x_0 \in D.$$

Теорема 7. Семейство $\mathcal{L}_{Q,E}(D)$ нормально в $\overline{\mathbb{R}^n}$, если при $r \to 0$

$$q_{x_0}(r) \ = \ O\left(\left(\log\frac{1}{r}\right)^{n-1}\right), \qquad\qquad \forall\ x_0 \in D,$$

где $q_{x_0}(r)$ – среднее интегральное значение Q над сферой $|x - x_0| = r$.

Следствие 2. Семейство отображений $\mathcal{L}_{Q,E}(D)$ нормально в $\overline{\mathbb{R}^n}$, если функция $Q(x)$ имеет в каждой точке $x_0 \in D$ только логарифмические особенности порядка не выше, чем $n-1$.

[Ge$_1$] *Gehring F.W.* Quasiconformal mappings, Complex Analysis and its Applications, V.2., International Atomic Energy Agency, Vienna, 1976.

[Ge$_2$] *Gehring F.W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103.** – P.353-393.

[IM] *Iwaniec T. and Martin G.* Geometrical Function Theory and Non–Linear Analysis. – Oxford: Clarendon Press, 2001.

[IR] *Игнатьев А. и Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. матем. вестник. – 2005. – **2,** № 3. – С.395-417.

[Ku] *Куратовский К.* Топология, т. 2. – М.: Мир, 1969. – 624с.

[MRV$_1$] *Martio O., Rickman S. and Vaisala J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1969. – **448.** – P.1-40.

[MRV$_2$] *Martio O., Rickman S. and Vaisala J.* Distortion and singularities of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1970. – **465.** – P.1-13.

[MRSY$_1$] *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. d'Anal. Math. – 2004. – **93.** – P.215-236.

[MRSY$_2$] *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* On Q–homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 2005. – **30,** № 1. – P.49-69.

[Re$_1$] *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением // Сиб. матем. ж. – 1967. – **8,** №3. – С.629-658.

[Re$_2$] *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982.

[Ri] *Rickman S.* Quasiregular mappings. Results in Mathematic and Related Areas (3), 26. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[RSY$_1$] *Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equations // J. d'Anal. Math. – 2005. – **96.** – P.117-150.

[RSY$_2$] *Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* The Beltrami equation and ring homeomorphisms // Ukrain. Math. Bull. – 2007. – **4**, no.1. – P.79-115.

[RS] *Рязанов В.И. и Севостьянов Е.А.* Нормальные семейства пространственных отображений // Сиб. электр. матем. известия, www.math.semr.nsc.ru. – 2006. – **3.** – С.216-231.

[Tam] *Тамразов П.М.* Модули и экстремальные метрики в неориентированных и скрученных римановых многообразиях // Укр. матем. ж. – 1998. – **50,** №10. – С.1388-1398.

[Va] *Vaisala J.* Lectures on n–Dimensional Quasiconformal Mappings. Lecture Notes in Math. 229. – Berlin etc.: Springer–Verlag, 1971.

[Vu] *Vuorinen M.* Conformal Geometry and Quasiregular Mappings. Lecture Notes in Math. 1319. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1988.

[Wh] *Whyburn G.T.* Analytic topology. – American Mathematical Society, Rhode Island. – 1942.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
sevostyanov@skif.net, e_sevostyanov@rambler.ru,
sevostyanov@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 28.04.07