Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2010, том 7, N 2, 297–303

УДК 517.5

Е. А. Севостьянов

(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О множествах точек ветвления одного класса отображений

brusin2006@rambler.ru, sevostyanov@skif.net

Доказано одно важное свойство множеств точек ветвления для некоторого класса отображений в пространстве размерности $n \geq 3$. Если открытое дискретное отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 3$, удовлетворяет определённым геометрическим условиям в $\mathbb{R}^n$, функция $Q(x)$, связанная с контролем условий на f, также удовлетворяет определённому соотношению, а $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ является асимптотическим пределом f в изолированной существенно особой точке x_0 отображения f, то $z_0 \in \overline{f(B_f \cap U)}$ для любой окрестности U точки x_0, где B_f — множество точек ветвления f в D.

Всюду далее D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек, и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subseteq D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. Точка x является *точкой ветвления* отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, если ни в одной окрестности U точки x сужение отображения $f|_U$ не является гомеоморфизмом. Совокупность всех точек ветвления f принято обозначать B_f.

Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\, |dx| \geq 1 \qquad \forall\, \gamma \in \Gamma\,. \tag{1}$$

В этом случае мы пишем: $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_D \rho^n(x)\, dm(x)\,.$$

Пусть $Q : D \to [1, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Говорят, что непрерывное отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является Q-отображением, если соотношение

$$M(f\Gamma) \leq \int\limits_D Q(x)\, \rho^n(x)\, dm(x)$$

выполнено для любого семейства Γ путей γ в D и для каждой допустимой функции $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$ (см. [1, 2]).

Будем говорить, что точка $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ является *асимптотическим пределом* отображения $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в точке $b \in \partial D$, если найдётся кривая $\alpha : [0, 1) \to D$ с $\alpha(t) \to b$ при $t \to 1$ такая, что $f(\alpha(t)) \to z_0$ при $t \to 1$. Кривая $\alpha : [a,\, c) \to D$ с началом в точке x называется *максимальным поднятием* кривой $\beta : [a,\, b) \to \mathbb{R}^n$ при отображении f при выполнении следующих условий:

(i) $\alpha(a) = x\,;$

(ii) $f \circ \alpha = \beta|_{[a,\, c)}\,;$

(iii) если $c < c' \leq b$, то не существует кривой $\alpha' : [a,\, c') \to D$ такой, что $\alpha = \alpha'|_{[a,\, c)}$ и $f \circ \alpha' = \beta|_{[a,\, c')}$.

Аналогично определяется максимальное поднятие $\alpha : (c, a] \to D$, имеющее конец в точке $x = \alpha(a)$, кривой $\beta : (b, a] \to \mathbb{R}^n$ при отображении f.

Конденсатором в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называем пару $E = (A,\, C)$, где A — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а C — компактное подмножество A. *Емкостью* конденсатора E называется величина

$$\operatorname{cap} E \;=\; \operatorname{cap}\,(A,\, C) \;=\; \inf_{u \,\in\, W_0(E)} \int\limits_A |\nabla u|^n \; dm(x),$$

где $W_0(E) = W_0\,(A,\, C)$ — семейство неотрицательных непрерывных функций $u : A \to \mathbb{R}$ с компактным носителем в A таких, что $u(x) \geq 1$ при $x \in C$ и $u \in ACL$. Говорят, что компакт C в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, имеет *нулевую емкость*, если существует ограниченное открытое множество

A, $C \subset A$, такое, что $\mathrm{cap}\,(A, C) = 0$ (более подробно о множествах емкости нуль см., например, в разделе 2 главы III из [3]).

Говорят, что семейство кривых Γ_1 *минорируется* семейством Γ_2 и обозначают $\Gamma_1 > \Gamma_2$, если для каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ существует подкривая, принадлежащая семейству Γ_2. В этом случае $M(\Gamma_1) \le \le M(\Gamma_2)$ (см. теорему 6.4 из [4]).

Лемма 1. *Предположим, что область D содержит начало координат и $f : D \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \ge 2$, — Q-отображение в D. Предположим также, что при некотором $\varepsilon_0 < \mathrm{dist}\,(0, \partial D)$*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\,\psi^n(|x|)\ dm(x) \,=\, o\left(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)\right), \qquad \varepsilon \to 0, \tag{2}$$

для борелевской функции $\psi(t) : (0, \infty) \to (0, \infty)$, удовлетворяющей условию

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty \quad \forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\,. \tag{3}$$

Тогда $M(f(\Gamma)) = 0$, где Γ — семейство открытых кривых $\gamma : (0, 1) \to \to \mathbb{R}^n$ таких, что $\gamma(t) \to 0$ при $t \to 0$ и $\gamma(t) \not\equiv 0$.

Доказательство. Заметим, что

$$\Gamma > \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\,, \tag{4}$$

где Γ_i — семейство кривых $\alpha_i(t) : (0, 1) \to \mathbb{R}^n$ таких, что $\alpha_i(1) \in \{0 < < |x| = r_i < \varepsilon_0\}$, r_i — некоторая последовательность такая, что $r_i \to 0$ при $i \to \infty$, и $\alpha_i(t) \to 0$ при $t \to 0$. Зафиксируем $i \ge 1$ и $\varepsilon \in (0, r_i)$. В силу (2) $I(\varepsilon, r_i) > 0$ при всех $\varepsilon \in (0, r_i)$. Положим $A_i(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x| < r_i\}$. Заметим, что борелевская функция

$$\rho(x) = \rho_{\varepsilon,i}(x) = \left\{ \begin{array}{cr} \psi\left(|x|\right)/I\left(\varepsilon, r_i\right), & x \in A_i(\varepsilon), \\ 0, & x \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus A_i(\varepsilon), \end{array} \right.$$

удовлетворяет условию (1), и следовательно,

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S(\varepsilon),\, S(r_i),\, A_i(\varepsilon)\right)\right)\right)\ \le \mathfrak{F}_i(\varepsilon)\,, \tag{5}$$

где $\mathfrak{F}_i(\varepsilon) = \frac{1}{I(\varepsilon, r_i)^n} \int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\,\psi^n(|x|)\,dm(x)$.

С учетом соотношения (2) получим следующее соотношение:

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\,\psi^n(|x|)\,dm(x)\;=\;G(\varepsilon)\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)dt\right)^n,$$

где $G(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, поэтому $\mathfrak{F}_i(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Поскольку $\Gamma_i > \Gamma\left(S(\varepsilon),\,S(r_i),\,A_i(\varepsilon)\right)$ при всех $\varepsilon\in(0,r_i)$, то, учитывая также неравенство (5), получаем соотношения

$$M(f\Gamma_i)\le\mathfrak{F}_i(\varepsilon)\to 0\,,\qquad \varepsilon\to 0. \tag{6}$$

Далее, левая часть неравенства (6) не зависит от ε, поэтому $M(f\Gamma_i)=$ $=0$. Наконец, из соотношения (4) и полуаддитивности модуля следует, что $M(f(\Gamma))=0$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $f:D\to\overline{\mathbb{R}^n}$, $n\ge 3$, — открытое дискретное Q-отображение в D и $x_0\in\partial D$ — изолированная существенно особая точка отображения f. Предположим также, что при некотором $\varepsilon_0<\operatorname{dist}\,(x_0,\partial D\setminus\{x_0\})$*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\,\psi^n(|x-x_0|)\;dm(x)\;=\;o\left(I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)\right)\,,\qquad \varepsilon\to 0, \tag{7}$$

для некоторой борелевской функции $\psi(t):(0,\infty)\to(0,\infty)$, удовлетворяющей условию (3). Если $z_0\in\overline{\mathbb{R}^n}$ является асимптотическим пределом f в точке x_0, то $z_0\in\overline{f(B_f\cap U)}$ для любой окрестности U точки x_0.

Заметим, что доказательство леммы 2 с небольшими отличиями повторяет доказательство аналогичной теоремы 3.14 из [5] для квазирегулярных отображений. Действительно, в доказательстве теоремы 3.14 из [5] существенно используется лишь тот факт, что семейство кривых, проходящих через точку, при отображении f переходит в семейство кривых, модуль которого равен нулю, что всегда выполняется при квазирегулярных отображениях в силу неравенства $M(f\Gamma)\le K\,M(\Gamma)$ при некоторой постоянной $K>1$ для произвольного семейства кривых Γ (см. раздел 3 в [6]). При условиях леммы 2 аналогичное свойство отображения f есть результат леммы 1.

Предложение 1. *Пусть $f:D\to\overline{\mathbb{R}^n}$, $n\ge 2$, — открытое дискретное Q-отображение в D и $x_0\in\partial D$ — изолированная* *существенно особая точка отображения f такая, что найдутся $\varepsilon_0 \in (0,1)$ и функция $\psi(t) > 0$, для которых выполнены условия* (3), (7). *Тогда* cap $\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(U \setminus \{x_0\})\right) = 0$ *для любой окрестности* $U \supset \{x_0\}$ *в* D (см. лемму 3.1 и теорему 5.1 из [7]).

В дальнейшем $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$, $B(r) := B(0, r)$, $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, $\mathbb{S}^{n-1} := S(0,1)$, $S(r) := S(0, r)$.

Будем говорить, что кривая $\gamma : (a, b] \to \mathbb{R}^n$ *стремится к точке* x_0, если γ имеет предел x_0 при $t \to a$.

Теорема. *Пусть* $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, *— открытое дискретное* Q*-отображение в* D *и* $x_0 \in \partial D$ *— изолированная существенно особая точка отображения* f, *относительно которой найдутся* $\varepsilon_0 \in (0,1)$ *и функция* $\psi(t) > 0$ *такие, что выполнены условия* (3), (7). *Тогда каждая точка множества* $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)$ *является асимптотическим пределом* f *в точке* x_0.

Доказательство. Пусть $z \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $z = 0$. Выберем $r_0 > 0$ таким, чтобы $\overline{B(x_0, r_0)} \subset D \cup \{x_0\}$, и обозначим $U_0 = B(x_0, r_0) \setminus \{x_0\}$. Поскольку $0 \notin f(D)$, то существует r', $0 < r' < 1$, такое, что

$$\overline{B(r')} \cap fS(x_0, r_0) = \varnothing. \tag{8}$$

В силу предложения 1 с учетом соотношения (8) найдётся сферическая шапочка $G \subset S(r')$ (см. [3, с. 69]) такая, что некоторая связная компонента G^* множества $f^{-1}G$ полностью содержится в U_0. Для $y \in \mathbb{S}^{n-1}$ обозначим через $\gamma_y : (0, r'] \to \overline{B(r')}$ кривую $\gamma_y(t) = ty$. Пусть при каждом $y \in \mathbb{S}^{n-1}$ таком, что $r'y \in G$, $\gamma_y^* : (r_y, r'] \to U_0$ — максимальное поднятие кривой γ_y с концом в G^* (такое поднятие существует в силу следствия 3.3 из главы II монографии [3]).

Покажем, что $\gamma_y^*(t) \to x_0$ при $t \to r_y$. Пусть $K = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x = \lim\limits_{k\to\infty} \gamma_y^*(t_k)\right\}$, где $t_k \in (r_y, r']$ такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = r_y$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_y^*(t_k) = x$. Заметим, что можно ограничиться монотонными последовательностями t_k. Для $x \in K \cap U_0$ в силу непрерывности f будем иметь $f\left(\gamma_y^*(t_k)\right) \to f(x)$ при $k \to \infty$, где $t_k \in (r_y, r')$ и $t_k \to r_y$ при $k \to \infty$. Однако $f\left(\gamma_y^*(t_k)\right) = \gamma_y(t_k) \to \gamma_y(r_y)$ при $k \to \infty$. Отсюда вытекает, что f — постоянна на $K \cap U_0$. Кроме того, по условию Кантора в компакте $\overline{\gamma_y^*}$ (см. 3.6 главы I в [8]) с учетом монотонности последовательности связных множеств $\gamma_y^*\left((r_y, t_k]\right)$ будет иметь место

$$K = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\gamma_y^*\left((r_y, t_k]\right)} = \limsup_{k\to\infty} \gamma_y^*\left((r_y, t_k]\right) = \liminf_{k\to\infty} \gamma_y^*\left((r_y, t_k]\right) \neq \varnothing$$

и, следовательно, K является связным (см. 9.12 главы I в [8]). Таким образом, в силу дискретности f и соотношения (8) K не может состоять более чем из одной точки. В случае $K \neq \{x_0\}$ кривая $\gamma_y^* : (r_y, r'] \to U_0$ продолжается до замкнутой кривой $\gamma_y^* : [r_y, r'] \to U_0$ и $f\left(\gamma_y^*(r_y)\right) = \gamma_y(r_y)$, то есть $\gamma_y^*(r_y) \in f^{-1}(\gamma_y)$, при этом существует максимальное поднятие ${\gamma_y^*}'$ кривой $\gamma_y|_{(0,\, r_y]}$ с концом в точке $\gamma_y^*(r_y)$ (см. следствие 3.3 в главе II из [3]) и при объединении поднятий γ_y^*, ${\gamma_y^*}'$ получается новое поднятие ${\gamma_y^*}''$ кривой γ_y, определенное на $(r_y', r']$, что противоречит максимальности поднятия γ_y^*. Следовательно, $K = \{x_0\}$ и $\gamma_y^*(t) \to x_0$ при $t \to r_y$.

Для справедливости заключения леммы достаточно показать, что $r_y = 0$ для почти всех $y \in \mathbb{S}^{n-1}$ таких, что $r'y \in G$. Пусть $E_i = \{y \in \mathbb{S}^{n-1} : r'y \in G, r_y > 1/i\}$, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда достаточно показать, что $\mathcal{H}^{n-1}(E_i) = 0$ для каждого i, где $\mathcal{H}^{n-1}$ — $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа. Для фиксированного $i \in \mathbb{N}$ обозначим $\Gamma_i = \{\gamma_y^* : y \in E_i\}$. По доказанному выше, все кривые семейства Γ_i стремятся к точке x_0, поэтому $M(\Gamma_i) = 0$. Кроме того, по лемме 1 $\quad M(f(\Gamma_i)) = 0$. Отметим, что семейство $f\Gamma_i$ минорирует семейство Δ всех отрезков $\alpha_y : [1/i, r'] \to \mathbb{R}^n$, где $\alpha_y(t) = ty$ при $y \in E_i$.

Пусть $\rho \in \operatorname{adm} f\Gamma_i$. При каждом фиксированном $y \in E_i$, используя неравенство Гёльдера, получаем неравенства

$$1 \leq \int\limits_{1/i}^{r'} \rho(ty)dt \leq \left(\int\limits_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)dt\right)^{1/n},$$

откуда следует, что

$$\left(\int\limits_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)dt\right)^{1/n} \leq \int\limits_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)dt.$$

Тогда, используя неравенство Гёльдера и учитывая при этом неравенство $r' < 1$, получаем

$$\int\limits_{1/i}^{r'} t^{n-1}\rho(ty)\,dt \leq \left(\int\limits_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)\,dt\right)^{1/n} \left(\int\limits_{1/i}^{r'} t^n\,dt\right)^{(n-1)/n} \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)\,dt\right)^{1/n} \leq \int\limits_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)\,dt\,. \tag{9}$$

Используя неравенство (9) и теорему Фубини, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x)dm(x) \geq \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int\limits_{1/i}^{r'} t^{n-1}\rho(ty)\,dt\right)dy \geq \frac{1}{i^{n-1}}\mathcal{H}^{n-1}(F_\rho)\,, \tag{10}$$

где $F_\rho = \left\{y \in \mathbb{S}^{n-1} : \int\limits_{1/i}^{r'} \rho(ty)\,dt \geq 1\right\}$. Заметим, что $E_i \subset F_\rho$. Поскольку $M(f\Gamma_i) = 0$, то из (10) следует, что $\mathcal{H}^{n-1}(F_\rho) = 0$, и следовательно, $\mathcal{H}^{n-1}(E_i) = 0$. Лемма доказана.

Список литературы

[1] Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. *Moduli in Modern Mapping Theory.* — New York: Springer, 2009.

[2] Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.*On conformal dilatation in space* // Intern. J. Math. and Math. Sci. — 2003. — **22**. — P. 1397 – 1420.

[3] Rickman S. *Quasiregular mappings.* — Results in Mathematic and Related Areas, 26. — Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[4] *Väisälä J. Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings* // Lecture Notes in Math. — **229**. — Berlin etc.: Springer – Verlag, 1971.

[5] Martio O., Rickman S., Väisälä J. *Topological and metric properties of quasiregular mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. — 1971. — **488**. — P. 1 – 31.

[6] Martio O., Rickman S., Väisälä J. *Definitions for quasiregular mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. — 1969. — **448**. — P. 1 – 40.

[7] Севостьянов Е. А. *Теоремы Лиувилля, Пикара и Сохоцкого для кольцевых отображений* // Укр. мат. вестник. — 2008. — **5**, № 3. — С. 366 – 381.

[8] Whyburn G. T. *Analytic topology.* — Rhode Island: American Mathematical Society, 1942.