ISSN 1683-4720 Труды ИПММ НАН Украины. 2009. Том 19

УДК 517.5

©2009. **Е.А. Севостьянов**

РАВНОСТЕПЕННАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ В ЗАМЫКАНИИ ОБЛАСТИ

Доказано, что некоторое семейство гомеоморфизмов $f:\overline{D}\to\overline{D'}$ нормально в замыкании D при условии, что границы областей D и D' обладают определёнными свойствами. Кроме того, для таких классов гомеоморфизмов $f:\overline{D}\to\overline{D'}$ исследован вопрос о нормальности семейства обратных отображений.

1. Введение. Как известно, в основу геометрического определения квазиконформных отображений, заданных в области D из $\mathbb{R}^n$, $n\ge 2$, положено неравенство

$$M(f\Gamma)\le K\,M(\Gamma) \qquad (1)$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D, где M – модуль семейства кривых (внешняя мера, определённая на семействах кривых в $\mathbb{R}^n$), а $K\ge 1$ – некоторая постоянная, см. [10]. Предположим теперь, что в основе определения рассматриваемого класса отображений вместо соотношения (1) лежит неравенство вида

$$M(f\Gamma)\le\int\limits_D Q(x)\cdot\rho^n(x)\ \ dm(x)\,, \qquad (2)$$

где $m(x)$ – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, ρ – произвольная неотрицательная борелевская функция, такая что произвольная кривая γ семейства Γ имеет длину, не меньшую единицы в метрике ρ, т.е. $\int\limits_\gamma\rho(x)\ \ |dx|\ge 1$ для всех $\gamma\in\Gamma$, а $Q:D\to[1,\infty]$ – фиксированная вещественнозначная функция; ниже по тексту будет дано точное определение. В случае, когда $Q(x)\le K$ п.в., мы снова приходим к неравенству (1). Нас интересует более общий случай, когда $Q(x)$ может быть неограничена. В статье рассматривается следующая задача: установить для гомеоморфизмов, удовлетворяющих соотношениям вида (2) равностепенную непрерывность в замыкании области D, требуя, возможно, некоторые условия на границы областей D и $f(D)=D'$, а также на "мажоранту" $Q(x)$. Такие условия должны влечь за собой возможность распространения отображений семейства на границу D, ибо это, в частности, обеспечивает корректность постановки данной задачи. Отметим, что равностепенная непрерывность Q-гомеоморфизмов внутри области доказана в работе [9].

2. Предварительные сведения. Всюду далее D – область в $\mathbb{R}^n$, $n\ge 2$, $B(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^n:|x-x_0|<r\}$, $S(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^n:|x-x_0|=r\}$, $m(x)$ – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, $\overline{\mathbb{R}^n}=\mathbb{R}^n\cup\{\infty\}$, $\operatorname{diam}A$ означает евклидов диаметр множества $A\subset\mathbb{R}^n$, $\operatorname{dist}(A,B)$ – евклидово расстояние между множествами A и B в $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{mes}A$ – лебегова мера множества $A\subset\mathbb{R}^n$. Напомним, что борелева функция $\rho:\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$

называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если $\int\limits_{\gamma}\rho(x)\quad |dx|\geq 1$ для всех $\gamma\in\Gamma$. В этом случае мы пишем: $\rho\in \operatorname{adm}\Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина $M(\Gamma)=\inf_{\rho\in \operatorname{adm}\Gamma}\int\limits_{D}\rho^n(x)\quad dm(x)$. В 2001г. В.Я.Гутлянский и В.И.Рязанов совместно с О.Мартио предложили к рассмотрению следующее определение, см. [7], см. также [1]. Пусть $Q:D\rightarrow[1,\infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Говорят, что гомеоморфизм $f:D\rightarrow\overline{\mathbb{R}^n}$ является *Q-гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma)\leq\int\limits_{D}Q(x)\cdot\rho^n(x)\quad dm(x)$$

для любого семейства Γ путей γ в D и для каждой допустимой функции $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma$. Напомним, что область D называется *локально связной в точке* $x_0\in\partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V\subseteq U$ точки x_0 такая, что $V\cap D$ связно, см. [4], с.232. Для произвольных множеств $E,\ F\subseteq\overline{\mathbb{R}^n}$ обозначим через $\Gamma(E,F,D)$ семейство всех кривых $\gamma:[a,b]\rightarrow\overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a)\in E,\gamma(b)\in F$ и $\gamma(t)\in D$ при $t\in(a,\,b)$. Согласно [8], с.205, будем говорить, что *∂D сильно достижима в точке* $x_0\in\partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется компакт $E\subset D$, окрестность $V\subset U$ точки x_0 и число $\delta>0$ такие, что

$$M(\Gamma(E,F,D))\geq\delta \tag{3}$$

для любого континуума F в D, пересекающего ∂U и ∂V. Заметим, что соотношение (3) в этом случае также выполнено, если в качестве F взять произвольную кривую, имеющую одним из своих концов точку x_0 и лежащую полностью в D, кроме этой концевой точки. Граница области $D\subset\mathbb{R}^n$ называется *сильно достижимой*, если она сильно достижима в каждой своей точке. Согласно [2], область D в $\mathbb{R}^n$ будем называть *областью квазиэкстремальной длины*, сокр. *QED-областью*, если

$$M(\Gamma(E,F,\mathbb{R}^n))\leq K\,M(\Gamma(E,F,D)) \tag{4}$$

для конечного числа $K\geq1$ и всех континуумов E и F в D. Известно, см., напр., теорему 2.8 в [6], с.173, что если D является QED-областью, то в этом случае соотношение (4) выполнено также для каждой пары непересекающихся континуумов E и F в $\overline{D}$. Аналогичные определения можно дать для области $D\subset\overline{\mathbb{R}^n}$.

Пусть (X,d) и $(X\,',d')$ – метрические пространства с расстоянием d и d', соответственно. Семейство $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений $f:X\rightarrow X\,'$ называется *нормальным*, если из любой последовательности отображений $f_m\in\mathfrak{F}$ можно выделить подпоследовательность f_{m_k}, которая сходится локально равномерно в X к непрерывному отображению $f:X\rightarrow X'$, см., напр., п.20.2 в [10]. Семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f:X\rightarrow X\,'$ называется *равностепенно непрерывным в точке* $x_0\in X$, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся $\delta>0$, такое, что $d'(f(x),f(x_0))<\varepsilon$ для всех $f\in\mathfrak{F}$ и для всех x с $d(x,x_0)<\delta$. Говорят, что $\mathfrak{F}$ *равностепенно непрерывно*, если $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно в каждой точке из X. Хорошо известно, что в произвольных метрических пространствах (X,d) и $(X\,',d')$ любое нормальное семейство $\mathfrak{F}$ отображений

$f : X \to X'$ равностепенно непрерывно. Обратное заключение также верно, если пространство (X, d) — сепарабельное, а (X', d') — компактное. Соответствующую версию теоремы Арцела–Асколи, см., напр., в [10], с.68.

Напомним, что *сферическое (хордальное)* расстояние между точками x и y в $\overline{\mathbb{R}^n}$ есть величина $h(x,y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, где π – стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$h(x,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}\,,\ h(x,y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}, \quad x \neq \infty \neq y\,.$$

Хордальным диаметром множества $E \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ называется величина $h(E) = \sup\limits_{x\,,y \in E} h(x,y)$.

3. Лемма о равностепенной непрерывности в замыкании и следствия из неё. Пусть $n \geq 2$, а D и D' – области в $\mathbb{R}^n$ и в $\overline{\mathbb{R}^n}$, соответственно. Будем говорить, что семейство непрерывных отображений $\mathfrak{F} = \{f : D \to D'\}$ может быть *расширено* до семейства непрерывных отображений $\overline{\mathfrak{F}} = \{\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}\}$, если для каждого $f \in \mathfrak{F}$ существует отображение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$ такое, что $\overline{f}(x)|_D \equiv f(x)$ для всех $x \in D$.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – семейство Q-гомеоморфизмов $f : D \to D'$ на область D', такую что при некоторых $z_1 \neq z_2 \in D$, $z_1', z_2' \in D'$ выполнено $f(z_1) = z_1'$, $f(z_2) = z_2' \quad \forall \quad f \in \mathfrak{F}$, причём $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\,(D)\right) > 0 \quad \forall \quad f \in \mathfrak{F}$, область D локально связна во всех граничных точках, а $\partial D'$ сильно достижима. Предположим, что для каждой точки $x_0 \in \overline{D}$ найдётся $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$ такое, что*

$$\int\limits_{D(x_0,\,\varepsilon)} Q(x) \cdot \psi^n(|x - x_0|)\; dm(x) = o\left(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)\right), \quad \forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\,, \tag{5}$$

где $D(x_0, \varepsilon) = \{x \in D : \varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0\}$ и $\psi(t)$ – неотрицательная измеримая функция на $(0,\infty)$ такая, что

$$0\, <\, I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty$$

для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Тогда семейство $\mathfrak{F}$ может быть расширено до семейства непрерывных отображений $\overline{\mathfrak{F}} = \{\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}\}$, которое является равностепенно непрерывным в $\overline{D}$.

Здесь и ниже мы рассматриваем $\mathfrak{F}$ как семейство отображений между метрическими пространствами $(X\,, d)$ и $(X'\,, d')$, где $X = D$, $X' = D'$, $d(x,y) = |x-y|$, $d'(x,y) = h(x,y)$ – хордальная метрика.

Доказательство. Равностепенная непрерывность внутри области является результатом работы [9], см. лемму 3.2. Возможность продолжения каждого элемента f семейства $\mathfrak{F}$ до непрерывного отображения в замыкании D показана в [8], см. лемму 5.1.

Осталось показать, что $\mathfrak{F}$ (обозначения не меняем) равностепенно непрерывно в точках ∂D. Предположим противное, тогда найдётся $x_0\in\partial D$ и число $a>0$ такое, что для каждого $m=1,2,\ldots$ существуют точка $x_m\in\overline{D}$ и элемент f_m семейства $\mathfrak{F}$ такие, что $|x_0-x_m|<1/m$ и

$$h\left(f_m(x_m),f_m(x_0)\right)\geq a\,. \tag{6}$$

В виду возможности непрерывного продолжения каждого f_m на границу D, см. лемму 5.1 в [8], мы можем считать, что $x_m\in D$. Т.к. всякое замкнутое подмножество компактного пространства компактно, см. теорему 2 из § 41 гл.IV в [4], множество $\overline{D'}$ является компактом в $\overline{\mathbb{R}^n}$. Следовательно, существует возрастающая подпоследовательность номеров m_k и $y_0\in\partial D'$ такие, что

$$h(f_{m_k}(x_0),\,y_0)\rightarrow 0 \tag{7}$$

при $k\rightarrow\infty$. Можно считать, что

$$h\left(f_{m_k}(x_0),\,y_0\right)\leq a/2\qquad\forall\quad k\in\mathbb{N}\,. \tag{8}$$

Тогда из (6), (8) и неравенства треугольника следует, что $h\left(f_{m_k}(x_{m_k}),\,y_0\right)\geq a/2$ при всех $k\in\mathbb{N}$. В силу локальной связности области D в точке x_0 найдётся последовательность окрестностей V_m точки x_0 с $\operatorname{diam}V_m\rightarrow 0$ при $m\rightarrow\infty$ такие, что множества $D\cap V_m$ являются областями и $x_{m_k}\in\overline{D\cap V_{m_k}}$. Т.к. граничные точки области, локально связной на границе являются достижимыми из D некоторым локально спрямляемым путём, см. предложение 2.2 в [8], мы можем соединить точки x_{m_k} и x_0 непрерывной кривой $\gamma_k(t):[0,1]\rightarrow\mathbb{R}^n$ такой, что $\gamma_k(0)=x_0$, $\gamma_k(1)=x_{m_k}$ и $\gamma_k(t)\in V_{m_k}$ при $t\in(0,1)$. Обозначим через C_k образ кривой $\gamma_k(t)$ при отображении f_{m_k}. Т.к. граница $\partial D'$ по условию сильно достижима, а C_k – последовательность континуумов в D' таких, что $h\left(C_k,y_0\right)\rightarrow 0$ при $k\rightarrow\infty$ в виду (7), найдётся компакт $C\subset D'$ такой, что

$$M\left(\Gamma\left(C_k,C,D'\right)\right)\geq\delta \tag{9}$$

для некоторого $\delta>0$ и достаточно больших k. В виду нормальности $\mathfrak{F}$ в D можно считать, что $f_{m_k}\rightarrow f$ при $k\rightarrow\infty$ локально равномерно в D; в таком случае, f – гомеоморфизм в D, см. лемму 6.2 в [9]. Заметим, что $f_{m_k}^{-1}\rightarrow f^{\,-1}$ при $k\rightarrow\infty$ локально равномерно в D'. Действительно, пусть B – замкнутый шар в области D, принадлежащий D вместе с замкнутой ε – окрестностью B^{ε}. Тогда $\operatorname{dist}\left(f\left(\partial B^{\varepsilon}\right),f(B)\right)\geq\delta>0$. Заметим, что при больших k компакты $f_{m_k}\left(\partial B^{\varepsilon}\right)$ и $f(\partial B^{\varepsilon})$, и, соответственно, $f_{m_k}\left(B\right)$ и $f(B)$, лежат в $\delta/2$ – окрестностях друг друга. В таком случае имеем:

$$f_{m_k}\left(B^{\varepsilon}\right)\supset f(B)\,. \tag{10}$$

Заметим, что локально равномерная сходимость $f_{m_k}^{-1}\rightarrow f^{\,-1}$ при $k\rightarrow\infty$ эквивалентна сходимости $(f-f_{m_k})\circ f_{m_k}^{-1}\rightarrow 0$ при $k\rightarrow\infty$. Однако, в виду (10), $f_{m_k}^{-1}\left(f(B)\right)\subset B^{\varepsilon}$, а $f_{m_k}\rightarrow f$ при $k\rightarrow\infty$ на B^{ε}. Т.к. любой компакт B' из D' может быть покрыт конечным числом компактов вида $f(B)$, где B – шар в D, равномерная сходимость $f_{m_k}^{-1}\to f^{-1}$ при $k\to\infty$ доказана.

В виду доказанного выше, заключаем, что компакты $K_{m_k}:=f_{m_k}^{-1}(C)$ сходятся к компакту $f^{-1}(C)$ в смысле хаусдорфовой метрики. Тогда, учитывая, что $x_0\in\partial D$, будем иметь $\varepsilon_1:=\inf\limits_{k\in\mathbb{N}}\operatorname{dist}\left(x_0, f_{m_k}^{-1}(C)\right)>0$. Полагаем $\varepsilon_2:=\min\{\varepsilon_0,\varepsilon_1\}$. Пусть $\Gamma_{\varepsilon,k}$ – семейство кривых, соединяющих шар $B(x_0,\varepsilon)$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2)$, с компактом K_{m_k}. По Теореме Лузина существует борелевская функция $\psi_*(t)=\psi(t)$ при п.в. t. Из соотношения (5) следует, что $I(\varepsilon,\varepsilon_0)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$, следовательно, $I(\varepsilon,\varepsilon')>0$ при любых $0<\varepsilon<\varepsilon'<\varepsilon_0$. Значит, функция

$$\rho_\varepsilon(x)=\begin{cases}\psi_*(|x-x_0|)/I(\varepsilon,\varepsilon_2), & \{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_2\}\cap D,\\ 0, & x\in\mathbb{R}^n\setminus\{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_2\}\cap D\end{cases}$$

корректно определена и является борелевской. Кроме того, $\forall\ \gamma\in\Gamma_{\varepsilon,k}$,

$$\int\limits_\gamma \rho_\varepsilon\,|dx|\ \geq\ \frac{1}{I\left(\varepsilon,\varepsilon_2\right)}\int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_2}\psi_*(t)dt\ =\ 1\,,$$

см. теорему 5.7 в [10]. Следовательно, $\rho_\varepsilon\in\operatorname{adm}\Gamma_{\varepsilon,k}$. Положим

$$\mathcal{F}(\varepsilon):=\frac{1}{I(\varepsilon,\varepsilon_2)^n}\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\,\psi_*^n(|x-x_0|)\,dm(x)\,.$$

Покажем, что $\mathcal{F}(\varepsilon)\ \to\ 0$. Учитывая (5), имеем следующее соотношение:

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\,\psi_*^n(|x-x_0|)\,dm(x)\ =\ G(\varepsilon)\cdot\left(\int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0}\psi_*(t)dt\right)^n\,,$$

где $G(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Заметим, что

$$\mathcal{F}(\varepsilon)\ =\ G(\varepsilon)\cdot\left(1\,+\,\frac{\int\limits_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_0}\psi_*(t)dt}{\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_2}\psi_*(t)dt}\right)^n\,,$$

где $\int\limits_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_0}\psi_*(t)dt<\infty$ – фиксированное число, а $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_2}\psi_*(t)dt\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$, поскольку величина интеграла слева в (5) увеличивается при уменьшении ε. Таким образом, $\mathcal{F}(\varepsilon)\ \to\ 0$. Следовательно,

$$M(f_{m_k}\Gamma_{\varepsilon,k})\to 0 \tag{11}$$

при $\varepsilon\to 0$ и каждом фиксированном $k\in\mathbb{N}$. С другой стороны, для любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2)$ при больших k имеет место включение $D\cap V_{m_k}\ \subset\ B(x_0,\varepsilon)$, следовательно,

$C_k \subset f_{m_k}B(x_0, \varepsilon)$. Кроме того, при тех же $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma(C_k, C, D') \subset f_{m_k}\Gamma_{\varepsilon,k}$. Следовательно, в силу (11),

$$M\left(\Gamma(C_k, C, D')\right) \le M(f_{m_k}\Gamma_{\varepsilon,k}) \to 0 \tag{12}$$

при $\varepsilon \to 0$ и достаточно больших (фиксированных) k. Однако, соотношение (12) противоречит соотношению (9). Следовательно, семейство $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно в точке x_0. $\Box$

Следствие 1. *В условиях леммы 1 семейство $\mathfrak{F}$ является нормальным семейством отображений в $\overline{D}$.*

4. Основные следствия.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – семейство Q-гомеоморфизмов $f : D \to D'$ на область D' такую, что при некоторых $z_1 \ne z_2 \in D$, $z_1', z_2' \in D'$ выполнено $f(z_1) = z_1'$, $f(z_2) = z_2'$ $\forall$ $f \in \mathfrak{F}$, причём $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)\right) > 0$ $\forall$ $f \in \mathfrak{F}$, область D локально связна во всех граничных точках, а $\partial D'$ сильно достижима. Предположим, что в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$, $q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ при $r \to 0$, где $q_{x_0}(r)$ среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $\{x \in D : |x - x_0| = r\}$.*

Тогда семейство $\mathfrak{F}$ может быть расширено до семейства непрерывных отображений $\overline{\mathfrak{F}} = \{\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}\}$, которое является равностепенно непрерывным в $\overline{D}$.

Здесь и далее $Q(x)$ доопределяем тождественно единицей вне D.

Доказательство. Пусть x_0 – произвольная точка $\overline{D}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$. Фиксируем $\varepsilon_0 < 1$. Положим $\psi(t) = \frac{1}{t \log \frac{1}{t}}$. Заметим, что

$$\int\limits_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} \frac{Q(x)dm(x)}{\left(|x| \log \frac{1}{|x|}\right)^n} = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \left(\int\limits_{|x|=r} \frac{Q(x)dm(x)}{\left(|x| \log \frac{1}{|x|}\right)^n} dS \right) dr \le$$

$$\le \omega_{n-1} \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r \log \frac{1}{r}} = \omega_{n-1} \log \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{\varepsilon_0}} = \omega_{n-1} \cdot I(\varepsilon, \varepsilon_0)\,,$$

где $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt$. Нужное заключение следует теперь прямо из леммы 1. $\Box$

С целью упрощения, мы обозначаем в дальнейшем $\fint\limits_A f(x)\, dm(x) := \frac{1}{|A|} \int\limits_A f(x)\, dm(x)$, где, как обычно, $|A|$ обозначает лебегову меру множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Следуя работе [3], говорим, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в точке* $x_0 \in D$, пишем $\varphi \in FMO(x_0)$, если $\overline{\lim\limits_{\varepsilon \to 0}}\ \fint_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon|\ dm(x) < \infty$, где $\overline{\varphi}_\varepsilon = \fint_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\ dm(x)$. Также говорим, что $\varphi : D \to \mathbb{R}$ – функция *конечного среднего колебания* в D, пишем $\varphi \in FMO(D)$, или $\varphi \in FMO$, если φ имеет конечное среднее колебание в каждой точке $x \in D$.

Также напомним, см. раздел 2 в [3], что область $D \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию удвоения меры в точке $x_0 \in \overline{D}$, если $\operatorname{mes} B(x_0, 2\varepsilon) \cap D \le c \cdot \operatorname{mes} B(x_0, \varepsilon) \cap D$ для некоторого $c > 0$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Предложение 1. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию удвоения меры в $0 \in \overline{D}$, $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, – неотрицательная функция, имеющая конечное среднее колебание в точке $0 \in D$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ $\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} \frac{\varphi(x)\, dm(x)}{(|x| \log \frac{1}{|x|})^n} = O\left(\log\log \frac{1}{\varepsilon}\right)$ для некоторого $\varepsilon_0 \leq \operatorname{dist}(0, \partial D)$, см. следствие 2.3. в [3].*

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – семейство Q-гомеоморфизмов $f : D \to D'$ на область D' такую, что при некоторых $z_1 \neq z_2 \in D$, $z_1', z_2' \in D'$ выполнено $f(z_1) = z_1'$, $f(z_2) = z_2' \quad \forall \quad f \in \mathfrak{F}$, причём $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)\right) > 0 \quad \forall \quad f \in \mathfrak{F}$, область D локально связна и удовлетворяет условию удвоения меры во всех граничных точках, а $\partial D'$ сильно достижима. Предположим, что $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание во всех точках $x_0 \in \overline{D}$. Тогда семейство $\mathfrak{F}$ может быть расширено до семейства непрерывных отображений $\overline{\mathfrak{F}} = \{\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}\}$, которое является равностепенно непрерывным в $\overline{D}$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$ и $\mathbb{B}^n \subset D$. Пусть $\varepsilon_0 < e^{-1}$. На основании леммы 2, для функции $0 < \psi(t) = \frac{1}{t \log \frac{1}{t}}$ будем иметь, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x|)\; dm(x) \;=\; O\left(\log\log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Заметим также, что

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) \;:=\; \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt \;=\; \log \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{\varepsilon_0}}.$$

Оставшаяся часть утверждения следует теперь из леммы 1. □

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – семейство Q-гомеоморфизмов $f : D \to D'$ на область D' такую, что при некоторых $z_1 \neq z_2 \in D$, $z_1', z_2' \in D'$ выполнено $f(z_1) = z_1'$, $f(z_2) = z_2' \quad \forall \quad f \in \mathfrak{F}$, причём $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)\right) > 0 \quad \forall \quad f \in \mathfrak{F}$, область D локально связна во всех граничных точках, а $\partial D'$ сильно достижима. Предположим, что найдётся число $\varepsilon_0 < 1$ такое, что*

$$\int\limits_{0}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty\,. \tag{13}$$

Тогда семейство $\mathfrak{F}$ может быть расширено до семейства непрерывных отображений $\overline{\mathfrak{F}} = \{\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}\}$, которое является равностепенно непрерывным в $\overline{D}$.

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ положим

$$\psi_\varepsilon(t) \equiv \psi(t) = \begin{cases} 1/[t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)]\,, & t \in (\varepsilon, \varepsilon_0)\,, \\ 0\,, & t \notin (\varepsilon, \varepsilon_0)\,. \end{cases}$$

Имеем

$$L(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty \quad \forall \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\,,$$

поскольку $q_{x_0}(t)\geq 1$ при п.в. t. В виду соотношения (13) можно также считать, что $L>0$ для всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. Заметим также, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x-x_0|)\ dm(x)\ =\ \omega_{n-1}\cdot L(\varepsilon,\varepsilon_0)$$

и что $L(\varepsilon,\varepsilon_0)=o\left(L^n(\varepsilon,\varepsilon_0)\right)$ в виду (13). Нужное заключение следует теперь из леммы 1. $\Box$

5. О равностепенной непрерывности семейства обратных гомеоморфизмов.

Теорема 4. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– семейство* Q*-гомеоморфизмов* $f:D\to D'$ *на область* D' *с* $Q\in L^1_{loc}(D)$*, удовлетворяющих условиям нормировки* $f(z_0)=z_0'$*,* $f(x_0)=x_0'$ *для некоторых фиксированных* $z_0\neq x_0$ *в* D*, область* D *локально связна во всех граничных точках,* $\overline{D}$ *является компактом, а* D' *является* QED*-областью. Тогда семейство* $\mathfrak{F}^{-1}$*, состоящее из семейства обратных гомеоморфизмов* $\{g=f^{-1}:D'\to D\}$*, может быть расширено до семейства непрерывных отображений* $\overline{\mathfrak{F}^{-1}}=\{\overline{g}=\overline{f^{-1}}:\overline{D'}\to\overline{D}\}$*, которое является равностепенно непрерывным в* $\overline{D'}$*.*

Доказательство. Т.к. область D' является QED-областью, каждый обратный гомеоморфизм f^{-1} имеет непрерывное продолжение на границу D', см. лемму 9.3 в [8]. Осталось показать равностепенную непрерывность $\mathfrak{F}^{-1}$ (обозначения не меняем) в $\overline{D'}$.

Покажем сначала, что $\mathfrak{F}^{-1}$ равностепенно непрерывно в $\overline{D'}\setminus\{z_0'\}$. Предположим противное, т.е. найдутся $y_0\neq z_0'$ и $\varepsilon_0>0$, такие что для любого $m\in\mathbb{N}$ найдётся $y_m\in\overline{D'}$ с $h(y_m,y_0)<1/m$ и элемент $f_m^{-1}\in\mathfrak{F}^{-1}$ такие, что

$$|f_m^{-1}(y_m)-f_m^{-1}(y_0)|\geq\varepsilon_0\,. \tag{14}$$

Т.к. по условию $\overline{D}$ является компактом, существует возрастающая подпоследовательность номеров m_k и $x_0^1,x_0^2\in\overline{D}$ такие, что $f_{m_k}^{-1}(y_{m_k})\to x_0^1$ и $f_{m_k}^{-1}(y_0)\to x_0^2$ при $k\to\infty$. В силу неравенства (14), $|x_0^1-x_0^2|\geq\varepsilon_0/2$. Т.к. D локально связна на границе, существуют окрестности U_i точек x_0^i такие, что множества $W_i=U_i\cap D$ являются связными, причём $W_i\subset B(x_0^i,\varepsilon_0/6)$. Заметим, что $\mathrm{dist}\,(W_1,W_2)\geq\varepsilon_0/6$. Можно считать, что x_0 лежит вне W_2, а z_0 – вне W_1. Соединим точки x_0 и x_0^1 замкнутой кривой C_1, лежащей в области D, кроме, возможно, одной концевой точки, а z_0 и x_0^2, аналогично, замкнутой кривой C_2, так что $C_1\cap C_2=\varnothing$. Рассмотрим множества $A_1:=W_1\cup C_1$ и $A_2:=W_2\cup C_2$. Заметим, что $\mathrm{dist}\,(A_1,A_2)=\delta>0$. Пусть Γ – семейство кривых, соединяющих множества $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ в D, тогда функция

$$\rho(x)=\begin{cases}\frac{1}{\delta}, & x\in D\\ 0, & x\notin D\end{cases}$$

является допустимой для семейства Γ и

$$M(f_{m_k}\Gamma)\leq\frac{1}{\delta^n}\int\limits_D Q(x)dm(x):=c(\delta)<\infty\,, \tag{15}$$

т.к. $Q \in L^1(D)$. С другой стороны, z_0' и $y_0 \in f_{m_k}A_2$ и $\operatorname{diam} f_{m_k}A_2 \geq h(z_0', y_0) \geq \delta_2 > 0$, т.к. $z_0' \neq y_0$ по предположению. Аналогично, x_0' и $y_{m_k} \in f_{m_k}A_1$ и $\operatorname{diam} f_{m_k}A_1 \geq h(x_0', y_{m_k}) \geq \frac{1}{2}h(x_0', y_0) > \delta_1 > 0$, т.к. $h(y_{m_k}, y_0) \to 0$ при $k \to \infty$ и $x_0' \neq y_0$, ибо, в противном случае, $f_{m_k}(x_0) = y_0 \in f_{m_k}A_1$, однако, также $y_0 \in f_{m_k}A_2$, что противоречит гомеоморфности f_{m_k}. Кроме того, заметим, что $h(f_{m_k}A_1, f_{m_k}A_2) \to 0$ при $k \to \infty$, т.к. $h(y_{m_k}, y_0) < 1/m_k$ и $h\left(\overline{f_{m_k}A_1}, \overline{f_{m_k}A_2}\right) \to 0$ при $k \to \infty$. Заметим, что

$$f_{m_k}\Gamma = \Gamma\left(\overline{f_{m_k}A_1}, \overline{f_{m_k}A_2}, D'\right)\,. \tag{16}$$

Т.к. D' по условию является QED – областью, по теореме 2.8 в [6], с.173 и лемме 3.20 в [5], учитывая (16), имеем что при $k \to \infty$

$$K \cdot M(f_{m_k}\Gamma) = K \cdot M\left(\Gamma\left(\overline{f_{m_k}A_1}, \overline{f_{m_k}A_2}, D'\right)\right) \geq$$

$$\geq M\left(\Gamma\left(\overline{f_{m_k}A_1}, \overline{f_{m_k}A_2}, \mathbb{R}^n\right)\right) \to \infty\,.$$

Однако, последнее соотношение противоречит (15).

Равностепенная непрерывность семейства $\mathfrak{F}^{-1}$ в $\overline{D'} \setminus \{z_0'\}$ доказана. Аналогично доказывается равностепенная непрерывность семейства $\mathfrak{F}^{-1}$ в $\overline{D'} \setminus \{x_0'\}$, откуда следует равностепенная непрерывность $\mathfrak{F}^{-1}$ в $\overline{D'}$. $\square$

1. *Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M.*, On conformal dilatation in space // Intern. Journ. Math. and Math. Scie. – 2003. – **22**. – P.1397-1420.
2. *Gehring F.W. and Martio O.* Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings // J. d'Anal. Math. – 1985. – **24**. – P.181-206.
3. *Игнатьев А. и Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. матем. вестник. – 2005. – **2**, no.3. – С.395-417.
4. *Куратовский К.* Топология, т.2. – М.: Мир, 1969.– 624с.
5. *Heikkala V.* Inequalities for conformal capacity, modulus, and conformal invariants // Ann. Acad. Scie. Fenn., dissertations, no.132, Helsinki, 2002.
6. *Herron J., Koskela P.* Quasiextremal distance domains and conformal mappings onto circle domains // Compl. Var. Theor. Appl. – 1990. – **15**. – P.167-179.
7. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On Q-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 2005. – **30**, №1. – P.49-69.
8. *Рязанов В.И., Салимов Р.Р.* Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Укр. матем. вестник. – 2007. – **4**, №2. – С.199-234.
9. *Рязанов В.И., Севостьянов Е.А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов // Сиб. матем. ж. – 2007. – **48**, №6. – С.1361-1376.
10. *Väisälä J.*, Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings, Lecture Notes in Math. 229. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`brusin2006@rambler.ru`

Получено 15.10.09