Алгебра и анализ
Том 24 (2012), №1

О ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКУ

© Е. А. СЕВОСТЬЯНОВ

Для семейств $\mathfrak{F}$ отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, области $D \subset \mathbb{R}^n$, более общих, чем отображения с ограниченным искажением, установлено свойство равностепенной непрерывности при условии, что расходится некоторый интеграл $\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty$, влияющий на поведение каждого отображения $f \in \mathfrak{F}$, где Φ — некоторая специальная функция, а $\delta_0 > 0$ — фиксированное число. При аналогичных условиях получены результаты об устранении изолированных особенностей для f, кроме того, получены аналоги хорошо известных теорем Сохоцкого–Вейерштрасса и Лиувилля.

§1. Введение

Всюду далее $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$, $\mathbb{B}^n := B(0,1)$, $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, $\mathbb{S}^{n-1} := S(0,1)$, Ω_n означает объем единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$, ω_{n-1} означает площадь сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, m — мера Лебега $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{dist}(A, B)$ — евклидово расстояние между множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $|A|$ означает линейную меру множества $A \subset \mathbb{R}$ всюду, где недоразумение невозможно. Запись $f : D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f, заданное в области D, непрерывно. Как обычно, мы пишем $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$, если все координатные функции $f = (f_1, \ldots, f_n)$ обладают обобщенными частными производными первого порядка, которые локально интегрируемы в D в степени n. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек, и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subset D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.

Ключевые слова: пространственные отображения, вместимость, интегральные ограничения.

В теории пространственных отображений определенное место занимают условия вида
$$\int\limits_D \Phi(Q(x))\ dm(x)\ <\ \infty\,, \tag{1}$$
где $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ и $Q : D \to [0,\infty]$ — некоторые фиксированные измеримые функции. Отметим, что соотношения типа (1) могут возникать в связи с рассмотрением самых различных задач, см., например, источники [1, 2, 6, 8, 13, 14, 18, 20] и [24] по этому поводу. В настоящей работе будут рассматриваться пространственные отображения, которые изучаются в контексте их взаимосвязи с соотношениями вида (1).

Дадим, прежде всего, несколько определений. Здесь и далее *кривой* γ мы называем непрерывное отображение отрезка $[a,b]$ (либо открытого интервала (a,b)) в $\mathbb{R}^n$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Под семейством кривых Γ подразумевается некоторый фиксированный набор кривых γ, а $f(\Gamma) = \{f\circ\gamma | \gamma\in\Gamma\}$. Следующие определения могут быть найдены, например, в [22, §1–6 гл. I]. Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_\gamma \rho(x)\ \ |dx| \geqslant 1$ для всех кривых $\gamma\in\Gamma$. В этом случае мы пишем: $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина
$$M(\Gamma) = \inf_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_D \rho^n(x)\ \ dm(x). \tag{2}$$

Свойства модуля в некоторой мере аналогичны свойствам меры Лебега m в $\mathbb{R}^n$. Именно, модуль пустого семейства кривых равен нулю, $M(\varnothing) = 0$, модуль обладает свойством монотонности относительно семейств кривых Γ_1 и Γ_2 : $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \Rightarrow M(\Gamma_1) \leqslant M(\Gamma_2)$, а также свойством полуаддитивности: $M\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\Gamma_i\Big) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} M(\Gamma_i)$ (см. [22, теорема 6.2]). Напомним, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с ограниченным искажением*, если выполнены следующие условия: 1) $f\in W^{1,n}_{\rm loc}$, 2) якобиан $J(x,f)$ отображения f в точке $x\in D$ сохраняет знак почти всюду в D, 3) $\|f'(x)\|^n \leqslant K\cdot|J(x,f)|$ при почти всех $x\in D$ и некоторой постоянной $K<\infty$, где, как обычно, $\|f'(x)\| := \sup\limits_{h\in\mathbb{R}^n:|h|=1} |f'(x)h|$ (см., например, [16, §3, гл. I] либо [17, определение 2.1, §2, гл. I]). В контексте исследований, проводимых в настоящей работе, немаловажно подчеркнуть, что каждое отображение с ограниченным искажением удовлетворяет неравенству Е. А. Полецкого (см. [15, теорема 1, §4]), а именно, если $f : D \to \mathbb{R}^n$ —

отображение с ограниченным искажением, то

$$M(f(\Gamma)) \leqslant K' \cdot M(\Gamma) \tag{3}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D, где M — конформный модуль семейства кривых, введенный выше (т.е некоторая внешняя мера, определенная на семействах кривых в $\mathbb{R}^n$), а $K' < \infty$ — некоторая постоянная (см. также [17, теорема 8.1, §8, гл. II]). Гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$, либо $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, в зависимости от контекста, будем называть K' — *квазиконформным отображением* в области D, если f удовлетворяет соотношению вида (3) для произвольного семейства Γ кривых γ (см., например, [22, §13, гл. II, теорема 34.3, гл. IV]).

В настоящей статье мы исследуем отображения f, более общие, чем отображения с ограниченным искажением. Точнее, для заданной измеримой по Лебегу функции $Q : D \to [0, \infty]$, определенной в области D в $\mathbb{R}^n$ и принимающей вещественные значения, мы предполагаем вместо (3) выполнение неравенства вида

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S_1,\, S_2,\, A\right)\right)\right) \ \leqslant \int\limits_A Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|)\ dm(x), \tag{4}$$

где

$$A = A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\} \tag{5}$$

означает сферическое кольцо, центрированное в точке x_0 и радиусов: r_1, r_2, $S_i = S(x_0, r_i)$ означает сферу с центром в точке x_0 радиусов r_i, $i = 1, 2$, $\Gamma\left(S_1,\, S_2,\, A\right)$ обозначает семейство всех кривых, соединяющих S_1 и S_2 внутри области A, а вещественнозначная функция $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ в неравенстве (4) предполагается произвольной измеримой и такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\ dr \ \geqslant\ 1\,. \tag{6}$$

В связи с изучением неравенств вида (4) см., например, работы [3, 10, 11, 12] и [20]. Заметим, что при $Q(x) \leqslant K$ п.в. в правой части неравенства (4) возникнет выражение вида $K \cdot M(\Gamma(S_1, S_2, A))$, см. неравенства (4) и (3). Отсюда заключаем, что произвольное отображение с ограниченным искажением всегда удовлетворяет неравенству вида (4) с постоянным значением Q. Правая часть неравенства (4) в общем случае, когда функция $Q(x)$ просто измерима, представляет собой как бы модуль M семейства кривых $\Gamma(S_1, S_2, A)$ с весом $Q(x)$. Случай, когда функция Q в (4) неограничена, преимущественно и будет рассмотрен в настоящей работе. Предположим, что открытое дискретное отображение f удовлетворяет неравенству вида (4) и что для функции $Q(x)$ выполнено условие вида (1), где Φ — некоторая функция такая, что

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \tag{7}$$

при некотором $\delta_0 > 0$. В настоящей работе будут показаны возможность продолжения отображения f в изолированную точку границы области D по непрерывности, а также равностепенная непрерывность семейств таких отображений при условии, что f удовлетворяет неравенству (4), где функция $Q(x)$, в свою очередь, удовлетворяет неравенству (1), а функция Φ в (1) такова, что выполнено соотношение (7). При этом нами также будет показано, что упомянутое выше условие на функцию Φ, а именно соотношение (7), является не только достаточным, но также и необходимым в некотором смысле. Отображение f будет предполагаться здесь открытым и дискретным, функция Q просто измеримой, а функция Φ неубывающей и выпуклой.

Говорят, что отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q-отображением в точке* $x_0 \in D$, если f удовлетворяет (4) для любого кольца $A = A(r_1, r_2, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < r_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, удовлетворяющей (6). Если f в соотношении (4) предполагается гомеоморфизмом, отображение f будем называть *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in D$. Наконец, f будем называть просто *кольцевым Q-отображением* (соответственно *кольцевым Q-гомеоморфизмом*), если соотношения вида (4) выполнены в каждой точке $x_0 \in D$. Аналогично при изучении вопросов, связанных с граничным поведением отображений, может быть дано понятие кольцевого Q-отображения $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, определенного априори в окрестности изолированной точки x_0 границы области $D \setminus \{x_0\}$.

Пусть E — компактное множество в $\overline{\mathbb{R}^n}$, такое что его конформная емкость положительна, $\operatorname{cap} E > 0$. Предположим, что заданы функция $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$, измеримая по Лебегу функция $Q : D \to [0, \infty]$ и число $M > 0$. Обозначим через $\mathfrak{R}_{M,E}^{\Phi,Q}$ семейство всех открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$ таких, что

$$\int\limits_{D} \Phi\left(Q(x)\right) \frac{dm(x)}{\left(1 + |x|^2\right)^n} \leqslant M. \tag{8}$$

Иногда может быть использовано обозначение $\mathfrak{R}_{M,E}^{\Phi,Q}(D)$, чтобы явно указать на область D. Основные результаты настоящей работы содержат в себе следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ *— неубывающая выпуклая функция. Если для некоторого* $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$ *выполнено соотношение вида* (7), *то класс* $\mathfrak{R}^{\Phi,Q}_{M,E}$ *является равностепенно непрерывным и, следовательно, образует нормальное семейство отображений при всех* $M \in (0,\infty)$.

Для измеримой по Лебегу функции $Q : D \to [0,\infty]$ и компактного множества $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, $\operatorname{cap} E > 0$, обозначим через $K^{\Phi,Q}_{M,E}(D \setminus \{x_0\})$ семейство всех открытых дискретных кольцевых Q-отображений в точке x_0 вида $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$, таких что выполнено соотношение (8).

Теорема 2. *Пусть* $Q(x) \geqslant 1$ *почти всюду и* $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ *— неубывающая выпуклая функция,* $x_0 \in D$. *Если для некоторого* $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$ *выполнено соотношение вида* (7), *то произвольное отображение* $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $f \in K^{\Phi,Q}_{M,E}(D \setminus \{x_0\})$, *продолжается по непрерывности в точку* $x_0 \in D$ *до открытого дискретного отображения* $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$.

Теорема 3. *Пусть* $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ *— неубывающая выпуклая функция. Предположим, что для всех множеств* E, *имеющих положительную емкость, всех чисел* $M > 0$ *и всех измеримых функций* $Q : D \to [0,\infty]$ *класс отображений* $\mathfrak{R}^{\Phi,Q}_{M,E}$ *является равностепенно непрерывным (нормальным). Тогда для всех* $\delta_* \in (\tau_0,\infty)$, $\tau_0\ :\ = \Phi(0)$, *выполнено условие*

$$\int\limits_{\delta_*}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty. \tag{9}$$

Теорема 4. *Пусть* $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ *— неубывающая выпуклая функция. Предположим, для всех множеств* E, *имеющих положительную емкость, всех чисел* $M > 0$ *и всех измеримых функций* $Q : D \to [0,\infty]$ *произвольное отображение* $f \in K^{\Phi,Q}_{M,E}(D \setminus \{x_0\})$ *вида* $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $x_0 \in D$, *устранимо по непрерывности в точку* x_0. *Тогда для всех* $\delta_* \in (\tau_0,\infty)$, $\tau_0\ :\ = \Phi(0)$, *выполнено условие* (9).

Замечание 1. Заметим, что условие $\int\limits_D \Phi\left(Q(x)\right) dm(x) \leqslant M$ влечет соотношение (8). Следовательно, (8) является более общим, а соответствующий класс кольцевых Q-отображений представляет собой подкласс семейства $\mathfrak{R}^{\Phi,Q}_{M,E}$. С другой стороны, если область D ограничена, то условие (8) влечет условие $\int\limits_D \Phi\left(Q(x)\right) dm(x) \leqslant M_*$, где $M_* = M\cdot\left(1+\delta_*^2\right)^n$, $\delta_* = \sup\limits_{x\in D}|x|$.

Основные определения и обозначения, использованные выше, четко будут приведены в следующем параграфе.

§2. Предварительные сведения

Конденсатором в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, называем пару $E = (A,\, C)$, где A — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а C — компактное подмножество A. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *абсолютно непрерывным на линиях*, $f \in ACL$, если в любом n-мерном параллелепипеде P с ребрами параллельными осям координат, $\overline{P} \subset D$, все координатные функции $f = (f_1, \ldots, f_n)$ абсолютно непрерывны на почти всех прямых, параллельных осям координат. *Конформной емкостью* (либо просто *емкостью*) конденсатора E называется величина

$$\operatorname{cap} E = \operatorname{cap}\,(A,\, C) = \inf_{u \in W_0(E)} \int\limits_A |\nabla u|^n \ dm(x),$$

где $W_0(E) = W_0\,(A,\, C)$ — семейство неотрицательных непрерывных функций $u : A \to \mathbb{R}$ с компактным носителем в A, таких что $u(x) \geqslant 1$ при $x \in C$ и $u \in ACL$. Говорят, что компакт C в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, имеет *нулевую емкость*, пишут $\operatorname{cap} C = 0$, если $\operatorname{cap}\,(A, C) = 0$ хотя бы для одного ограниченного открытого множества A, содержащего C. В противном случае полагают $\operatorname{cap} C > 0$.

Множества емкости нуль, как известно, всюду разрывны, см., например, следствие 2.5 гл. III в [17], иначе говоря, условие $\operatorname{cap} C = 0$, в частности, влечет, что $\operatorname{Int} C = \varnothing$. Говорят, что произвольное множество A в $\mathbb{R}^n$ имеет емкость нуль, если произвольное его компактное подмножество имеет емкость нуль. Аналогично можно определить понятие конденсатора и множества емкости нуль в $\overline{\mathbb{R}^n}$ (см., например, [17]).

Пусть $(X,\, d)$ и (X',d') — метрические пространства с расстояниями d и d' соответственно. Семейство $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений $f : X \to X'$ называется *нормальным*, если из любой последовательности отображений $f_m \in \mathfrak{F}$ можно выделить подпоследовательность f_{m_k}, которая сходится локально равномерно в X к непрерывной функции $f : X \to X'$. Введенное понятие очень тесно связано со следующим. Семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f : X \to X'$ называется *равностепенно непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $d'\,(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всех x с $d(x, x_0) < \delta$ и для всех $f \in \mathfrak{F}$. Говорят, что $\mathfrak{F}$ *равностепенно непрерывно*, если $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно в каждой точке из X. Если $(X,\, d)$ — сепарабельное метрическое пространство, а $(X',\, d')$ — компактное метрическое пространство, то семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f : X \to X'$ нормально тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно. Это версия хорошо известной теоремы Арцела–Асколи (см., например, [22, §20.4]).

Напомним, что изолированная точка x_0 границы ∂D области D называется *устранимой* для отображения f, если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Изолированная точка x_0 границы ∂D называется *существенной особой точкой* отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, если при $x \to x_0$ нет ни конечного, ни бесконечного предела.

Предположим, отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, имеет частные производные при почти всех $x \in D$. Тогда *внутренней дилатацией* отображения f в точке $x \in D$ называется величина

$$K_I(x,f) = \frac{|J(x,f)|}{l\,(f'(x))^n},$$

если $J(x,f) \neq 0$, $K_I(x,f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_I(x,f) = \infty$ — в остальных точках, где $l\,(f'(x)) = \inf\limits_{h\in\mathbb{R}^n:|h|=1} |f'(x)h|$. В дальнейшем нам понадобится следующее

Предложение 1. *Произвольный гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $f \in W^{1,n}_{\rm loc}$, при $K_I(x,f) \in L^1_{\rm loc}$ является кольцевым Q-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in D$ при $Q = K_I(x,f)$, см., например,* [11, теоремы 8.1 и 8.6]. *Более того, f будет кольцевым Q-отображением в произвольной изолированной точке границы D, см. там же.*

При вычислении внутренних дилатаций в некоторых отдельных случаях удобно использовать величины, введенные нами ниже. Предположим, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ дифференцируемо в точке $x_0 \in D$ и матрица Якоби $f'(x_0)$ невырождена, $J(x_0,f) = \det f'(x_0) \neq 0$. Тогда найдутся системы векторов $e_1,\ldots,e_n$ и $\widetilde{e_1},\ldots,\widetilde{e_n}$ и положительные числа $\lambda_1(x_0),\ldots,\lambda_n(x_0)$, $\lambda_1(x_0) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(x_0)$ такие, что $f'(x_0)e_i = \lambda_i(x_0)\widetilde{e_i}$, см. теорему 2.1 гл. I в [16], при этом $\lambda_1^2(x_0),\ldots,\lambda_n^2(x_0)$ являются собственными значения симметрического отображения $(f'(x_0))^*\,f'(x_0)$, см. теорему 2.2 гл. I в [16],

$$|J(x_0,f)| = \lambda_1(x_0)\ldots\lambda_n(x_0), \quad \|f'(x_0)\| = \lambda_n(x_0), \quad l\left(f'(x_0)\right) = \lambda_1(x_0),$$

$$K_I(x_0,f) = \frac{\lambda_1(x_0)\ldots\lambda_n(x_0)}{\lambda_1^n(x_0)}\,, \tag{10}$$

см. соотношение (2.5) и дополнительные комментарии на с. 21 §2.1 гл. I в [16]. Числа $\lambda_1(x_0),\ldots\lambda_n(x_0)$, упомянутые выше, называются *главными значениями*, а векторы $e_1,\ldots,e_n$ и $\widetilde{e_1},\ldots,\widetilde{e_n}$ — *главными векторами* отображения $f'(x_0)$, по этому поводу см. соответствующий комментарий в §2.1 гл. I в [16] после доказательства теоремы 2.2 там же. Разумеется, главные векторы и главные значения зависят как от точки x_0, так и от отображения f, однако с целью упрощения записи мы здесь и в дальнейшем опускаем „(x_0)“, если недоразумение невозможно.

Напомним, что *сферическая (хордальная) метрика* $h(x,y)$ равна $|\pi(x)-\pi(y)|$, где π — стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1},\frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, т.е. в явном виде

$$h(x,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}},\quad h(x,y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}},\ x\ne\infty\ne y.$$

Пусть $Q:D\to[0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция, тогда $q_{x_0}(r)$ означает среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $|x-x_0|=r$,

$$q_{x_0}(r):=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{|x-x_0|=r}Q(x)\,dS\,, \tag{11}$$

где dS — элемент площади поверхности S. Ниже мы придерживаемся следующих стандартных соглашений: $a/\infty=0$ для $a\ne\infty$, $a/0=\infty$ для $a>0$ и $0\cdot\infty=0$.

Следующие результаты сформулированы и доказаны в работе [25].

Предложение 2. *Пусть $Q:\mathbb{B}^n\to[1,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $f:\mathbb{B}^n\setminus\{0\}\to\overline{\mathbb{R}^n}$, $n\geqslant 2$, — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0=0$, удовлетворяющее условию* $\mathrm{cap}(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(\mathbb{B}^n\setminus\{0\}))>0$. *Предположим, что существует $\varepsilon_0>0$, $\varepsilon_0<1$ такое, что*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0}\frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}=\infty. \tag{12}$$

Тогда f имеет непрерывное продолжение $f:\mathbb{B}^n\to\overline{\mathbb{R}^n}$ в $\mathbb{B}^n$. Непрерывность понимается в смысле пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$ относительно хордальной метрики h. Более того, продолженное отображение $f:\mathbb{B}^n\to\overline{\mathbb{R}^n}$ является открытым и дискретным, см. теорему 6 *в* [25].

Здесь и ниже равностепенная непрерывность, нормальность и т.д. понимаются относительно сферической (хордальной) метрики h.

Предложение 3. *Пусть $x_0\in D$, $E\subset\overline{\mathbb{R}^n}$ — компактное множество положительной емкости, $\mathfrak{F}_Q$ — семейство открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f:D\to\overline{\mathbb{R}^n}\setminus E$ в точке x_0. Предположим, что найдется число $\varepsilon_0<\mathrm{dist}\,(x_0,\partial D)$ такое, что выполнено условие* (12). *Тогда семейство $\mathfrak{F}_Q$ равностепенно непрерывно, а следовательно, и нормально в точке x_0.*

Напомним, что функция $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ называется *выпуклой,* если

$$\Phi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \ \leqslant \ \lambda\, \Phi(t_1) \ + \ (1-\lambda)\, \Phi(t_2)$$

при всех $t_1, t_2 \in [0,\infty]$ и $\lambda \in [0,1]$. *Обратная функция* Φ^{-1} может быть корректно определена для любой неубывающей функции $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$:

$$\Phi^{-1}(\tau) = \inf_{\Phi(t)\geqslant\tau} t. \tag{13}$$

Как обычно, inf в (13) равен ∞, если множество $t \in [0,\infty]$ таких, что $\Phi(t) \geqslant \tau$, пусто. Заметим, что функция Φ^{-1} также является неубывающей.

Замечание 2. Из определения очевидно, что

$$\Phi^{-1}(\Phi(t)) \leqslant t \quad \forall\ t \in [0,\infty] \tag{14}$$

с равенством в (14), исключая интервалы постоянства функции $\Phi(t)$.

Следующее утверждение см., например, [19, теорема 2.1]. Здесь, в (15) и (16), мы дополняем определения интегралов символом ∞ при $\Phi_p(t) = \infty$ соответственно, если при некотором $T \in \mathbb{R}$, $H_p(t) = \infty$ для всех $t \geqslant T \in [0,\infty)$. Интеграл в (16) понимается в смысле Лебега–Стильтьеса, а интегралы в (15) и (17)–(20) — как обычные интегралы Лебега.

Предложение 4. *Пусть* $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ *— неубывающая функция. Полагаем* $H_p(t) = \log \Phi_p(t)$, $\Phi_p(t) = \Phi(t^p)$, $p \in (0,\infty)$. *Тогда равенство*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} H_p'(t)\ \frac{dt}{t} = \infty \tag{15}$$

влечет

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{dH_p(t)}{t} = \infty, \tag{16}$$

(16) *эквивалентно соотношению*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} H_p(t)\ \frac{dt}{t^2} = \infty \tag{17}$$

для некоторого $\delta > 0$, *а* (17) *эквивалентно каждому из равенств*

$$\int\limits_{0}^{\Delta} H_p\left(\frac{1}{t}\right)\ dt = \infty \tag{18}$$

при некотором $\Delta > 0$,

$$\int\limits_{\delta_*}^{\infty} \frac{d\eta}{H_p^{-1}(\eta)} = \infty \tag{19}$$

при некотором $\delta_* > H(+0)$,

$$\int\limits_{\delta_*}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi_p^{-1}(\tau)} = \infty \tag{20}$$

при некотором $\delta_* > \Phi(+0)$.

Более того, (15) *эквивалентно соотношению* (16) *и, следовательно,* (15)–(20) *эквивалентны друг другу при дополнительном условии, что* Φ *абсолютно непрерывна. В частности, все условия* (15)–(20) *эквивалентны друг другу при условии, что функция* Φ *является выпуклой и неубывающей.*

Легко видеть, что условия (15)–(20) являются более слабыми при больших p, см., например, (17). Необходимо дать еще одно пояснение. В правых частях условий (15)–(20) подразумевается символ $+\infty$. При $\Phi_p(t) = 0$ для $t \in [0, t_*]$, $H_p(t) = -\infty$ для $t \in [0, t_*]$, и мы полагаем $H_p'(t) := 0$ для $t \in [0, t_*]$. Заметим, что условия (16) и (17) исключают случай, когда t_* принадлежит интервалу интегрирования в указанных выше соотношениях. В противном случае, левые части в (16) и (17) либо одновременно равны $-\infty$, либо не определены. Следовательно, мы можем предполагать в (15)–(17), что $\delta > t_0$ и соответственно $\Delta < 1/t_0$, где $t_0 : = \sup\limits_{\Phi_p(t)=0} t$, $t_0 = 0$, если $\Phi_p(0) > 0$.

§3. Основная лемма

Следующее утверждение является обобщением и усилением леммы 3.1 из [19].

Лемма 1. *Пусть* $Q : \mathbb{B}^n \to [0, \infty]$ *— измеримая функция и* $\Phi : [0, \infty] \to (0, \infty]$ *— неубывающая выпуклая функция. Тогда*

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dr}{r q_0^{\frac{1}{p}}(r)} \geqslant \frac{1}{n} \int\limits_{eM(\varepsilon)}^{\frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^n}} \frac{d\tau}{\tau \left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{p}}} \quad \forall\ p \in (0, \infty), \quad \varepsilon \in (0, 1), \tag{21}$$

где $q_0(r)$ *определено соотношением* (11) *при* $x_0 = 0$, *а*

$$M(\varepsilon) = \frac{1}{\Omega_n\,(1-\varepsilon^n)} \int\limits_{A(\varepsilon,1,0)} \Phi(Q(x))\ dm(x) \tag{22}$$

— среднее интегральное значение функции $\Phi \circ Q$ *в кольце* $A(\varepsilon, 1, 0)$, *определенном в соотношении* (5) *при* $x_0 = 0$, $r_1 = \varepsilon$ *и* $r_2 = 1$.

Замечание 3. Отметим, что при каждом $p \in (0, \infty)$ соотношение (21) эквивалентно неравенству

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dr}{r q_0^{\frac{1}{p}}(r)} \geqslant \frac{1}{n} \int\limits_{eM(\varepsilon)}^{\frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^n}} \frac{d\tau}{\tau \Phi_p^{-1}(\tau)}, \quad \Phi_p(t) := \Phi(t^p). \tag{23}$$

Доказательство леммы 1.
1 шаг. Обозначим

$$t_* = \sup\limits_{\Phi_p(t)=\tau_0} t, \quad \tau_0 = \Phi(0) > 0. \tag{24}$$

Полагая $H_p(t)\ :\ = \log \Phi_p(t)$, мы видим, что

$$H_p^{-1}(\eta) = \Phi_p^{-1}(e^\eta), \quad \Phi_p^{-1}(\tau) = H_p^{-1}(\log \tau). \tag{25}$$

Следовательно, учитывая замечание 2 и обозначая

$$h(r)\colon\ = r^n \Phi\,(q_0(r)) = r^n \Phi_p\left(q_0^{\frac{1}{p}}(r)\right), \quad R_* = \{\ r \in (\varepsilon, 1)\ :\ q_0^{\frac{1}{p}}(r)\ >\ t_*\},$$

мы получаем, что

$$q_0^{\frac{1}{p}}(r) = H_p^{-1}\Big(\log \frac{h(r)}{r^n}\Big) = H_p^{-1}\Big(n \log \frac{1}{r} + \log\ h(r)\Big) \quad \forall\ r \in R_*.$$

Тогда также

$$q_0^{\frac{1}{p}}(e^{-s}) = H_p^{-1}\left(ns + \log h(e^{-s})\right) \quad \forall\ s \in S_*, \tag{26}$$

где

$$S_* = \Big\{s \in \Big(0, \log \frac{1}{\varepsilon}\Big)\ :\ q_0^{\frac{1}{p}}\ \left(e^{-s}\right) > t_*\Big\}. \tag{27}$$

2 шаг. В силу неравенства Иенсена и выпуклости функции Φ мы имеем, что

$$\int\limits_0^{\log\frac{1}{\varepsilon}} h(e^{-s})\ ds=\int\limits_{\varepsilon}^{1} h(r)\frac{dr}{r}=\int\limits_{\varepsilon}^{1}\Phi(q_0(r))\ r^{n-1}dr$$
$$\leqslant\int\limits_{\varepsilon}^{1}\left(\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{S(0,r)}\Phi(Q(x))\ dS\right)r^{n-1}dr\leqslant\frac{\Omega_n}{\omega_{n-1}}\cdot M(\varepsilon)=\frac{1}{n}\cdot M(\varepsilon), \tag{28}$$

где $M(\varepsilon)$ определено соотношением (22), а dS, как и раньше, обозначает элемент площади поверхности, по которой ведется интегрирование. Тогда из соотношения (28) вытекает, что линейная мера Лебега $|T|$ множества $T=\{\ s\in(0,\log\frac{1}{\varepsilon}):\ h(e^{-s})>M(\varepsilon)\}$ удовлетворяет условию

$$|T|=\int\limits_T ds\leqslant\frac{1}{n}. \tag{29}$$

3 шаг. Покажем, что

$$q_0^{\frac{1}{p}}\left(e^{-s}\right)\leqslant H_p^{-1}\left(ns+\log\ M(\varepsilon)\right)\quad\forall\ s\in\left(0,\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\setminus T_*\,, \tag{30}$$

где $T_*:=\ T\cap S_*$, а множество S_* определено в соотношении (27). Заметим, что

$$\left(0,\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\setminus T_*=\left[\left(0,\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\setminus S_*\right]\cup\left[\left(0,\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\setminus T\right]$$
$$=\left[\left(0,\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\setminus S_*\right]\cup\left[S_*\setminus T\right].$$

Заметим также, что неравенство (30) имеет место для $s\in S_*\setminus T$ ввиду (26) и неубывания функции H_p^{-1}. Заметим также, см. (24), что при некотором достаточно малом $\varepsilon_1>0$

$$e^{ns}M(\varepsilon)>\Phi(0)+\varepsilon_1=\tau_0+\varepsilon_1\quad\forall\ s\in\left(0,\ \log\frac{1}{\varepsilon}\right), \tag{31}$$

а тогда по (25) и (31) ввиду строгого возрастания функции $H_p^{-1}(\eta)$ при $\eta>\tau_0$ получим

$$t_*<\Phi_p^{-1}\left(e^{ns}M(\varepsilon)\right)=H_p^{-1}\left(ns+\log M(\varepsilon)\right)\quad\forall\ s\in\left(0,\ \log\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{32}$$

Из соотношения (32) следует, что (30) имеет место также и для $s \in (0, \log\frac{1}{\varepsilon}) \setminus S_*$, а тем самым и для всех $s \in \left(0, \log\frac{1}{\varepsilon}\right) \setminus T_*$.

4 шаг. Поскольку функция H_p^{-1} не убывает, ввиду (29) и (30) получаем, что

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dr}{r q_0^{\frac{1}{p}}(r)} = \int\limits_{0}^{\log\frac{1}{\varepsilon}} \frac{ds}{q_0^{\frac{1}{p}}(e^{-s})} \geqslant \int\limits_{\left(0,\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\setminus T_*} \frac{ds}{H_p^{-1}(ns+\log M(\varepsilon))}$$

$$\geqslant \int\limits_{|T_*|}^{\log\frac{1}{\varepsilon}} \frac{ds}{H_p^{-1}(ns+\log M(\varepsilon))} \geqslant \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\log\frac{1}{\varepsilon}} \frac{ds}{H_p^{-1}(ns+\log M(\varepsilon))} \tag{33}$$

$$= \frac{1}{n} \int\limits_{1+\log M(\varepsilon)}^{n\log\frac{1}{\varepsilon}+\log M(\varepsilon)} \frac{d\eta}{H_p^{-1}(\eta)}.$$

Заметим, что $1 + \log M(\varepsilon) = \log\ eM(\varepsilon)$. Таким образом, из (33) имеем $\int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dr}{r q_0^{\frac{1}{p}}(r)} \geqslant \frac{1}{n} \int\limits_{\log eM(\varepsilon)}^{\log\frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^n}} \frac{d\eta}{H_p^{-1}(\eta)}$, и после замены переменной $\eta = \log\tau$, с учетом соотношений в (25), получаем неравенство (23), а следовательно, и (21). $\Box$

Теорема 5. *Пусть $Q : \mathbb{B}^n \to [0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция такая, что*

$$\int\limits_{\mathbb{B}^n} \Phi(Q(x))\ dm(x)\ <\ \infty, \tag{34}$$

где $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ — неубывающая выпуклая функция, для которой

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{p}}} = \infty, \quad p \in (0,\infty), \tag{35}$$

при некотором $\delta_0 > \tau_0\ :\ = \Phi(0)$. Тогда

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dr}{r q_0^{\frac{1}{p}}(r)} = \infty. \tag{36}$$

Замечание 4. Заметим, что в теореме 5 мы предполагаем более общий случай относительно функции Φ, а именно когда Φ может принимать также и значение 0. Действительно, указанный выше случай сводится к ситуации $\Phi : [0,\infty] \to (0,\infty]$ при помощи рассмотрения вспомогательной функции

$$\Phi_*(t) = \begin{cases} \Phi(t), & \Phi(t) > \delta, \\ \delta, & \Phi(t) \leqslant \delta, \end{cases}$$

где δ — произвольное число, $\delta \in (0,\delta_0)$. Заметим, что функция $\Phi_*(t)$ попрежнему удовлетворяет соотношениям (34) и (35).

Замечание 5. Так как $\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{p}} = \Phi_p^{-1}(\tau)$, где $\Phi_p(t) = \Phi(t^p)$, соотношение (35) влечет, что

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi_p^{-1}(\tau)} = \infty \quad \forall\, \delta \in [0,\infty). \tag{37}$$

С другой стороны, соотношение вида (37), выполненное при некотором $\delta \in [0,\infty)$, вообще говоря, не влечет (35).

Более подробно соотношение вида (35), выполненное при некотором $\delta_0 > \tau_0$, очевидно, влечет условие (37) для $\delta \in [0,\delta_0)$, а для $\delta \in (\delta_0,\infty)$ имеем, что

$$0 \leqslant \int\limits_{\delta_0}^{\delta} \frac{d\tau}{\tau \Phi_p^{-1}(\tau)} \leqslant \frac{1}{\Phi_p^{-1}(\delta_0)} \log \frac{\delta}{\delta_0} < \infty, \tag{38}$$

поскольку функция Φ_p^{-1} не убывает и $\Phi_p^{-1}(\delta_0) > 0$. Следовательно, соотношение вида (37) будет выполнено для всех $\delta \in [0,\infty)$.

С другой стороны, по определению обратной функции, $\Phi_p^{-1}(\tau) \equiv 0$ для всех $\tau \in [0,\tau_0]$, где $\tau_0 = \Phi_p(0)$, следовательно, условие (37) при $\delta \in [0,\tau_0)$, вообще говоря, не влечет (35). Если $\tau_0 > 0$, то

$$\int\limits_{\delta}^{\tau_0} \frac{d\tau}{\tau \Phi_p^{-1}(\tau)} = \infty \quad \forall\, \delta \in [0,\tau_0). \tag{39}$$

Однако соотношение (39) не несет никакой информации собственно о функции $Q(x)$, и, следовательно, условие (37) при $\delta < \Phi(0)$ ни в каком случае не может влечь (36).

В силу соотношения (37) *доказательство теоремы* 5 сводится к утверждению леммы 1.

§4. Достаточные условия равностепенной непрерывности

Доказательство теоремы 1. Без ограничения общности можно считать, что $\Phi(0) > 0$. Ввиду предложения 3 достаточно показать, что условия теоремы 1 влекут выполнение соотношения вида (12) при каждом $x_0 \in D$ и некотором $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Делая замену $t = r/\varepsilon_0$, получаем

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} = \int\limits_{\varepsilon/\varepsilon_0}^{1} \frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t\varepsilon_0)} = \int\limits_{\varepsilon/\varepsilon_0}^{1} \frac{dt}{t \widetilde{q}_0^{\frac{1}{n-1}}(t)}\,, \tag{40}$$

где $\widetilde{q}_0(t)$ — среднее интегральное значение функции $\widetilde{Q}(x) := Q(\varepsilon_0 x + x_0)$ над сферой $|x| = t$, которое определено в соотношении (11). Применяя теперь лемму 1 при $p = n-1$, получаем

$$\int\limits_{\varepsilon/\varepsilon_0}^{1} \frac{dt}{t \widetilde{q}_0^{\frac{1}{n-1}}(t)} \geqslant \frac{1}{n} \int\limits_{eM_*(\varepsilon/\varepsilon_0)}^{\frac{M_*(\varepsilon/\varepsilon_0)\varepsilon_0^n}{\varepsilon^n}} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}}\,, \tag{41}$$

$$\begin{aligned} M_*\left(\varepsilon/\varepsilon_0\right) &= \frac{1}{\Omega_n\left(1 - (\varepsilon/\varepsilon_0)^n\right)} \int\limits_{A(\varepsilon/\varepsilon_0, 1, 0)} \Phi\left(Q(\varepsilon_0 x + x_0)\right) dm(x) \\ &= \frac{1}{\Omega_n\left(\varepsilon_0^n - \varepsilon^n\right)} \int\limits_{A(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)} \Phi\left(Q(x)\right) dm(x). \end{aligned} \tag{42}$$

Заметим, что при всех $x \in A(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)$ выполнено $|x| \leqslant |x - x_0| + |x_0| \leqslant \varepsilon_0 + |x_0|$, поэтому из (42) следует, что

$$M_*\left(\varepsilon/\varepsilon_0\right) \leqslant \frac{\beta_n(x_0)}{\Omega_n\left(\varepsilon_0^n - \varepsilon^n\right)} \int\limits_{A(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)} \Phi(Q(x)) \frac{dm(x)}{(1 + |x|^2)^n},$$

где $\beta_n(x_0) = \left(1 + (\varepsilon + |x_0|)^2\right)^n$. Следовательно, при $\varepsilon \leqslant 1/\sqrt[n]{\varepsilon_0^n - 1/2}$

$$M_*\left(\varepsilon/\varepsilon_0\right) \leqslant \frac{2\beta_n(x_0)}{\Omega_n} M,$$

где M — постоянная в правой части соотношения (8). Кроме того, заметим, что

$$M_*\left(\varepsilon/\varepsilon_0\right) > \Phi(0) > 0.$$

Тогда из соотношений (40) и (41) получаем

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} \geqslant \frac{1}{n} \int\limits_{\frac{2e\beta_n(x_0)M}{\Omega_n}}^{\frac{\Phi(0)\varepsilon_0^n}{\varepsilon^n}} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}}\,.$$

Однако правая часть последнего соотношения стремится к бесконечности в силу соотношения (7), откуда следует, что $\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} = \infty$. Нужное заключение следует теперь из предложения 3. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Каждое из условий* (15)–(20) *при* $p \in (0, n-1]$ *влечет равностепенную непрерывность и нормальность класса* $\mathfrak{R}_{M,E}^{\Phi,Q}$ *для всех* $M \in (0,\infty)$.

§5. Достаточные условия, обеспечивающие устранение особенностей отображений

Доказательство теоремы 2 вполне аналогично доказательству теоремы 1, а именно опирается на установление расходимости интеграла $\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}$, а потом на предложение 2. □

Для отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$ множества $E \subset D$ и точки $y \in \mathbb{R}^n$ определим *функцию кратности* $N(y, f, E)$ как число прообразов y во множестве E, т.е.

$$N(y,f,E) = \mathrm{card}\,\{x \in E : f(x) = y\}\,.$$

Следствие 2 (теорема типа Сохоцкого–Вейерштрасса). *Пусть* $\Phi:[0,\infty] \to [0,\infty]$ *— неубывающая выпуклая функция. Предположим, что для некоторого* $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$ *выполнено условие вида* (7) *и что открытое дискретное* Q*-отображение* $f : D\setminus\{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *имеет существенно особую точку* $x_0 \in D$. *Пусть функция* Q *удовлетворяет условию вида* (8) *в области* D *и, кроме того,* $Q(x) \geqslant 1$ *почти всюду. Тогда существует множество* $C \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ *типа* F_σ *в* $\overline{\mathbb{R}^n}$ *емкости нуль такое, что*

$$N\left(y, f, U\setminus\{x_0\}\right) = \infty$$

для любой окрестности U *точки* x_0 *и для всех* $y \in \overline{\mathbb{R}^n}\setminus C$.

Доказательство. Пусть U — произвольная окрестность точки x_0. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x_0 = 0$ и $U = \mathbb{B}^n$.

Рассмотрим множества $V_k = B(0,1/k)\setminus\{0\}$, $k=1,2,\ldots$ Полагаем

$$C=\bigcup_{k=1}^{\infty}\ \overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(V_k)\,. \tag{43}$$

По теореме 2 каждое из множеств $B_k:=\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(V_k)$ в объединении правой части соотношения (43) имеет емкость нуль. Тогда C также имеет емкость нуль, см., например, [7, с. 126]. Фиксируем $y\in\overline{\mathbb{R}^n}\setminus C$. Тогда

$$y\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\ f(V_k)\,. \tag{44}$$

Из (44) вытекает существование последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ такой, что $x_i\to 0$ при $i\to\infty$ и $f(x_i)=y$, $i=1,2,\ldots$. Следствие 2 доказано. $\Box$

Следствие 3 (теорема типа Лиувилля). *Пусть $\Phi:[0,\infty]\to[0,\infty]$ — неубывающая выпуклая функция. Предположим, что для некоторого $\delta_0>\tau_0:=\Phi(0)$ выполнено условие вида (7) и что $f:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное Q-отображение в точке $x_0=\infty$, т.е. отображение $\widetilde{f}:=f\circ\varphi$, где $\varphi(x)=\frac{x}{|x|^2}$, является кольцевым $Q'(x)$-отображением в нуле, где $Q'(x)=Q\big(\frac{x}{|x|^2}\big)$. Предположим, что функция Q удовлетворяет условию вида (8) в области $D=\mathbb{R}^n$ и, кроме того, $Q(x)\geqslant 1$ почти всюду. Тогда $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(\mathbb{R}^n)\right)=0$. В частности, f не может отображать все $\mathbb{R}^n$ на ограниченную область.*

Доказательство. Предположим противное, а именно что

$$\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(\mathbb{R}^n)\right)>0.$$

Тогда для вспомогательного отображения $\widetilde{f}=f\big(\frac{x}{|x|^2}\big)$, $\widetilde{f}:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\overline{\mathbb{R}^n}$, имеем $\widetilde{f}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})=f(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, поэтому

$$\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus\widetilde{f}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\right)=\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\right)\geqslant\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(\mathbb{R}^n)\right)>0.$$

Кроме того, заметим, что отображение $\varphi(x)=\frac{x}{|x|^2}$ подобно отображает сферу $S(0,r)$ на сферу $S(0,1/r)$, откуда следует, что $|J(x,\psi)|=(1/|x|)^{2n}$. Согласно сказанному, прибегая к замене переменной в интеграле и из (8), будем иметь

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q'(x)\frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n}=\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n}=\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q(y)\cdot\frac{1}{|y|^{2n}}\cdot\frac{dm(y)}{\left(1+\frac{1}{|y|^2}\right)^n}$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q(y)\,\frac{dm(y)}{(1+|y|^2)^n}\leqslant M.$$

В таком случае, в силу теоремы 2, отображение $\widetilde{f}$ продолжается по непрерывности до открытого дискретного отображения $\overline{\widetilde{f}} : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$. Это равносильно тому, что f также продолжается по непрерывности до открытого дискретного отображения $\overline{f} : \overline{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}^n}$. В таком случае множество $\overline{f}\left(\overline{\mathbb{R}^n}\right)$ одновременно открыто и замкнуто в $\overline{\mathbb{R}^n}$, откуда следует, что $\overline{f}(\overline{\mathbb{R}^n}) = \overline{\mathbb{R}^n}$. Однако последнее противоречит сделанному выше предположению, что $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus \overline{f}\left(\mathbb{R}^n\right)\right) > 0$. $\square$

§6. О точках ветвления отображений с интегральными ограничениями на характеристику

Напомним, что $y_0 \in D$ — *точка ветвления* отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, если ни в одной окрестности U точки y_0 сужение отображения $f|_U$ не является гомеоморфизмом. Совокупность всех точек ветвления f принято обозначать B_f. Будем говорить, что точка $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ является *асимптотическим пределом* отображения $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в точке $b \in \partial D$, если найдется кривая $\alpha : [0, 1) \to D$, $\alpha(t) \to b$ при $t \to 1$ такая, что $f(\alpha(t)) \to z_0$ при $t \to 1$, см. §2 гл. VII в [17]. Грубо говоря, отображение f, заданное в области D, имеет своим асимптотическим пределом величину $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ в некоторой точке b границы D, если существует кривая, лежащая в D и стремящаяся к b, вдоль которой отображение f стремится к z_0. Настоящая секция представляет собой некоторое количество следствий из следующего утверждения, доказанного автором ранее, см. теорему 1 в работе [26].

Предложение 5. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, — открытое дискретное отображение, удовлетворяющее соотношению* (4) *в точке x_0 для любой измеримой функции η, удовлетворяющей* (6) *и некоторой измеримой функции $Q(x)$, $Q : D \to [1, \infty]$, x_0 — существенно особая точка f. Предположим, что при некотором $\delta(x_0) > 0$, $\delta(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ выполнено условие вида* (12). *Тогда*

I. *Если $n \geqslant 3$ и точка $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ является асимптотическим пределом f в точке x_0, то для любой окрестности $U \subset D$, содержащей точку x_0, выполнено $z_0 \in \overline{f(B_f \cap U)}$.*

II. *Каждая точка множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(D \setminus \{x_0\}\right)$ является асимптотическим пределом f в точке x_0.*

III. *Если $n \geqslant 3$, то имеет место включение $\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(D \setminus \{x_0\}\right)\right) \subset \overline{f(B_f)}$.*

IV. *Если $n \geqslant 3$ и $\infty \notin f\left(D \setminus \{x_0\}\right)$, то*

a) *множество $f(B_f)$ неограничено в $\mathbb{R}^n$,*

b) *$x_0 \in \overline{B_f}$.*

Справедлива следующая

Теорема 6. *Пусть* $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ *— неубывающая выпуклая функция. Предположим, что для некоторого* $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$ *выполнено условие вида* (7) *и что открытое дискретное* Q*-отображение* $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *имеет существенно особую точку* $x_0 \in D$. *Пусть функция* Q *удовлетворяет условию вида* (8) *в области* D *и, кроме того,* $Q(x) \geqslant 1$ *почти всюду. Тогда выполнено каждое из заключений* I–IV *предложения* 5.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, вначале мы устанавливаем расходимость интеграла $\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}$ в (12), затем на основании предложения 5 получаем требуемое заключение. □

Следствие 4. *Пусть* $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ *— неубывающая выпуклая функция. Предположим, что для некоторого* $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$ *выполнено условие вида* (7), *что* Q*-отображение* $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *является локальным гомеоморфизмом в области* $D \setminus \{x_0\}$, *что функция* Q *удовлетворяет условию вида* (8) *в* D *и, кроме того,* $Q(x) \geqslant 1$ *почти всюду. Тогда* f *продолжается до локального гомеоморфизма* $\overline{f} : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$.

Доказательство следствия 4 легко вытекает из теоремы 6. Возможность непрерывного продолжения f в точку x_0 следует из условия $B_f = \varnothing$. Остается показать, что продолженное отображение $\overline{f} : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является гомеоморфизмом в некотором шаре $B(x_0, \varepsilon_1)$. Предположим противное, тогда $x_0 \in B_{\overline{f}}$. С другой стороны, для произвольного открытого дискретного отображения $g : G \to \overline{\mathbb{R}^n}$ области $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, хаусдорфова размерность $\dim_H g(B_g) \geqslant n - 2$, см., например, предложение 5.3 гл. III в [17]. В нашем случае это означало бы, что в области D, по крайней мере, были бы еще какие-то точки множества $B_{\overline{f}}$, кроме точки x_0, что противоречит сделанному предположению о локальной гомеоморфности f в $D \setminus \{x_0\}$. □

§7. Необходимые условия равностепенной непрерывности и устранения особенностей

Перед доказательством теоремы 3 сделаем следующее

Замечание 6. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что в определении класса $\mathfrak{R}_{M,E}^{\Phi,Q}$, в формулировке теоремы 3, измеримая функция $Q(x)$, связанная с Φ соотношением (8), больше либо равна 1.

Заметим также, что функция $\Phi(t)$ в теореме 3 не может быть постоянной, ибо в противном случае никаких ограничений на Q в указанной выше теореме не возникает. Исключение составляет только лишь условие $\Phi(t)\equiv\infty$, когда соответствующий класс $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,E}$ пуст. Более того, согласно известному критерию выпуклости, см., например, предложение 5 в I.4.3 в [4], наклонение $\left[\Phi(t)-\Phi(0)\right]/t$ является неубывающей функцией. Поэтому *доказательство теоремы* 3 *сводится к следующему утверждению.*

Лемма 2. *Пусть функция* $\Phi:[0,\infty]\to[0,\infty]$ *не убывает и*

$$\Phi(t)\ \geqslant\ C\cdot t^{\frac{1}{n-1}}\quad\forall\, t\in[T,\infty]\tag{45}$$

для некоторых $C>0$ *и* $T\in(0,\infty)$. *Если класс* $\mathfrak{R}^{\Phi,Q}_{M,E}$ *является равностепенно непрерывным (нормальным) для всех* $M\in(0,\infty)$, *всех множеств* E *положительной емкости и всех измеримых по Лебегу функций* Q, *то* (9) *имеет место при всех* $\delta_*\in(\tau_0,\infty)$, *где* $\tau_0\ :\ =\Phi(+0)$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $D=\mathbb{B}^n$. Предположим противное, а именно, что соотношение (9) не выполнено, т.е.

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau\Phi^{-1}_{n-1}(\tau)}<\infty\tag{46}$$

для некоторого $\delta_0\in(\tau_0,\infty)$, где $\Phi_{n-1}(t)\ :\ =\ \Phi(t^{n-1})$. Тогда также

$$\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau\Phi^{-1}_{n-1}(\tau)}<\infty\quad\forall\ \delta\in(\tau_0,\infty),\tag{47}$$

поскольку $\Phi^{-1}(\tau)>0$ для всех $\tau>\tau_0$, и функция $\Phi^{-1}(\tau)$ не убывает. Заметим, что по условию (45) выполняется неравенство $\Phi_{n-1}(t)\geqslant C\cdot t,\quad\forall\quad t\geqslant T$, и при некоторых $C>0$ и $T\in(1,\infty)$. Более того, применяя линейное преобразование $\alpha\Phi+\beta$, где $\alpha=1/C$ и $\beta=T$, см., например, (17), мы можем считать, что

$$\Phi_{n-1}(t)\geqslant t\quad\forall\ t\in[0,\infty).\tag{48}$$

Конечно же, мы можем также предполагать, что $\Phi(t)=t$ при всех $t\in[0,1)$, поскольку значения функции Φ на полуинтервале $[0,1)$ не несут в себе информации относительно $Q(x)\geqslant1$ в (8). Ясно, что соотношение (47) влечет условие $\Phi(t)<\infty$ при всех $t<\infty$, см. критерий (17), см. также (20). Теперь заметим, что функция $\Psi(t)\colon\ =t\Phi_{n-1}(t)$ строго возрастает, $\Psi(1)=\Phi(1)$ и $\Psi(t)\to\infty$ при $t\to\infty$. Поэтому функциональное уравнение

$$\Psi(K(r))=\left(\frac{\gamma}{r}\right)^2\quad\forall\ r\in(0,1],\tag{49}$$

где $\gamma = \Phi^{1/2}(1) \geqslant 1$, разрешимо с $K(1) = 1$ и строго убывающей непрерывной функцией $K(r)$ такой, что $K(r) < \infty$, $r \in (0,1]$, и $K(r) \to \infty$ при $r \to 0$. Взяв логарифм в (49), имеем, что $\log\ K(r) + \log\ \Phi_{n-1}(K(r)) = 2\ \log\ \frac{\gamma}{r}$, и ввиду (48) получаем, что $\log\ K(r) \leqslant \log \frac{\gamma}{r}$, т.е.

$$K(r) \leqslant \frac{\gamma}{r}. \tag{50}$$

Тогда в силу (49), $\Phi_{n-1}(K(r)) \geqslant \frac{\gamma}{r}$ и по (14)

$$K(r) \geqslant \Phi_{n-1}^{-1}\left(\frac{\gamma}{r}\right). \tag{51}$$

Определим следующие отображения в проколотом единичном шаре $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$:

$$f(x) = \frac{x}{|x|}\ \rho(|x|), \quad f_m(x) = \frac{x}{|x|}\ \rho_m(|x|), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

где $\rho(t) = \exp\{I(0) - I(t)\}$, $\rho_m(t) = \exp\{I(0) - I_m(t)\}$, $t \in [0,1]$,

$$I(t) = \int\limits_t^1 \frac{dr}{rK(r)}, \quad I_m(t) = \int\limits_t^1 \frac{dr}{rK_m(r)}$$

и

$$K_m(r) = \begin{cases} K(r) & \text{при } r \geqslant 1/m, \\ K\left(\frac{1}{m}\right) & \text{при } r \in (0, 1/m). \end{cases}$$

Из (51) получаем

$$I(0) - I(t) = \int\limits_0^t\ \frac{dr}{rK(r)} \leqslant \int\limits_0^t \frac{dr}{r\Phi_{n-1}^{-1}\left(\frac{\gamma}{r}\right)} = \int\limits_{\frac{\gamma}{t}}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\Phi_{n-1}^{-1}(\tau)} \quad \forall\, t \in (0,1],$$

где $\gamma/t \geqslant \gamma \geqslant 1 > \Phi(0) = 0$. Поэтому ввиду (47)

$$I(0) - I(t) \leqslant I(0) = \int\limits_0^1\ \frac{dr}{rK(r)} < \infty \quad \forall\, t \in (0,1]. \tag{52}$$

Кроме того, f_m и $f \in C^1\left(\mathbb{B}^n \setminus \{0\}\right)$, поскольку $K_m(r)$ и $K(r)$ непрерывны. Покажем, что f_m являются K_m-квазиконформными в $\mathbb{B}^n$, где $K_m = K^{n-1}\left(1/m\right)$, $f_m(0) = 0$.

Зафиксируем произвольно $\rho \in (0,1)$ и элемент $x \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ такой, что $|x| = \rho$. Заметим, что главные растяжения $\lambda_{i_1}(x), \ldots, \lambda_{i_{n-1}}(x)$ отображения f в точке x в $n-1$ касательных направлениях $i_1, \ldots, i_{n-1}$ к сфере

$|x| = \rho$ одинаковы и вычисляются, как

$$\lambda_{i_k}(x) := \delta_\tau(x) = \frac{|f(x)|}{|x|} = \frac{\exp\left\{\int\limits_0^\rho \frac{dr}{rK(r)}\right\}}{\rho}, \tag{53}$$

$k = 1, \ldots, n-1$, а одно значение $\lambda_{i_n}(x)$, соответствующее перпендикулярному (радиальному) направлению, вычисляется, как

$$\lambda_{i_n}(x) := \delta_r(x) = \frac{\partial |f(x)|}{\partial |x|} = \frac{\exp\left\{\int\limits_0^\rho \frac{dr}{rK(r)}\right\}}{\rho K(\rho)}. \tag{54}$$

Более подробно по поводу вычисления и определения растяжений см., например, §5 гл. I в [16], а также предложение 6.3 гл. VI в [11]. Из соотношений (53) и (54) следует, что $\delta_r(x) \leqslant \delta_\tau(x)$, поскольку $K(r) \geqslant 1$. Следовательно, на основании соотношения (10) мы имеем, что

$$K_I(x, f) = \frac{\delta_\tau^{n-1}(x) \cdot \delta_r(x)}{\delta_r^n(x)} = K^{n-1}(|x|)$$

во всех точках $x \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, см. также §I.2.1 в [16]. Заметим, что

$$f_m(x) \equiv f(x) \quad \forall\, x: \ \frac{1}{m} < |x| < 1, \quad m = 1, 2 \ldots \tag{55}$$

Поэтому аналогично вычисляются $K_I(x, f_m) = K_I(x, f) = K^{n-1}(|x|)$ для $\frac{1}{m} < |x| < 1$ и $K_I(x, f_m) = K^{n-1}(1/m)$ для $0 < |x| < \frac{1}{m}$. Таким образом, f_m являются квазиконформными в $\mathbb{B}^n$, поэтому $f_m \in W_{loc}^{1,n}$ и по предложению 1 каждое f_m является кольцевым Q-отображением в $\mathbb{B}^n$ при $Q(x) = K_I(x, f)$ с учетом того, что $K(r)$ не возрастает. Ввиду (49)

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{B}^n} \Phi\left(K_I(x, f_m)\right)\ dm(x) &\leqslant \int\limits_{\mathbb{B}^n} \Phi_{n-1}\left(K(|x|)\right)\ dm(x) \\ &= \omega_{n-1} \int\limits_0^1 \frac{\Psi\left(K(r)\right)}{rK(r)} \cdot r^n dr \leqslant \gamma^2 \omega_{n-1} \int\limits_0^1 \frac{dr}{rK(r)} \\ &\leqslant M :\ = \gamma^2 \omega_{n-1} I(0) < \infty. \end{aligned} \tag{56}$$

Заметим, что отображения f_m отображают единичный шар $\mathbb{B}^n$ на шар с центром в начале координат и радиуса $R = e^{I(0)} < \infty$. Таким образом, $f_m \in \mathfrak{R}_{M,E}^{\Phi,Q}$, где M указано выше, а в качестве E можно взять $E = \overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(0, e^{I(0)})$. С другой стороны, легко видеть, что

$$\lim_{x \to 0}\ |f(x)| = \lim_{t \to 0} \rho(t) = e^0 = 1, \tag{57}$$

т.е. f отображает проколотый шар $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ на кольцо $1 < |y| < R = e^{I(0)}$. Тогда в силу (55) и (57) мы получаем, что

$$|f_m(x)| = |f(x)| \geqslant 1 \quad \forall x : |x| \geqslant 1/m, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

т.е. семейство $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ не является равностепенно непрерывным в нуле. Полученное противоречие опровергает предположение (46). □

Замечание 7. Теорема 3 показывает, что условие (7) является не только достаточным, но и необходимым для равностепенной непрерывности (нормальности) классов отображений с интегральными ограничениями вида (8) при выпуклой неубывающей функции Φ. Ввиду предложения 4 сказанное относится также к каждому из условий (15)–(20) при $p = n - 1$.

Доказательство теоремы 4. Используя конструкцию, рассмотренную при доказательстве теоремы 3 и леммы 2, и сохраняя использованные выше обозначения, рассмотрим в области $D = \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ отображение

$$f(x) = \frac{x}{|x|}\rho(|x|).$$

Как уже было отмечено выше, f отображает проколотый шар $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ на кольцо $1 < |y| < R = e^{I(0)}$. Это и означает, что отображение f имеет неустранимую особенность в нуле. При этом, выше также было установлено, что отображение f является кольцевым Q-отображением в нуле при $Q(x) = K_I(x, f) = K^{n-1}(|x|)$, причем Q удовлетворяет соотношению (56), т.е. $f \in K_{M,E}^{\Phi,Q}(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})$ при некоторых $M > 0$ и некотором множестве E таком, что $\operatorname{cap} E > 0$. □

§8. О приложениях результатов к классам Соболева

Предположим, отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, имеет частные производные при почти всех $x \in D$. Тогда *внешней дилатацией* отображения f в точке x называется величина

$$K_O(x, f) = \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x, f)|},$$

если $J(x, f) \neq 0$, $K_O(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_O(x, f) = \infty$ в остальных точках. Можно показать, что при почти всех $x \in D$, $K_I(x, f) \leqslant K_O^{n-1}(x, f)$, $K_O(x, f) \leqslant K_I^{n-1}(x, f)$, см., например, §3 гл. I в [16]. Следующая теорема доказана ранее автором (см. [27, теорема 1]).

Теорема 7. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение класса $W_{\mathrm{loc}}^{1,n}(D)$, для которого $Q := K_O^{n-1}(x, f) \in L_{\mathrm{loc}}^1(D)$ и $m(B_f) = 0$. Тогда f удовлетворяет соотношению* (4) *в точке x_0 при каждой неотрицательной измеримой функции η, удовлетворяющей* (6), *и* *вполне конкретном значении* $Q := K_O^{n-1}(x, f)$*. Допускается также случай, когда* x_0 *— изолированная особая точка* D*.*

Таким образом, все перечисленные результаты имеют приложение к классам Соболева и могут быть напрямую сформулированы для этих классов.

Постскриптум. Настоящая работа выполнена в русле исследований, инициированных известным математиком Г. Д. Суворовым, считавшим ,,*идеалом* (*и целью!*) *в теории функций достижение такой ситуации, когда мы будем располагать большим числом различных классов функций и для каждого класса иметь разработанный каталог свойств* (*метрических и топологических*)" (см. [21, с. 325]).

Список литературы

[1] Альфорс Л., *Лекции по квазиконформным отображениям*, Мир, М., 1969.

[2] Билута П. А., *Некоторые экстремальные задачи для отображений, квазиконформных в среднем*, Сиб. мат. ж. **6** (1965), №4, 717–726.

[3] Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M., *On conformal dilatation in space*, Int. J. Math. Math. Sci. **2003**, no. 22, 1397–1420.

[4] Bourbaki N., *Functions of a real variable*, Springer, Berlin, 2004.

[5] Gehring F. W., *Rings and quasiconformal mappings in space*, Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), 353–393.

[6] Golberg A., *Homeomorphisms with finite mean dilatations*, Complex Analysis and Dynamical Systems II, Contemp. Math., vol. 382, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 177–186.

[7] Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г., *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения*, Наука, М., 1983.

[8] Кругликов В. И., *Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем*, Мат. сб. **130** (1986), №2, 185–206.

[9] Крушкаль С. Л., *Об отображениях, квазиконформных в среднем*, Докл. АН СССР **157** (1964), №3, 517–519.

[10] Lehto O., Virtanen K., *Quasiconformal mappings in the plane*, Grundlehren Math. Wiss., Bd. 126, Springer, New York etc., 1973.

[11] Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E., *Moduli in modern mapping theory*, Springer, New York, 2009.

[12] Миклюков В. М., *Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения*, ВолГУ, Волгоград, 2005.

[13] Perović M., *Isolated singularity of the mean quasiconformal mappings*, Romanian-Finnish Seminar on Complex Analysis (Bucharest, 1976), Lecture Notes in Math., vol. 743, Springer, Berlin, 1979, pp. 212–214.

[14] Песин И. Н., *Отображения, квазиконформные в среднем*, Докл. АН СССР **187** (1969), №4, 740–742.

[15] Полецкий Е. А., *Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений*, Мат. сб. **83** (1970), №2, 261–272.

[16] Решетняк Ю. Г., *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Наука, Новосибирск, 1982.

[17] Rickman S., *Quasiregular mappings*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), Bd. 26, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[18] Рязанов В. И., *Об отображениях, квазиконформных в среднем*, Сиб. мат. ж. **37** (1996), №2, 378–388.

[19] Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E., *On integral conditions in the mapping theory*, Ukr. Mat. Visn. **7** (2010), no. 1, 73–87.

[20] Стругов Ю. Ф., *О компактности семейств отображений, квазиконформных в среднем*, Докл. АН СССР **243** (1978), №4, 859–861.

[21] Суворов Г. Д., *Об искусстве математического исследования*, Донецкая фирма наукоемких технологий НАН Украины (Фирма ТЕАН), Донецк, 1999.

[22] Väisälä J., *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math., vol. 229, Springer-Verlag, Berlin etc., 1971.

[23] Ukhlov A., Vodopyanov S. K., *Mappings associated with weighted Sobolev spaces*, Complex Analysis and Dynamical Systems III, Contemp. Math., vol. 455, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 369–382.

[24] Зорич В. А., *О допустимом порядке роста характеристики квазиконформности в теореме М. А. Лаврентьева*, Докл. АН СССР **181**(1968), №3, 530–533.

[25] Севостьянов Е. А., *Об интегральной характеризации некоторых обобщений квазирегулярных отображений и значении условия расходимости интеграла в геометрической теории функций*, Укр. мат. ж. **61** (2009), №10, 1367–1380.

[26] Севостьянов Е. А., *О точках ветвления отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности*, Сиб. мат. ж. **51** (2010), №5, 1129–1146.

[27] Севостьянов Е. А., *Обобщение одной леммы Е. А. Полецкого на классы пространственных отображений*, Укр. мат. ж. **61** (2009), №7, 969–975.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины
83114, Донецк
ул. Розы Люксембург, 74
Украина
E-mail: brusin2006@rambler.ru,
esevostyanov2009@mail.ru

Поступило 25 ноября 2010 г.