УДК 378.14 **С. П. Семенець**

РОЗВИВАЛЬНО–ЗАДАЧНИЙ МЕТОД НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Центральним компонентом будь-якої педагогічної (дидактичної) системи є цільовий компонент, який визначає (задає) морфологічні, структурні, функціональні складові сформованої цілісності. Система цілей концепції розвивальної освіти може бути подана у вигляді такої ієрархії:

1) розвиток науково-теоретичного мислення;

2) формування суб'єктів навчальної діяльності (суб'єктів учіння);

3) становлення суб'єктів життєдіяльності.

Досягнення названих рівнів цілей слугує реалізації концептуальної освітньої ідеї навчання впродовж життя, підвищенню ролі інтелектуального потенціалу суспільства, вихованню особистості, здатної до самоосвіти й саморозвитку. З огляду на це не викликає сумнівів значущість упровадження системи розвивального навчання на сучасному етапі модернізації освітнього простору. Науково-методичне забезпечення розвивального навчання математики в початковій школі [1] посилює актуальність **теоретичного та методичного розв'язання відповідної проблеми в середній та старшій ланках шкільної математичної освіти.** Окремі методичні аспекти цієї проблеми, що пов'язані з навчальним моделюванням, постановкою та розв'язуванням навчальних задач, уже висвітлювалися в наших роботах [2; 3]. **Мета цієї статті**:

1) розкрити структуру та зміст розробленого нами розвивально-задачного методу навчання математики, що реалізовує основні концептуальні ідеї системи розвивальної освіти;

2) на теоретичному рівні проаналізувати кожен із виділених етапів навчального пізнання;

3) побудувати узагальнену навчально-методичну схему як систему задач, що розкриває зміст розвивально-задачного методу навчання математики;

4) навести приклад реалізації побудованої навчально-методичної схеми під час вивчення теми „Квадратні рівняння” у 8 класі (згідно з новою програмою 12-річної школи).

Концепція навчальної діяльності, діяльнісний підхід до навчання математики „як головна умова забезпечення ефективності математичної освіти” [4, 47], системний і особистісно орієнтований підходи до організації процесу учіння складають теоретичну основу розробленого нами розвивально-задачного методу навчання математики. Його назва обумовлена тим, що, по-перше, пропонований метод навчання математики актуалізує передусім науково-теоретичне мислення (змістові аналіз, абстрагування, узагальнення, планування, рефлексію), яке забезпечує знаходження об'єктивно існуючих закономірностей становлення (походження) та розвитку об'єкта навчального пізнання. По-друге, розвивально-задачний метод навчання математики репрезентує задачний підхід до процесу формування та розвитку навчальної діяльності школярів, який обґрунтовується в роботах вітчизняних та зарубіжних психологів: Г.О. Балла, Д.Б. Богоявленської, П.Я. Гальперіна, В.В. Давидова, О.К. Дусавицького, Д.Б. Ельконіна, Г.С. Костюка, С.Д. Максименка, Е.І. Машбиця, В.В. Рєпкіна, Н.В. Рєпкіної, Н.Ф. Тализіної та інших. Зважаючи на те, що всі методи навчання мають бінарний характер, розроблений метод навчання математики, з одного боку, є способом педагогічної діяльності вчителя, що спрямований на формування та розвиток навчальної діяльності (учіння) школярів, а з іншого – способом організації навчально-пізнавальної діяльності школярів з метою розв'язування навчальних і навчально-теоретичних задач. Наведемо його основні структурні компоненти.

I етап. Постановка та розв'язування задачі (задач) у рамках засвоєного способу дій (створення ситуації успіху). Контроль та змістова оцінка виконаної діяльності. Створення проблемної задачної ситуації, яка не може бути розв'язана на основі відкритих раніше знань і сформованих способів дій.

II етап. Постановка базової (практичної, прикладної) задачі-проблеми, її змістовий аналіз. Виділення цілком певного генетичного початкового відношення, створення його математичної моделі. Побудова математичної моделі задачної ситуації та її реалізація в процесі розв'язування математичної задачі. Обґрунтування способу розв'язування базової задачі, контроль виконаних дій і змістова оцінка їх засвоєння.

III етап. Постановка та розв'язування навчальної задачі. Конструювання загального способу (методу) розв'язування типових задач, побудова його навчальної моделі як ієрархії навчальних дій. Контроль за виконанням навчальних дій, змістова оцінка рівня засвоєння способу розв'язування типових задач.

IV етап. Реалізація побудованої навчальної моделі: конструювання та розв'язування системи частинних задач (прикладних, практичних, математичних) відповідно до логіки сходження від загального (абстрактного) до конкретного. Контроль виконаних навчальних дій у процесі розв'язування кожної задачі. Змістова оцінка рівня засвоєння узагальненого способу дій.

V етап. Змістовий аналіз попередніх етапів, контроль способів навчальних дій, змістова оцінка виконаної навчальної діяльності (що відіграє роль окремої задачі). Постановка нової задачі (навчальнотеоретичної), що передбачає відкриття нових знань, застосування засвоєного способу дій у інших задачних ситуаціях чи формування способу дій вищого рівня узагальненості.

Змістовими характеристиками першого етапу є ситуація вимушеного успіху, на необхідності якої наполягав В. О. Сухомлинський: „Успіх має бути не кінцем навчальної роботи учня, а її початком". Завдяки організації навчального діалогу, співробітництву вчителя та учнів, створенню проблемної задачної ситуації (навчального протиріччя) формуються зони ближчого розвитку школярів, які, згідно з культурно-історичною теорією Л. С. Виготського, на наступних етапах перетворюються в зони актуального розвитку. Із психологічної точки зору сутність цього процесу полягає в „переведенні колективно виконуваної психічної функції в план її індивідуально-самостійного здійснення" [5, 373].

Другий етап передбачає виконання дій змістового аналізу й абстрагування, реалізацію методу математичного моделювання в процесі розв'язування поставленої базової (прикладної, практичної) задачі, відшукання способу розв'язання задачі іншого типу – математичної. На цьому ж етапі розв'язується одне з центральних завдань системи розвивального навчання – проблема походження теоретичних знань. На необхідності вирішення саме цієї проблеми в процесі математичної освіти неодноразово наголошував видатний математик А. М. Колмогоров: „...відрив у шкільному викладанні математичних понять від їх походження приводить до повної безпринципності та логічної дефективності курсу" [6, 10].

Постановка та розв'язування навчальної задачі, навчальне моделювання, формування змістових узагальнень, конструювання та розв'язування системи частинних задач відповідно до логіки сходження від абстрактного (загального) до конкретного, актуалізація змістово-теоретичної дії рефлексії (оцінки й контролю) на третьому і четвертому етапах реалізації розвивально-задачного методу навчання математики репрезентують концепцію навчальної діяльності Д. Б. Ельконіна – В.В. Давидова у шкільній математичній освіті. Такий спосіб вивчення програмового матеріалу відповідає третьому типу навчання в рамках теорії П. Я. Гальперіна про поетапне формування розумових дій і прийомів розумової діяльності, оскільки передбачає „формування в учнів абстракцій і узагальнень змістового характеру, засвоєння теоретичних знань" [7, 264]. Отже, розвивально-задачний метод навчання математики ґрунтується на діяльнісній теорії мислення і не може бути реалізований у рамках традиційно усталеної асоціативно-рефлекторної теорії, яка в цілому „не розкриває психологічних особливостей процесу засвоєння" [8, 241].

П'ятий етап характеризується змістовою оцінкою (самооцінкою) і контролем (самоконтролем) виконаної на попередніх етапах навчальної діяльності, слугує рефлексивному напрямку розвитку особистості школяра, який загалом задає система розвивальної освіти. Водночас (як і на третьому етапі) він передбачає постановку задачі вищого рівня узагальнення, що забезпечує реалізацію ідеї дворівневої моделі діяльності, розробленої Д. Б. Богоявленською в методі „креативного поля”. На першому (поверхневому) рівні виконується діяльність з метою розв'язування конкретної задачі, на другому (глибинному) – діяльність щодо виявлення прихованих закономірностей, що містить вся система задач і знаходження яких не вимагає умова поставленої базової задачі [9, 95].

З огляду на визначену етапність і проведений теоретичний аналіз розвивально-задачного методу навчання математики можна побудувати його задачну модель:

[прикладні, практичні, математичні задачі, що розв'язуються в рамках засвоєних навчальних моделей] $\Leftrightarrow$ [проблемна задачна ситуація: прикладна, практична задача, що не розв'язується в рамках засвоєних навчальних моделей] $\Leftrightarrow$ [математичне моделювання, розв'язування математичної задачі] $\Leftrightarrow$ [навчальна задача, побудова навчальної моделі способу дій] $\Leftrightarrow$ [частинні задачі: реалізація методу сходження від абстрактного до конкретного] $\Leftrightarrow$ [контроль і змістова оцінка результатів діяльності як особлива задача] $\Leftrightarrow$ [задачі нового виду, вищого рівня узагальненості (навчально-теоретичні)].

Покажемо реалізацію визначеної вище структури та побудованої задачної моделі розвивально-задачного методу навчання математики на прикладі вивчення теми „Квадратні рівняння” у 8 класі.

І етап. Учням пропонується розв'язати „непросту” задачу: Знайти розміри земельної ділянки прямокутної форми з периметром 58 м, якщо її ширина на 11 метрів менша від потроєної довжини. Побудова геометричної інтерпретації приводить учнів до складання лінійного рівняння (математичної моделі задачної ситуації) $2\left(x+3x-11\right)=58$ та знаходження розв'язку задачі. Далі обґрунтовується спосіб розв'язування задачі, здійснюється контроль та змістова оцінка рівня його засвоєння. Створена ситуація успіху формує в учнів високу самооцінку, впевненість у власних пізнавальних можливостях, посилює внутрішню мотивацію навчального процесу. На цьому ж етапі задачна ситуація дещо змінюється: учням пропонується розглянути випадок, коли відомо площу земельної ділянки S. Учні приходять до висновку про необхідність знаходження розв'язку рівняння $3x^2-11x=\mathrm{S}$ (де $S>0$), що є навчально-пізнавальною проблемою, оскільки потребує знаходження способу дій у процесі розв'язування нового виду рівнянь.

ІІ етап. Обґрунтовується прикладна (практична) значущість у знаходженні способу розв'язування задачі про обчислення розмірів земельної ділянки прямокутної форми за відомою площею та заданими співвідношеннями між її сторонами. Ставиться задача: знайти розміри земельної ділянки прямокутної форми площею 300 $м^2$, якщо її ширина на 11 метрів менша від потроєної довжини. У результаті змістового аналізу виділяється генетично вихідне відношення: відношення рівності для площі, що пов'язує шукану величину із заданими. Будується математична модель задачної ситуації: складається рівняння $3x^2-11x-300=0$. Далі ставиться математична задача: розв'язати одержане рівняння. За допомогою операції виділення повного квадрата учні обґрунтовують спосіб розв'язування рівняння і знаходять його корені: $x_1=12$, $x_2=-\frac{25}{3}$. З огляду на одержаний сторонній корінь рівняння x_2 школярі дають відповідь на питання про розміри земельної ділянки. На цьому ж етапі здійснюється змістовий аналіз, контроль і змістова оцінка (з обов'язковою знаково-символьною фіксацією) засвоєння способу розв'язування рівняння нового виду.

III етап. Формулюється означення квадратного рівняння. Ставиться та розв'язується навчальна задача: знайти спосіб розв'язування квадратного рівняння $ax^2+\mathrm{b}x+\mathrm{c}=0\,(a\neq 0)$. Будується навчальна модель способу розв'язування квадратних рівнянь:

1. Знайти дискримінант квадратного рівняння $\mathrm{D}=\mathrm{b}^2-4ac$.
2. Зробити висновок про існування і кількість коренів рівняння на множині дійсних чисел: якщо $\mathrm{D}<0$, то коренів немає; якщо $\mathrm{D}=0$, то один корінь; якщо $\mathrm{D}>0$, то два корені.
3. Знайти корені рівняння: якщо $\mathrm{D}=0$, то $x=-\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}$; якщо $\mathrm{D}>0$, то

$$x_1=\frac{-\mathrm{b}-\sqrt{\mathrm{D}}}{2\mathrm{a}},\ x_2=\frac{-\mathrm{b}+\sqrt{\mathrm{D}}}{2\mathrm{a}}.$$

4. Записати відповідь.

Етап завершується контролем виконаних навчальних дій і змістовою оцінкою їх засвоєння.

IV етап. Учні створюють (відбирають) і розв'язують частинні задачі: повні, неповні, зведені, незведені квадратні рівняння (формуються вміння і навички). Виводять формулу для знаходження коренів квадратного рівняння, коли b – парне число. Складають і розв'язують прикладні та практичні (текстові) задачі, що зводяться до побудови математичних моделей – квадратних рівнянь. На цьому ж етапі за допомогою дослідницького методу обґрунтовується теорема Вієта і теорема, що є оберненою до неї (усно розв'язуються зведені квадратні рівняння). Далі вводиться поняття квадратного тричлена та його кореня, обґрунтовується спосіб розкладання квадратного тричлена на лінійні множники (що виконує роль окремої навчальної задачі), створюється його навчальна модель:

1. Розв'язати відповідне квадратне рівняння (реалізація вже побудованої навчальної моделі).
2. Якщо коренів немає, то квадратний тричлен у множині дійсних чисел на лінійні множники не розкладається; якщо один корінь x_1, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$; якщо два корені x_1, x_2, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

Школярі контролюють навчальні дії у процесі розв'язування кожної частинної задачі, здійснюють змістову оцінку рівня засвоєння способів дій.

V етап передбачає змістовий аналіз виконаної діяльності на кожному із виділених етапів, контроль і змістову оцінку засвоєння способів розв'язування всіх видів задач: навчальних, прикладних, практичних, математичних. Окрім цього, створюються навчальні ситуації, за яких сформовані способи дій є необхідним інструментарієм під час розв'язування задач вищого рівня узагальнення. Такими задачами є ті, що зводяться до розв'язування біквадратних рівнянь, зворотних рівнянь четвертого степеня, потребують використання методу заміни й застосування засвоєного способу дій у нових задачних ситуаціях. Метод розв'язування нового виду задач може бути застосований у процесі вивчення всієї змістової лінії шкільного курсу математики „Рівняння і нерівності", що дозволяє виділити ще одну категорію задач – навчально-теоретичні. Наведемо приклади.

1. Розв'язати рівняння: $\dfrac{1}{x^2 - 3x + 3} + \dfrac{2}{x^2 - 3x + 4} = \dfrac{6}{x^2 - 3x + 5}$;
   $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 3$; $x^4 + x^3 + 4x^2 + 5x + 25 = 0$;
   $x^2 + \dfrac{9x^2}{(x+3)^2} = 27.$
2. Чи може дискримінант квадратного рівняння з цілими коефіцієнтами дорівнювати 23?
3. Нехай x, y – натуральні числа. Чи може число $x^2 + xy - 2y^2 + 2x + 7y - 3$ бути простим натуральним числом?
4. При яких значеннях параметра a коренями рівняння $ax^2 - 2x + 4(1 - a^2) = 0$ є цілі числа?

Загальновідомими методами навчання, що відповідають поставленим загальним і конкретним дидактичним цілям системи розвивальної освіти, є проблемний, дослідницький, організації навчального (конструктивного) діалогу учнів між собою за участі вчителя – управлінця та організатора. Репродуктивний метод має місце на етапі формування практичних умінь і навичок, застосування знайдених способів дій у процесі розв'язування частинних (типових) задач. Однак характерними особливостями цього етапу є те, що типові задачі створюються й відбираються самими учнями, а контроль і змістова оцінка правильності розв'язання здійснюється як з боку вчителя, так і самих школярів. У залежності від рівня научуваності учнів учитель організовує колективні, колективно розподілені (групові, парні) та індивідуальні форми навчальної роботи. Дидактичною особливістю розвивально-задачного методу навчання математики є планомірний поступовий перехід від колективних і колективно-розподілених форм роботи до індивідуальних, що слугує процесу інтеріоризації – становленню індивідуального суб'єкта навчальної діяльності із колективного.

Таким чином, розвивально-задачний метод навчання математики репрезентує задачний підхід до формування навчальної діяльності школярів, може бути представлений як система із п'яти структурних компонентів (способів дій), що реалізуються поетапно й слугують досягненню цілей розвивальної освіти. Різнотипність задач, ієрархія рівнів їх змістового теоретичного узагальнення, різні види інтерпретацій задачних ситуацій, як і загалом можливість суб'єктної поведінки учнів на кожному із визначених етапів дозволяють послуговуватися імовірнісними чинниками організації процесу учіння, що у свою чергу створює необхідні умови для реалізації стильового підходу в навчанні, формування персональних пізнавальних стилів (стилів навчання) школярів. Питанням застосування розробленого способу навчального пізнання математики у процесі вивчення тем алгебри, початків аналізу, геометрії та стохастики будуть присвячені наші подальші роботи.

Література

1. Александрова Э. И. Научно-методические основы построения начального курса математики в системе развивающего обучения: Монография. – Омск: ГОУ ДПО ИПКРО, 2006. – 332 с.

2. Семенець С. П. Навчальне моделювання методів доведення в шкільному курсі математики // Математика в школі. – 2006. – №9. – С. 12-16.

3. Семенець С. П. Навчання учнів основної школи методам геометричних перетворень // Математика в школі. – 2007. – №1. – С. 17-20.

4. Математика 5-12 класи. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. – Київ, 2005. – 64 с.

5. Выготский Л. С. Педагогическая психология. – М.: Просвещение, 1991. – 480 с.

6. Колмогоров А. Н. Предисловие к книге А. Лебега «Об измерении величин». – М.: Учпедгиз, 1960. – 321 с.

7. Давыдов В. В. Теория развивающего обучения / Международная Ассоциация «Развивающее обучение». – М.: Интор, 1996. – 544 с.

8. Талызина Н. Ф. Управление процессом усвоения знаний. – М.: МГУ, 1975. – 343 с.

9. Богоявленская Д. Б. Психология творческих способностей. – М.: Академия, 2002. – 320 с.