Житомирський державний університет імені Івана Франка
Кафедра алгебри та геометрії

ПРОЕКТИВНА ГЕОМЕТРІЯ

Інструктивно-методичні матеріали для організації практичних занять

Житомир - 2015

УДК 514.14

Рекомендовано кафедрою алгебри та геометрії
протокол № 6 від 15.01.2015

Чемерис О.А.
Проективна геометрія: Інструктивно-методичні матеріали для організації практичних занять. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2015. – 35 с.

Видання являє собою інструктивно-методичні матеріали для організації практичних занять з проективної геометрії та включає в себе короткі теоретичні відомості, приклади розв'язаних задач, запитання для самоперевірки, умови задач для розв'язування на практичних заняттях та для домашньої роботи із базових тем курсу.

Для студентів фізико-математичних факультетів очної та заочної форм навчання вищих навчальних закладів напрямів підготовки 6.040201 Математика*, 6.040203 Фізика*, для викладачів проективної геометрії.

ЗМІСТ

Практичне заняття № 1. *Принципи двоїстості в проективній геометрії. Теорема Дезарга*………………………………………………………………….. 2
Практичне заняття № 2. *Складне відношення*……………………………………… 5
Практичне заняття № 3. *Гармонізм*……………………………………………….. 8
Практичне заняття № 4. *Проективна відповідність рядів і пучків*…………….. 11
Практичне заняття № 5. *Інволюція*………………………………………………… 15
Практичне заняття № 6. *Колінеарна відповідність. Гомологія*……………….... 19
Практичне заняття № 7. *Гомологія (друге заняття з теми)*…………………….. 22
Практичне заняття № 8. *Криві ІІ-го порядку. Теорема Паскаля*……………..... 23
Практичне заняття № 9. *Пучки ІІ-го порядку. Теорема Бріаншона*……………. 26
Практичне заняття № 10. *Криві ІІ-го порядку. Гіпербола*……………………..... 29
Практичне заняття № 11. *Криві ІІ-го порядку. Парабола*……………………..... 31
Практичне заняття № 12. *Полярна відповідність*………………………………. 33
Рекомендована література……………………………………………………….... 35

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 1

Тема: ***Принципи двоїстості в проективній геометрії. Теорема Дезарга***

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТЕМИ

Принцип двоїстості в просторі (великий принцип двоїстості). Його схема.

точка → площина

площина → точка

пряма = пряма

перетин → об’єднання

Принцип двоїстості на площині (малий принцип двоїстості). Його схема.

точка → пряма

пряма → точка

площина = площина

перетин → об’єднання

Теорема Дезарга (в просторі):

А) *пряма*: нехай задано дві площини, що перетинаються по прямій s і нехай задано точку S, яка не належить цим площинам. Якщо прямі, які з’єднують відповідні вершини двох трикутників перетинаються в одній точці, то відповідні сторони цих трикутників належать прямим, що перетинаються в трьох точках, що лежать на одній прямій;

Б) *обернена*: якщо прямі, що містять відповідні сторони двох заданих трикутників перетинаються в трьох точках, що лежать на одній прямій, то прямі, що з’єднують відповідні вершини цих трикутників, перетинаються в одній точці.

Теорема Дезарга (на площині):

А) *пряма*: якщо прямі, які з’єднують відповідні вершини двох трикутників перетинаються в одній точці, то відповідні сторони цих трикутників належать прямим, що перетинаються в трьох точках, що лежать на одній прямій;

Б) *обернена*: якщо прямі, що містять відповідні сторони двох заданих трикутників перетинаються в трьох точках, що лежать на одній прямій, то прямі, що з’єднують відповідні вершини цих трикутників, перетинаються в одній точці.

Конфігурація Дезарга $\binom{10}{3}$: містить 10 точок, 10 прямих; через кожну точку проходить 3 прямі, на прямій лежить три точки (рис. 1).

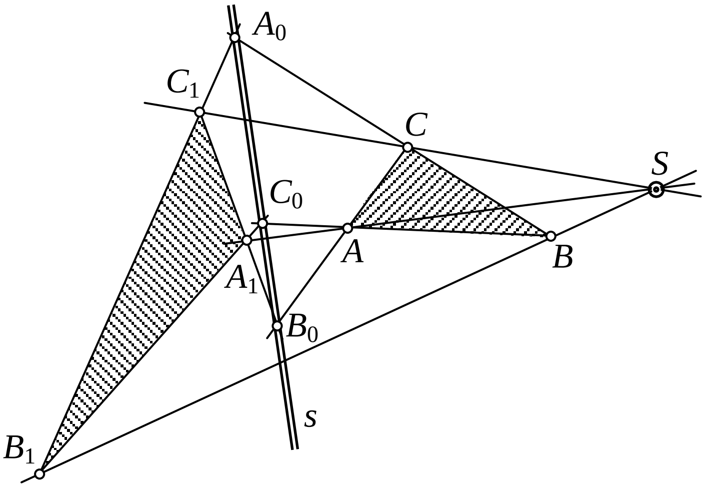


Рис. 1

Схема-перевірка у розв'язуванні задач на теорему Дезарга:

$$AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = S \quad \leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{l} A_1B_1 \cap AB = C_0 \\ A_1C_1 \cap AC = B_0 \\ B_1C_1 \cap BC = A_0 \end{array}\right\} \in ss$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАНИХ ЗАДАЧ

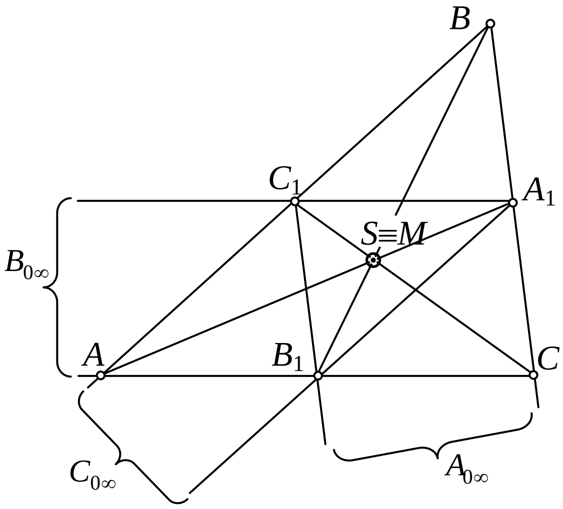


Рис. 2

Задача I. Користуючись теоремою Дезарга, довести, що медіани трикутника перетинаються в одній точці.

Розв'язання.

В трикутнику ABC проведемо медіани AA_1, BB_1, CC_1.

Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. Нехай $AB \cap A_1B_1 = C_{0\infty}$ ($AB \parallel A_1B_1$ – властивість середньої лінії), $BC \cap B_1C_1 = A_{0\infty}$ ($BC \parallel B_1C_1$), $AC \cap A_1C_1 = B_{0\infty}$ ($AC \parallel A_1C_1$).

Таким чином точки $A_{0\infty}$, $B_{0\infty}$, $C_{0\infty}$ належать одній невласній прямій. Оскільки медіани з'єднують відповідні вершини трикутників, сторони яких перетинаються у трьох точках, що лежать на одній прямій, то відповідно до оберненої теореми Дезарга, прямі (AA_1, BB_1, CC_1) перетинаються в одні точці.

Задача II. На площині задано дві прямі a і b, які перетинаються поза межами рисунка, і точка M, що не належить цим прямим. Користуючись прямою теоремою Дезарга, побудувати пряму, яка з'єднує точку M з точкою перетину прямих a і b.

Розв'язання.

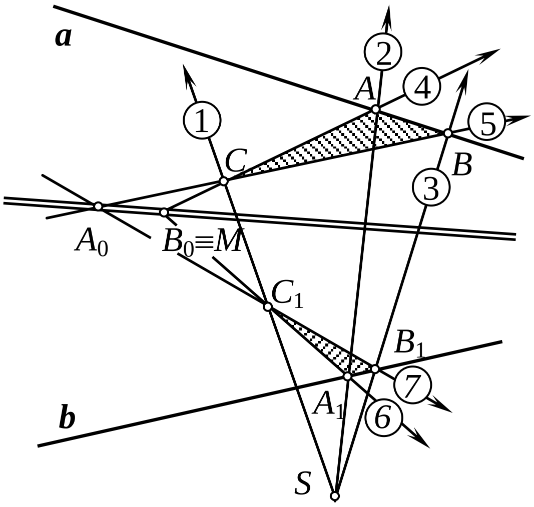


Рис. 3

Для розв'язання задачі будемо шукати дезаргову пряму (для цього виберемо довільно Дезаргову точку і дезаргові трикутники (рис. 3)).

Проведемо через довільно вибрану точку S три довільні прямі 1, 2, 3. Позначимо точки перетину прямих 2, 3 із заданими прямими a і b: A, B, A_1, B_1.

Тоді точку M (вона ж B_0) сполучимо з точками A і A_1 (це прямі 4 і 6). Перетини прямих 4 і 6 з прямою 1 позначимо точками C і C_1. З'єднаємо одержані точки з точками B і B_1 (це прямі 5 і 7). Їх перетин, в свою чергу дасть, точку A_0.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

Завдання для самоконтролю:

1. Роз'ясніть великий та малий принципи двоїстості. Наведіть приклади.

2. Сформулюйте пряму та обернену теореми Дезарга в просторі й на площині. Зробіть відповідні малюнки.

Задачі для роботи на парі:

Задача 1. Перефразуйте твердження за великим і малим принципом двоїстості:

А) Три точки, які не лежать на одній прямій, лежать на одній площині;

Б) Точка і пряма, яка не належить даній точці, визначають площину;

В) Пряма, яка не лежить у даній площині, перетинає її в одній точці.

Задача 2. Які з форм одного ступеня відповідають одна одній за великим принципом двоїстості?

Форми I ступеня: а) прямолінійний ряд точок;
б) пучок прямих;
в) пучок площин.

Форми II ступеня: а) плоске поле точок і прямих;
б) в'язка прямих і площин;

Форми III ступеня: а) тривимірний простір точок;
б) тривимірний простір площин;

Форми IV ступеня: а) простір прямих, що належить тривимірному точковому простору;

Які з форм можна дістати одна з одної за малим принципом двоїстості?

Задача 3. Приймаючи довільну точку конфігурації за Дезаргову точку, знайти відповідні трикутники і пряму Дезарга.

Задача 4. Зробити рисунок до теореми Дезарга, якщо точка **S** перетину прямих, що сполучають попарно відповідні вершини даних трикутників (дезаргова точка), є невласною точкою.

Задача 5. На площині ω виконано таку побудову: довільну точку M площини сполучено з вершинами A, B, C трикутника тієї самої площини. Точками перетину прямих AM, BM, CM зі сторонами BC, CA і AB є відповідно A_0, B_0, C_0. Після сполучення цих точок прямими утвориться трикутник $A_0B_0C_0$, вписаний у даний трикутник. Виконати подвійну побудову, користуючись принципом двоїстості в просторі.

Задача 6. Зробити рисунок до теореми Дезарга, якщо одна пара відповідних вершин заданих трикутників лежить на невласній прямій.

Задача 7. Див. задачу І теми.

Домашнє завдання:

Задача 8. Через вершини трикутника ABC проведено прямі, інцидентні одній і тій самій точці S, нехай при цьому $A'=AS\cap BC$, $B'=BS\cap AC$, $C'=CS\cap AB$. Довести, що точки, утворені перетинами наступних пар прямих $BC\cap B'C'$, $AC\cap A'C'$, $AB\cap A'B'$ лежать на одній прямій.

Задача 9. Зробити рисунок до теореми Дезарга, якщо пряма, на якій лежать точки перетину відповідних сторін двох трикутників (дезаргова пряма), є невласною.

Задача 10. На площині задані прямі a і b, які перетинаються поза межами рисунка, і точка M, що не належить цим прямим. Користуючись оберненою теоремою Дезарга, побудувати пряму, яка з'єднує точку M з точкою перетину прямих a і b (див. задачу II теми).

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 2

Тема: *Складне відношення*

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТЕМИ

Означення. Просте відношення трьох точок A, B і C евклідової прямої визначається як відношення двох відрізків AC і BC і записується:

$(AB,C)=\dfrac{AC}{CB}$, точка C є подільною, точки A і B – основні (базисні).

Означення. Складним (подвійним) відношенням чотирьох точок прямолінійного ряду називається відношення двох простих відношень: $(AB,CD)=\dfrac{(AB,C)}{(AB,D)}=\dfrac{AC}{CB}\div\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AC\cdot DB}{CB\cdot AD}$, AB – базисна (основна) пара; CD – подільна пара.

Означення складного відношення чотирьох прямих пучка:

$$(ab,cd)=\frac{(ab,c)}{(ab,d)}=\frac{\sin\left(\widehat{a,c}\right)}{\sin\left(\widehat{c,b}\right)}\div\frac{\sin\left(\widehat{a,d}\right)}{\sin\left(\widehat{d,b}\right)}=\frac{\sin\left(\widehat{a,c}\right)\cdot\sin\left(\widehat{d,b}\right)}{\sin\left(\widehat{c,b}\right)\cdot\sin\left(\widehat{a,d}\right)}.$$

Якщо для прямих пучка відомі кутові коефіцієнти, то користуються наступною формулою:

$$(ab,cd)=\frac{(ab,c)}{(ab,d)}=\frac{k_c-k_a}{k_b-k_c}\div\frac{k_d-k_a}{k_b-k_d}=\frac{k_c-k_a}{k_b-k_c}\cdot\frac{k_b-k_d}{k_d-k_a}.$$

Властивості складного відношення чотирьох точок:

1°.Значення складного відношення *не змінюється*:

А) при перестановці пар місцями;

Б) при одночасній перестановці елементів пар;

В) при одночасній перестановці середніх і крайніх елементів.

2°. Значення складного відношення *змінюється на обернене* при перестановці елементів базисної або подільної пари.

3°. При перестановці середніх або крайніх елементів одержуємо значення складного відношення, доповняльне до одиниці.

4°. Можливі лише шість різних значень складних відношень для вибраної четвірки елементів. Наприклад, якщо $(AB,CD)=\omega$, то маємо

$$(AB,DC)=\frac{1}{\omega},\ (AC,BD)=1-\omega,\ (AC,DB)=\frac{1}{1-\omega},$$

$$(AD,BC)=1-\frac{1}{\omega}=\frac{\omega-1}{\omega},\ (AD,CB)=\frac{\omega}{\omega-1}.$$

5°. Якщо базисна і подільна пари не поділяють одна одну, то значення складного відношення є додатним; якщо базисна і подільна пари поділяють одна одну, то значення складного відношення є від'ємним.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАНИХ ЗАДАЧ

Задача I. Визначити складне відношення, яке утворюють осі прямокутної декартової системи координат з прямими *y = 2x, y = 3x*.

Розв'язання.

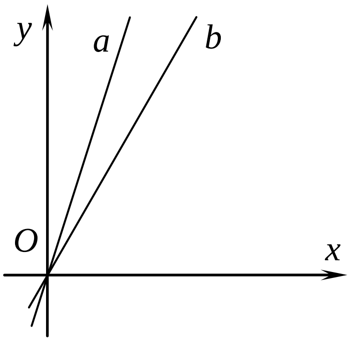


Рис. 4

Нехай пряма *a*: *y = 3x*, пряма *b*: *y = 2x*, тоді $c \equiv Ox$ (її рівняння *y=0*), а $d \equiv Oy$ (її рівняння *x = 0*) (рис. 4).

Випишемо їх кутові коефіцієнти: $k_a=3$, $k_b=2$, $k_c=0$, $k_d=\infty$.

Скористаємось формулою:

$$(ab,cd)=\frac{(ab,c)}{(ab,d)}=\frac{k_c-k_a}{k_b-k_c}\div\frac{k_d-k_a}{k_b-k_d}=$$

$$=\frac{k_c-k_a}{k_b-k_c}\cdot\frac{k_b-k_d}{k_d-k_a}=\frac{k_c-k_a}{k_b-k_c}\cdot\frac{\frac{k_b}{k_d}-1}{1-\frac{k_a}{k_d}}==\frac{0-3}{2-0}\cdot\frac{0-1}{1-0}=\frac{3}{2}.$$

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

Завдання для самоконтролю:

1. Дати означення складного відношення: а) для чотирьох точок ряду; б) для чотирьох прямих пучка.

2. Коли значення складного відношення при перестановці елементів: а) не змінюється; б) змінюється на протилежне; в) є доповнюючим до одиниці.

3. Навести всі можливі значення складного відношення для заданої четвірки елементів ряду чи пучка.

Задачі для роботи на парі:

Задача 1. Для точок *A(3), B(2), C(-3),* заданих декартовими координатами на прямій, знайти значення простих відношень *(AB,C), (AC,B), (BC,A), (BA,C), (CA,B), (CB,A)*.

Задача 2. Точки *A(4), B(-3)* задані декартовими координатами на прямій. Знайти координати точки ***C***, якщо *(AB,C) = -2*.

Задача 3. Точки *A(3), B(2), C(-3), D(1)* задані декартовими координатами на прямій. Знайти всі значення складних відношень, які можна скласти з цих чотирьох точок.

Задача 4. Дано чотири точки прямої *A, B, C, D*. Вони знаходяться на однакових віддалях одна від одної. Обчислити всі значення, які може мати складне відношення цих чотирьох точок.

Задача 5. Визначити усі значення складних відношень, які утворюють осі прямокутної декартової системи координат з прямими $y = 3x$, $y = \frac{x}{2}$ (див. задачу І теми).

Задача 6. Дано простий чотиристоронник *abcd* (сукупність чотирьох прямих, кожні три з яких не проходять через одну точку) і пряму *g*. Треба на цій прямій побудувати чотири точки *A, B, C, D* так, щоб $(AB,CD) = (A_\infty B_\infty, C_\infty D_\infty)$, де через A_∞ ,B_∞ ,C_∞ ,D_∞ позначено невласні точки заданого чотиристоронника.

Домашнє завдання:

Задача 7. Дано три точки *A(0), B(1), C(-2)*. Користуючись методом координат, визначити четверту точку *D*, якщо *(AB,CD) = -3*.

Задача 8. Кут *(а^в)* = 60°. Пряма ***с*** ділить його на 2 кути ***(а^с)*** і ***(в^с)*** так, що відношення їх градусних мір дорівнює $-\frac{1}{3}$; -1; 0; $\frac{1}{3}$; 3. Визначити відповідні значення *(ав,с)*.

Задача 9. Дано три точки *A(-3), B(1), C(5)* відносно декартової системи координат на прямій. Визначити координати точки *D*, якщо *(AC,BD) = 4*.

Задача 10. Знайти всі значення складного відношення для чотирьох точок прямої *A(0), B(5), C(2), D(3)*.

Задача 11. Дано чотири прямі пучка своїми рівняннями *y = x, y = 2x, y = = 3x, y = 4x*. Знайти всі значення складних відношень, які можна скласти з цих чотирьох прямих.

Задача 12. Чотири прямі пучка задано рівняннями: $y = \frac{x}{2}$, $y = x$, $y = 3x$, *y = 2x*. Знайти всі значення складного відношення для цих чотирьох прямих пучка.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 3

Тема: *Гармонізм*

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТЕМИ

Означення. Чотири точки *A, B, C, D* однієї прямої називаються *гармонічно розміщеними*, якщо їх подвійне відношення дорівнює -1, тобто $(AB,CD)=-1$.

Означення. Повним чотирикутником (чотирьохвершинником) називають конфігурацію, яка складається з 4 точок, три з яких не лежать на одній прямій, та з усіх прямих (шести), які сполучають кожну пару цих точок.

Властивості повного чотирьохвершинника.

1°. На кожній діагоналі повного чотирьохвершиннка розміщена гармонічна група точок, утворена двома діагональними точками і точками перетину цієї діагоналі з сторонами, які проходять через третю діагональну точку.

2°. На кожній стороні повного чотирьохвершиннка є гармонічна група точок, утворена парою вершин, діагональною точкою і точкою перетину цієї сторони з діагоналлю, яка проходить через дві інші діагональні точки.

Побудова четвертої гармонічної точки до трьох заданих A, B, C:

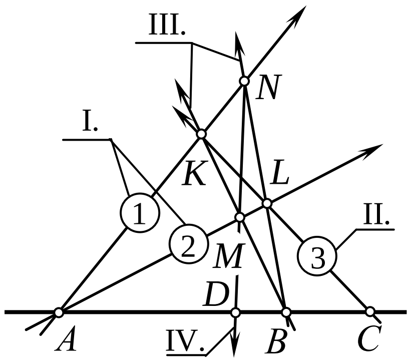


Рис. 5

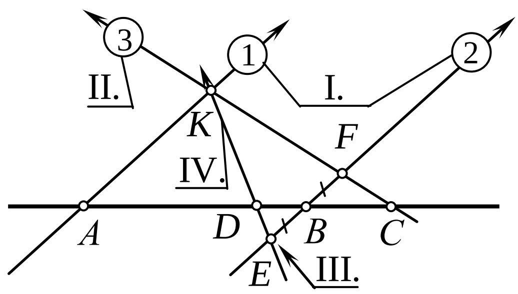


Рис. 6

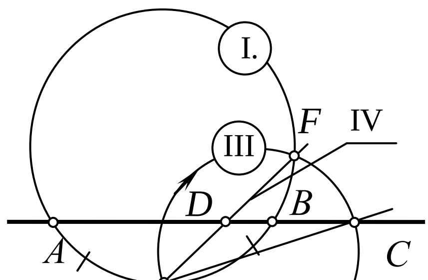


Рис. 7

Перший метод (повного чотирикутника): I. Через точку *A* проводимо довільні прямі 1 і 2. II. Через точку *C* проводимо довільну пряму 3 та фіксуємо точки перетину з прямими 1 і 2 (точки *K* і *L*.) III. Проводимо прямі *BK* і *BL* та знову фіксуємо точки *M* і *N*. IV. Пряма *NM* в перетині з заданою дасть шукану точку *D (рис. 5)*.

Другий метод (подібних трикутників): I. Через точки *A* і *B* проводимо довільні паралельні прямі 1 і 2. II. Через точку *C* проводимо довільну пряму 3 та фіксуємо точки перетину з прямими 1 і 2 (точки *K* і *F*.) III. Відкладаємо відрізок *BE* рівний відрізку *BF*. IV. Пряма *EK* в перетині з заданою дасть шукану точку *D (рис. 6)*.

Третій метод (кіл): I. Через точки *A* і *B* проводимо коло довільного радіуса. II. Ділимо дугу *AB* навпіл – точкам *E*. III. Проводимо коло з діаметром рівним ЕС і яке проходить через ці точки. IV. Пряма *EF* в перетині з заданою дасть шукану точку *D*.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАНИХ ЗАДАЧ

Задача I. Дві пари прямих *a, b* і *c, d* перетинаються відповідно в недоступних точках *A* і *B*. Користуючись тільки однією лінійкою, побудувати довільний відрізок прямої *AB*.

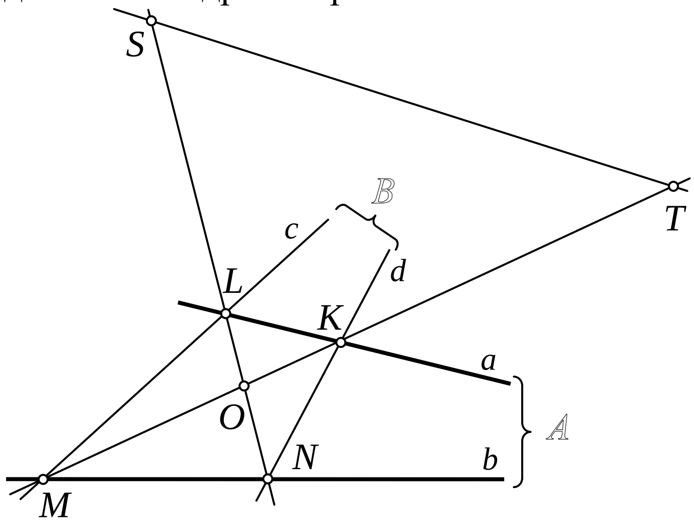


Рис. 8

Розв'язання.

Позначимо точки перетину прямих: точка *M* – точка перетину прямих *c* і *b*, точка *N* – точка перетину прямих *b* і *d*, точка *K* – точка перетину прямих *a* і *d*, точка *L* – точка перетину прямих *a* і *c*, тоді точка *O* – точка перетину прямих *MK* і *LN* (рис. 8).

Отже, *MNKL* – повний чотирикутник (в ньому точки *A* і *B* – діагональні). Для спрощення запису нехай *AB* – це діагональ *x*.

За властивістю повного чотирикутника *MK* перетинає діагональ *x* в точці *T*, що є гармонічно спряженою з точкою О відносно пари *MK*. Аналогічно *LN* перетинає діагональ *x* в точці *S*, що є гармонічно спряженою з точкою О відносно пари *LN*. Отже, *ST* – шуканий відрізок *AB*.

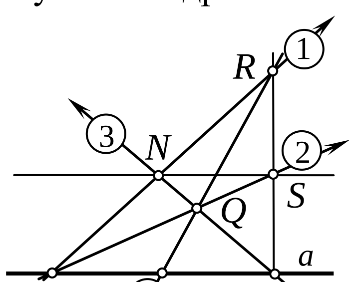


Рис. 9

Задача II. На прямій *a* дано відрізок *AB* і його середину *M*. Тільки за допомогою лінійки через точку поза прямою *N* провести пряму, паралельну до заданої прямої *a*.

Розв'язання.

За змістом задача належить до конструктивних задач евклідової площини. Доповнивши евклідову площину невласними елементами і використавши, що середина *M* і невласна точка прямої *a* гармонічно спряжені з кінцями відрізка *AB*, матимемо задачу про побудову четвертої гармонічної точки до трьох заданих точок *A, B, M* (рис. 9).

Нехай *AN* – це пряма 1, також через А проводимо довільну пряму 2. Нехай *BN* – це пряма 3. Позначимо точкою *Q* перетин прямих 2 і 3, тоді пряма *MQ* – це пряма 4. Позначимо точкою *R* перетин прямих 1 і 4. Сполучаємо *B* і *R*. Перетин 2 і *BR* позначимо точкою *S*. Отримали $NS \parallel a$.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

Завдання для самоконтролю:

1. Дати означення повного чотирикутника.
2. Дати означення гармонізму.
3. Чому в означенні гармонізму присутній знак “мінус”?
4. Пояснити побудову четвертої гармонічної точки: 1) за допомогою повного чотирикутника; 2) за допомогою подібних трикутників; 3) за допомогою кола.

Задачі для роботи на парі:

Задача 1. Дано три точки прямої *A(3), B(-1), C(-2).* Знайти четверту гармонічну, беручи за спряжену їй точку *A*; точку *B*; точку *C*.

Задача 2. Три точки невласної прямої задано як невласні точки сторін *a, b, c* даного трикутника *ABC*. Побудувати на невласній прямій четверту гармонічну точку.

Задача 3. Дано три паралельні прямі *a, b, c*, що є променями пучка з невласним центром. Побудувати в цьому пучку четвертий промінь *d*, гармонічно спряжений з променем ***c*** відносно пари променів *a* і *b*.

Задача 4. Довести, що відповідною четвертою гармонічною точкою до середини відрізка є невласна.

Задача 5. Див. задачу І теми.

Задача 6. На одній з двох паралельних прямих дано відрізок. Тільки за допомогою лінійки поділити його навпіл.

Задача 7. Див. задачу ІІ теми.

Задача 8. Тільки за допомогою лінійки через точку, що не належить двом паралельним прямим, провести пряму, яка паралельна до заданих.

Домашнє завдання:

Задача 9. Дано три прямі *a, b, c* одного пучка. Побудувати четверту пряму, гармонічно спряжену з прямою ***c***.

Задача 10. На одній із двох паралельних прямих дано відрізок *AB* і точку *C*. Тільки за допомогою лінійки побудувати відрізок *CD*, рівний довжині відрізка *AB*.

Задача 11. Дано три точки прямої *A(2), B(-3), C(-2)* декартовими координатами на прямій. Знайти четверту гармонічну, беручи за спряжену їй точку *A*; точку *B*; точку *C*.

Задача 12. Дано дві паралельні прямі. На одній з них взято відрізок. Тільки за допомогою лінійки збільшити його в *n* раз.

Задача 13. Дано дві паралельні прямі. На одній з них взято відрізок. Тільки за допомогою лінійки поділити його на *n* рівних частин.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 4

Тема: *Проективна відповідність рядів і пучків*

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТЕМИ

Означення. Відповідність між точками прямолінійного ряду і прямими пучка називається *перспективною*, якщо точки ряду проектуються відповідними прямими пучка.

Означення. Прямолінійний рід точок і пучок прямих називаються *перспективними*, якщо між їх відповідними елементами встановлена перспективна відповідність $\left(\overline{\overline{\wedge}}\right)$.

Властивість перспективних ряду та пучка.

Подвійне відношення чотирьох точок прямолінійного ряду дорівнює подвійному відношенню чотирьох прямих пучка, перспективного цьому ряду.

Означення. Два ряди точок називаються *перспективними*, якщо їх відповідні точки проектуються одними й тими самими прямими пучка прямих.

Означення. Два пучки прямих називаються *перспективними*, якщо вони проектують з різних центрів один і той же ряд точок.

Означення. Відповідність між елементами образів першого ступеня називається *проективною*, якщо вона є результатом скінченного числа послідовно виконаних перспективних відображень.

Означення. Прямолінійний рід точок і пучок прямих називаються *проективними*, якщо між їх відповідними елементами встановлена проективна відповідність $\left(\overline{\wedge}\right)$.

Означення. Будь-які дві форми першого ступеня, у яких подвійні відношення довільних чотирьох пар відповідних елементів рівні між собою, називаються *проективними (за Штейнером)*.

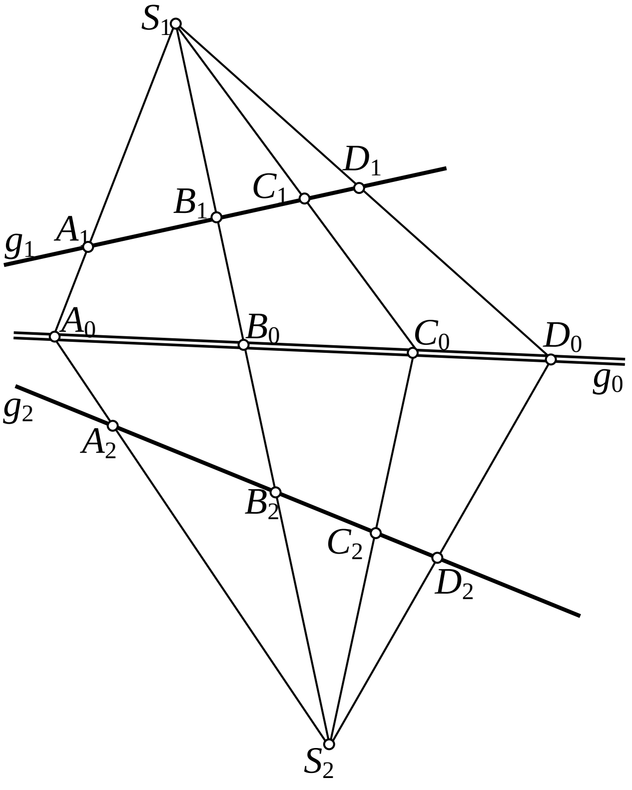


Рис. 8

Основна теорема проективної відповідності за Штейнером: проективна відповідність двох форм першого ступеня цілком визначається заданням трьох пар відповідних елементів.

Критерій перспективності.

Для того щоб дві форми першого ступеня були перспективним необхідно і достатньо, щоб їх спільний елемент сам собі відповідав.

Базові побудови відповідних елементів проективної відповідності форм першого ступеня:

Побудова 1. Проективна відповідність двох прямолінійних рядів g_1 і g_2 задана трьома парами відповідних точок A_1 і A_2, B_1 і B_2, C_1 і

C_2. Побудувати скільки завгодно пар відповідних точок.

Скористаємося критерієм перспективності двох форм першого ступеня (Рис. 8).

Будемо шукати відповідну точку D_2 ряду g_2 для обраної точки D_1 ряду g_1. Наприклад, на B_1B_2 вибираємо довільно точки S_1 і S_2 – центри перспективних пучків до рядів g_1 і g_2. $S_1A_1 \cap S_2A_2 = A_0$, $S_1C_1 \cap S_2C_2 = C_0$. Одержали ряд $g_0(A_0, B_0, C_0)$.

За умовою $g_1 \overline{\wedge} g_2$, за побудовою $g_1 \overset{=}{\wedge} S_1$, $g_2 \overset{=}{\wedge} S_2$. Ряд g_0 – перспективний і до пучка S_1, і до ряду g_1. Аналогічно, ряд g_0– перспективний і до пучка S_2, і до ряду g_2.

Отже, складне відношення відповідних елементів рядів g_0, g_1, g_2 рівні. Тому $S_1D_1 \cap g_0 = D_0$, а $S_2D_0 \cap g_2 = D_2$ – шукана точка.

Побудова 2. Проективна відповідність двох пучків S_1 і S_2 задана трьома парами відповідних прямих a_1 і a_2, b_1 і b_2, c_1 і c_2. Побудувати скільки завгодно пар відповідних прямих.

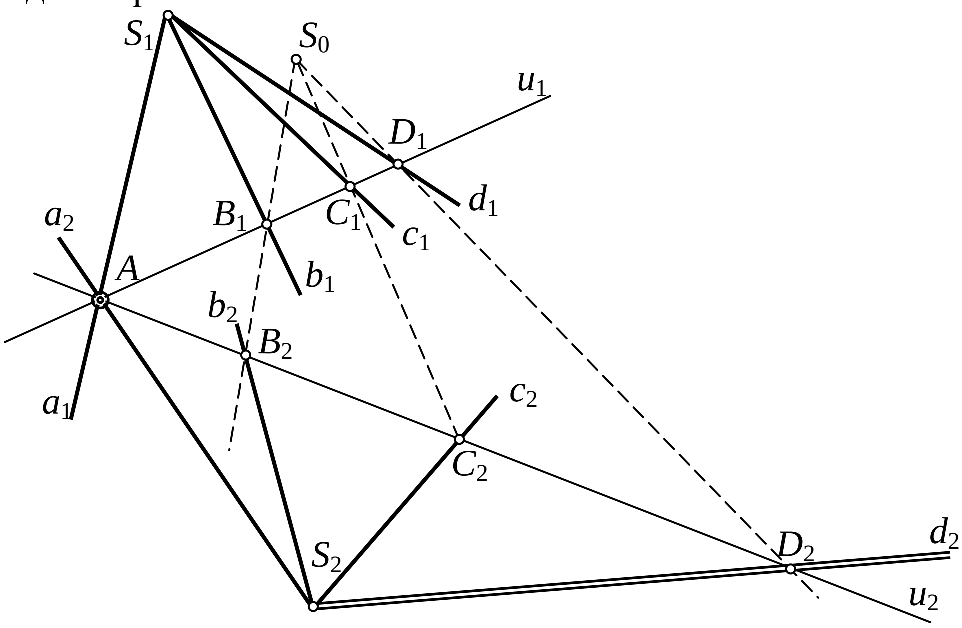


Рис. 9

Аналогічно до попереднього випадку скористаємося критерієм перспективності двох форм першого ступеня (рис. 9).

Будемо шукати відповідну пряму d_2 пучка S_2 для обраної прямої d_1 пучка S_1. Наприклад, через перетин прямих a_1 і a_2 вибираємо довільно носії прямолінійних рядів u_1 і u_2 – перспективні ряди до пучків S_1 і S_2: $u_1(A, B_1, C_1, D_1)$ та $u_2(A, B_2, C_2)$. $B_1B_2 \cap C_1C_2 = S_0$.

За умовою $S_1 \overline{\wedge} S_2$, за побудовою $u_1 \overset{=}{\wedge} S_1$, $u_2 \overset{=}{\wedge} S_2$.

Пучок S_0 – перспективний і до пучка S_1, і до ряду u_1. Аналогічно, пучок S_1– перспективний і до пучка S_2, і до ряду u_2.

Отже, складне відношення відповідних елементів пучків S_0, S_1, S_2 рівні. Тому $S_0D_1 \cap u_2 = D_2$, а $S_2D_2 \equiv d_2$ – шукана пряма.

Побудова 3. Проективний ряд і пучок задано трьома парами відповідних елементів: $S(a, b, c) \overline{\wedge} u(A, B, C)$. Для довільної точки D ряду u побудувати відповідний промінь d пучка S.

Скориставшись означенням перспективної відповідності між рядом і пучком першого порядку, зведемо розв'язання даної задачі до першої побудови.

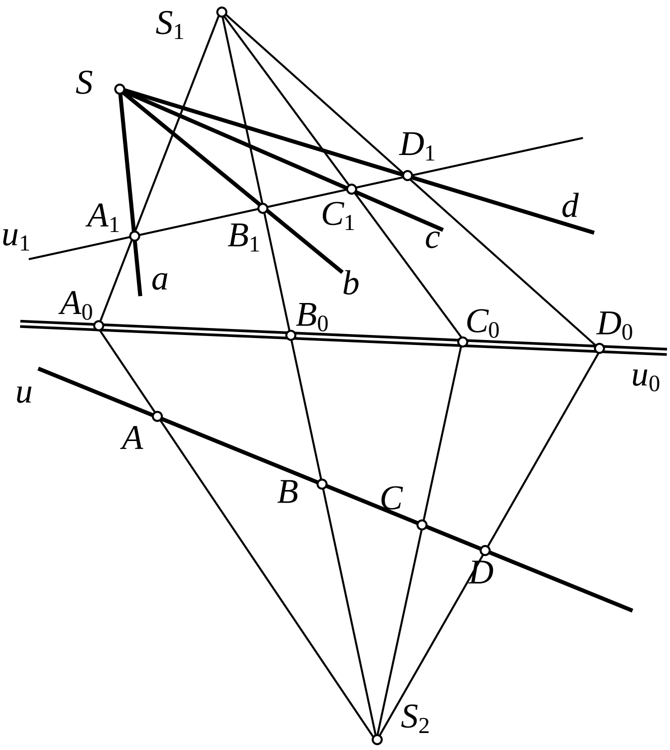


Рис. 10

За умовою $u \overline{\wedge} S$ (рис. 10). Переріжемо пучок S якоюсь прямою l, тому $u_1 \overline{\overline{\wedge}} S$. Тоді стверджуємо, що $u \overline{\wedge} u_1$.

Будемо шукати відповідну точку D_1 ряду u_1 для обраної точки D ряду u. Наприклад, на B_1B вибираємо довільно точки S_1 і S_2 – центри перспективних пучків до рядів u_1 і u. $S_1A_1 \cap S_2A = A_0$, $S_1C_1 \cap S_2C = C_0$.

Одержали ряд $u_0(A_0, B_0, C_0)$ – перспективний і до пучка S_1, і до ряду u_1. Аналогічно, ряд u_0– перспективний і до пучка S_2, і до ряду u.

Отже, складне відношення відповідних елементів рядів u_0, u_1, u рівні. Тому $S_2D \cap u_0 = D_0$, а $S_1D_0 \cap u_1 = D_1$ і $SD_1 \equiv d$ – шуканий промінь.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАНИХ ЗАДАЧ

Задача I. Проективну відповідність між точками двох проективних рядів зі спільним носієм задано трьома парами відповідних точок A_1 і A_2 , B_1 і B_2 , C_1 і C_2. Побудувати точку D_1 , що відповідає заданій точці D_2 .

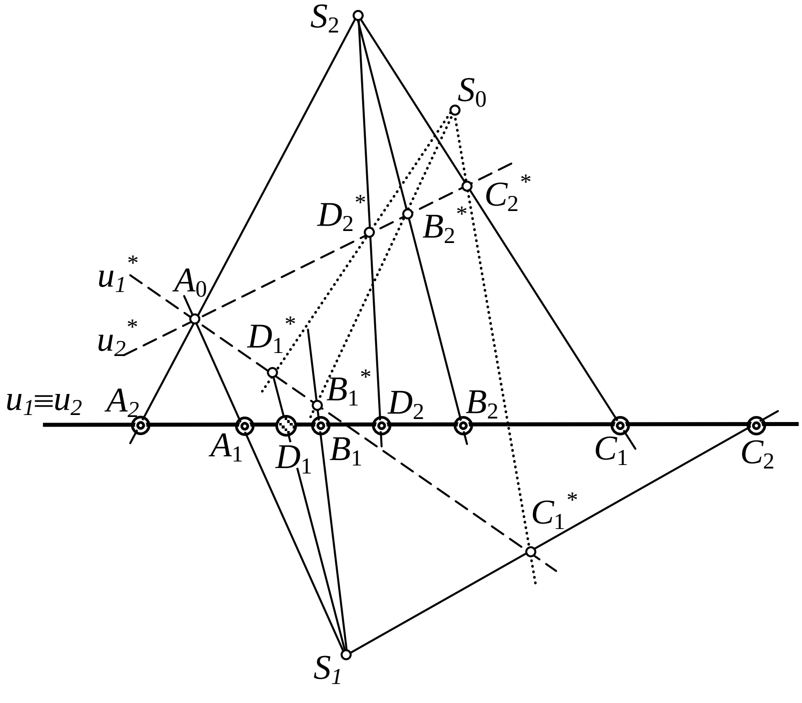


Рис. 11

Розв'язання.

Розведемо відповідні елементи двох проективних рядів зі спільним носієм u_1 і u_2 за допомогою перспективних до них пучків S_1 і S_2 (рис. 11).

Далі розв'язання даної задачі звелось по другої побудови, поданої в теоретичних відомостях.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

Завдання для самоконтролю:

1. Дайте означення перспективної відповідності прямолінійного ряду і пучка. Наведіть приклади перспективної відповідності форм І-го ступеня.

2. Дайте означення проективності за Штейнером.

3. Як однозначно можна задати проективну відповідність двох форм І-го ступеня?

4. Наведіть приклади побудови відповідних елементів проективної відповідності форм І-го ступеня.

Задачі для роботи на парі:

Задача 1. Дано три пари відповідних точок двох проективних рядів. Побудувати точку одного ряду, що відповідає невласній точці другого ряду, і навпаки.

Задача 2. Яку особливість мають два перспективні ряди, якщо центр їх перспективи є невласною точкою?

Задача 3. Дано три пари відповідних променів двох проективних пучків. Побудувати промені, що відповідають спільному променю обох пучків, вважаючи, що він належить спочатку одному, а потім другому пучку.

Задача 4. Дано три пари відповідних точок двох проективних рядів. Побудувати точки, що відповідають спільній точці обох рядів, відносячи її спочатку до одного, а потім до другого ряду.

Задача 5. Див. задачу І теми.

Домашнє завдання:

Задача 6. Відповідність двох перспективних пучків з невласними центрами S_∞ і S'_∞ визначається двома парами відповідних прямих $a \parallel b$, $a' \parallel b'$. Побудувати пряму c пучка S_∞, що відповідає заданій прямій c' пучка S'_∞.

Задача 7. На двох прямих розміщено два проективні ряди точок g_1 і g_2. Нехай точці A_1 першого ряду відповідає точка A_2 другого ряду. Довести, що якщо з точки A_1 спроектувати ряд точок g_2, а з точки A_2 – ряд точок g_1, то утворені пучки будуть перспективними.

Задача 8. Побудувати на спільному носії $\boldsymbol{u}$ два проективні ряди g_1 і g_2, які мають 1) одну подвійну точку; 2) дві подвійні точки.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 5

Тема: *Інволюція*

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТЕМИ

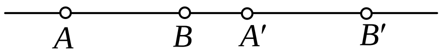
Якщо між точками двох рядів із спільним носієм встановлена така проективна відповідність, при якій одна пара точок відповідає одна одній взаємно, то й кожна пара відповідних точок цих рядів відповідає одна одній взаємно.

Означення. Проективна відповідність між двома рядами точок із спільним носієм, при якій кожна пара відповідних точок є взаємно відповідною, називається ***інволюційною відповідністю*** або просто ***інволюцією*** (аналогічним є означення інволюційної відповідності проективних пучків прямих із спільним носієм).

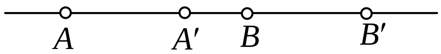
Інволюція у формах першого ступеня повністю *визначається* заданням двох пар відповідних елементів.

Види інволюції.

Інволюція форм першого ступеня, в якій не існує дійсних подвійних елементів, називається *еліптичною* $(A,A')\div(B,B')$.



Інволюція форм першого ступеня, в якій є два подвійні елементи, називається *гіперболічною* $(A,A')\ddot{-}(B,B')$.



Подвійні елементи гіперболічної інволюції гармонічно розділяють кожну пару відповідних елементів.

Друга теорема Дезарга: три пари точок перетину протилежних сторін повного чотирьохвершинника з довільною прямою належать одній і тій самій інволюції.

Друга теорема Дезарга (для пучків прямих): три пари протилежних вершин повного чотиристоронника проектуються з довільної точки площини трьома парами прямих, належних одній і тій самій інволюції прямих.

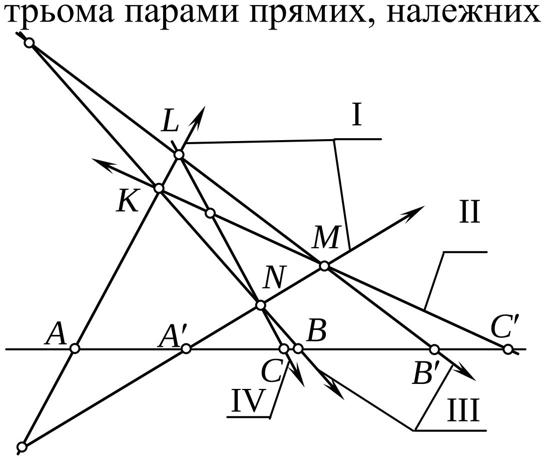


Рис. 12

Побудова відповідних точок в заданій інволюції за допомогою повного чотирьохвершинника.

При побудові використаємо другу теорему Дезарга (рис. 12).

I. Через точки A і A′ проводимо дві довільні прямі. II. Через точку C′ проводимо довільну пряму і зафіксуємо точки K та M. III. Проводимо прямі KB і MB′ та фіксуємо точки N і L. IV. Пряма LN в перетині з заданою дасть шукану точку C.

Побудова відповідних точок в заданій інволюції за допомогою пучків кіл.

Довільна пряма перетинає кожне коло даного пучка кіл у парах точок однієї інволюції.

1) гіперболічна інволюція (дві подвійні точки X і Y, точка O – центр інволюції) (рис. 13).

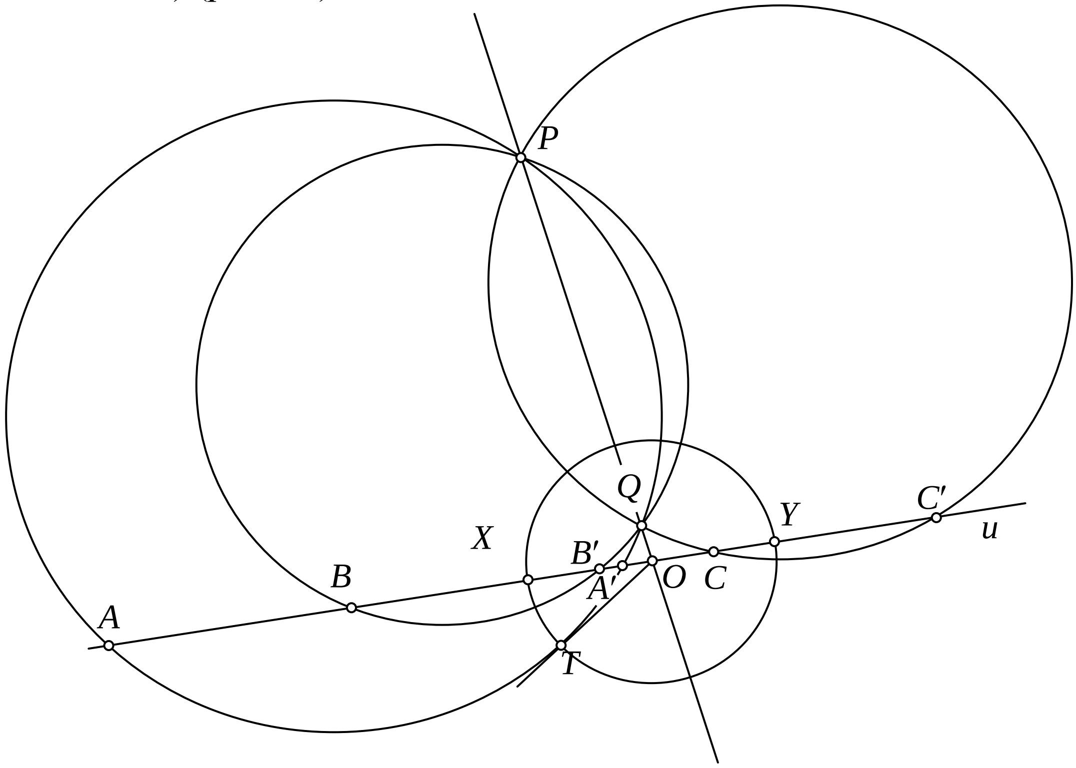


Рис. 13

2) еліптична інволюція (подвійних точок немає) (рис. 14).

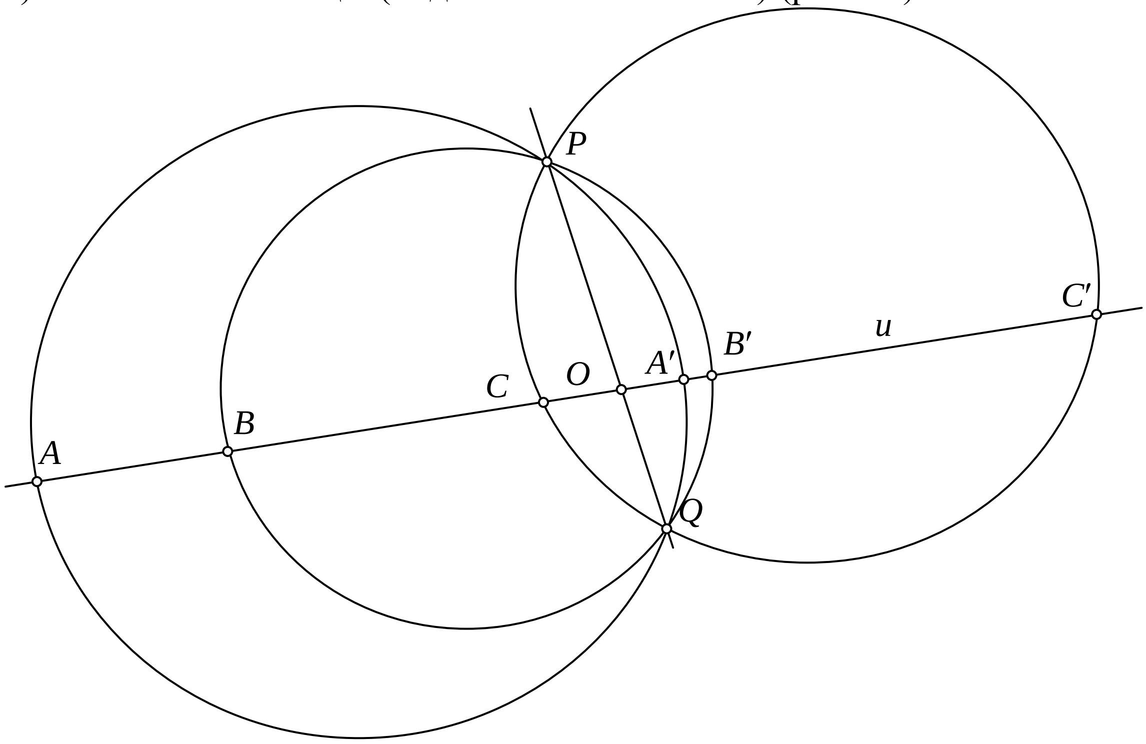


Рис. 14

3) параболічна інволюція (одна подвійна точка) (рис. 15).

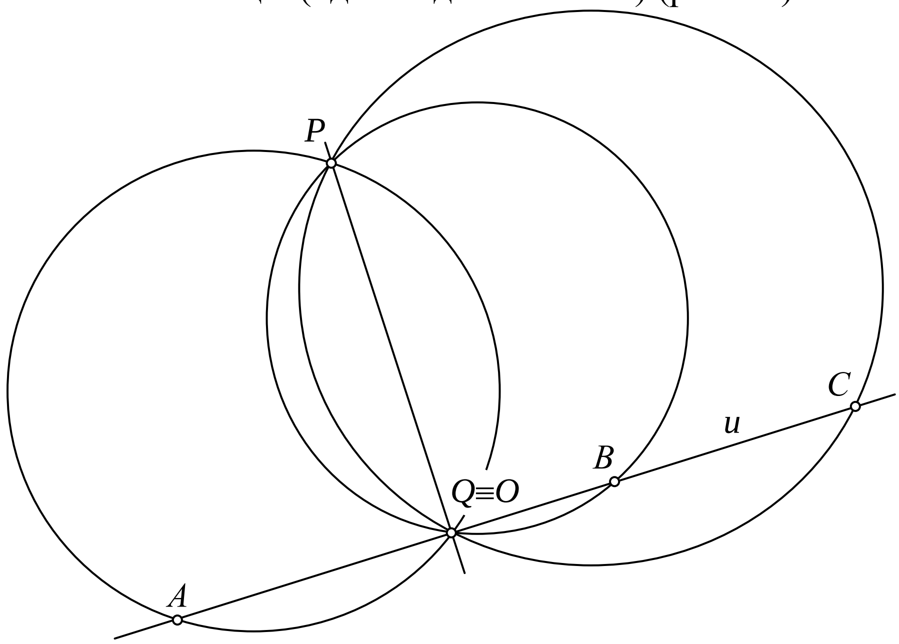


Рис. 15

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАНИХ ЗАДАЧ

Задача I. Гіперболічна інволюція в пучку задана двома парами відповідних прямих a_1 і a_2 , b_1 і b_2 . Побудувати пряму c_2, відповідну до заданої прямої c_1 у цій інволюції.

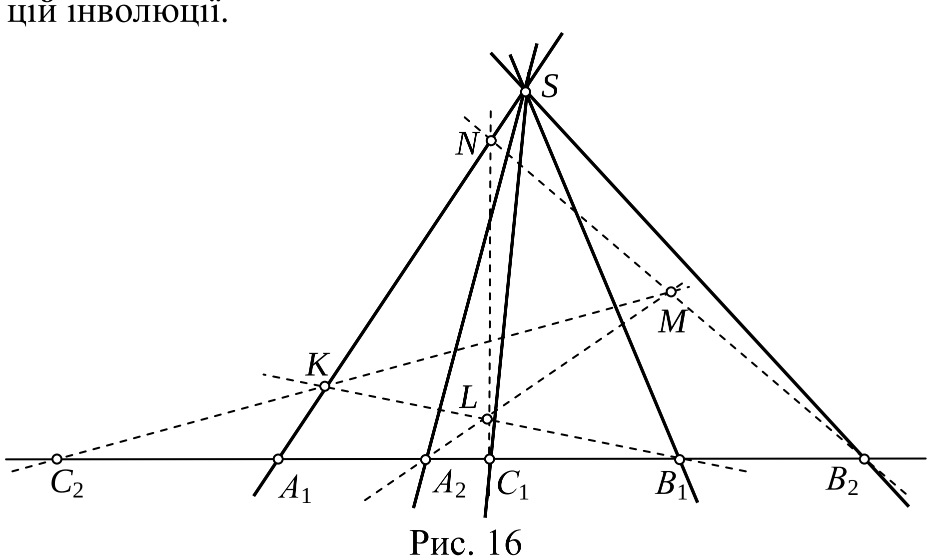


Рис. 16

Розв'язання.

Нехай гіперболічна інволюція пучків із спільним носієм $S = S_1 = S_2$ визначена парами прямих a_1 і a_2 **,** b_1 і $b_{2.}$. Перетнемо прямі пучків довільною прямою u, на ній одержимо два ряди точок $u_1(A_1,B_1,\ldots)$ і $u_2(A_2,B_2,\ldots)$, які теж утворюють гіперболічну інволюцію. Прямій c_1 на прямій u відповідає точка C_1. За другою теоремою Дезарга побудуємо точку C_2, інволюційно відповідну точці C_1 у даній інволюції ($KLMN$ – повний чотирьохвершинник). Пряма $SC_2 = S_2C_2$ буде шуканою прямою c_2 (рис. 16).

Задача II. Еліптична інволюція на прямій u задана двома парами відповідних точок A_1 і A_2 , B_1 і B_2 . Побудувати за допомогою пучка кіл центр інволюції і точку C_2, що відповідає заданій точці C_1 .

Розв'язання.

Через задані точки A_1 і A_2 , B_1 і B_2 проводимо довільні кола ω_1 і ω_2. Їх перетин – PQ (радикальна вісь пучка кіл). $PQ \cap u = O$ – шуканий центр інволюції (рис. 17).

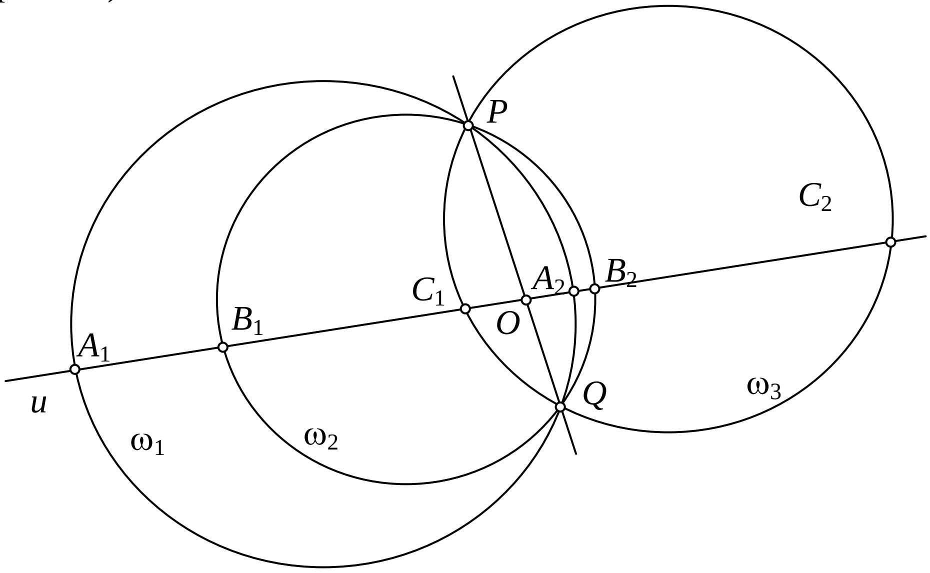


Рис. 17

Щоб знайти точку C_2, проводимо через точки P, Q і C_1 коло ω_3 і шукаємо перетин кола ω_3 з прямою u.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

Завдання для самоконтролю:

1. Дайте означення інволюції.
2. Наведіть простий приклад інволюції з елементарної математики.
3. Сформулюйте ознаку інволюції.
4. Чим задається інволюція?
5. Як розташовані пари відповідних елементів у різних видах інволюції?
6. Сформулюйте другу теорему Дезарга.

Задачі для роботи на парі:

Задача 1. Проективна відповідність гіперболічного виду між двома прямолінійними рядами точок g_1 і g_2 на спільному носії u задано трьома парами відповідних точок A_1 і A_2 , B_1 і B_2 , C_1 і C_2 . Для даної точки D_1 ряду g_1 знайти відповідну точку D_2 ряду g_2 .

Задача 2. Еліптична інволюція на прямій u задана двома парами відповідних точок A_1 і A_2 , B_1 і B_2. Побудувати за допомогою односторонньої лінійки точку C_2, що відповідає точці C_1 у цій інволюції.

Задача 3. Див. задачу I теми.

Задача 4. Див. задачу II теми.

Задача 5. Гіперболічна інволюція на прямій u задана двома парами відповідних точок A_1 і A_2 , B_1 і B_2 . Побудувати за допомогою пучка кіл центр інволюції, подвійні точки інволюції і точку C_2, що відповідає заданій точці C_1 .

Домашнє завдання:

Задача 6. Гіперболічна інволюція на прямій u задана двома парами відповідних точок A_1 і A_2 , B_1 і B_2 . Побудувати за допомогою односторонньої лінійки точку C_2, що відповідає точці C_1 у цій інволюції.

Задача 7. Еліптична інволюція в пучку задана двома парами відповідних прямих a_1 і a_2 , b_1 і b_2 . Побудувати пряму c_2, відповідну до заданої прямої c_1 у цій інволюції (за допомогою пучка кіл).

Задача 8. Гіперболічна інволюція в пучку задана двома парами відповідних прямих a_1 і a_2 , b_1 і b_2 . Побудувати пряму c_2, відповідну до заданої прямої c_1 у цій інволюції (за допомогою пучка кіл).

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 6

Тема: ***Колінеарна відповідність. Гомологія***

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТЕМИ

Означення. Колінеарним відображенням (колінеацією) двох плоских полів називається таке взаємно однозначне відображення їх елементів, при якому:

1) кожній точці одного поля відповідає точка другого;
2) кожній прямій одного поля відповідає пряма другого;
3) парі інцидентних елементів одного поля відповідає також пара інцидентних елементів другого.

Властивості колінеарного відображення.

1°. Відповідні форми першого ступеня двох колінеарних полів завжди проективні.

2°. Колінеарне перетворення плоских полів ω і ω' повністю визначається проективним перетворенням поля ω в поле ω'.

3°. Колінеація двох плоских полів ω і ω' повністю визначається заданням чотирьох пар відповідних точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій.

Перспективна колінеація двох плоских полів із спільним носієм має наступні *властивості*:

1. Якщо два колінеарні поля зі спільним носієм мають чотири подвійні точки, жодні три з яких не лежать на одній прямій, то такі колінеарні поля тотожні.
2. Якщо два колінеарні поля зі спільним носієм мають чотири подвійні прямі, жодні три з яких не проходять через одну точку, то такі колінеарні поля тотожні.
3. Два нетотожні колінеарні поля зі спільним носієм можуть мати спільний трикутник, вершини і сторони якого самі собі відповідають.
4. Якщо колінеація має точково-інваріанту пряму, то всі прямі, які сполучають відповідні точки, подвійні.

5. Точка перетину двох подвійних прямих при колінеації подвійна.
6. Нетотожна колінеація, яка має точково-інваріанту пряму s, може мати не більше однієї подвійної точки S, яка не належить прямій s, притому всі подвійні прямі проходять через точку S.

Означення. Колінеарна відповідність двох плоских полів із спільним носієм, в якій існує точково-інваріантна пряма s і одна подвійна точка S, що не належить прямій s, називається ***гомологією***. Точка S називається *центром гомології*, а пряма s – *віссю гомології*.

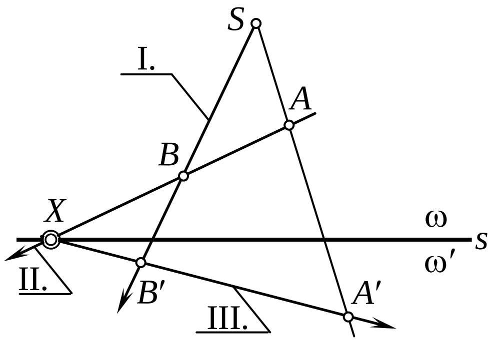


Рис. 18

Властивості гомології.

1°. Усі точки осі гомології подвійні.

2°. Два трикутники, які задовольняють теорему Дезарга – гомологічні. Точка Дезарга – центр гомології, дезаргова пряма – вісь гомології.

3°. Перетворення площини в себе, що визначається гомологією, називається перетворенням гомології або просто гомологією.

4°. Перетворення гомології на площині повністю визначається заданням осі s, центра S і однієї пари відповідних точок.

Побудова відповідних точко гомології.

Задано вісь гомології s, центр гомології S і пару відповідних точок A і A′. Для точки $B \in \omega$ побудувати відповідну до неї $B \in \omega'$.

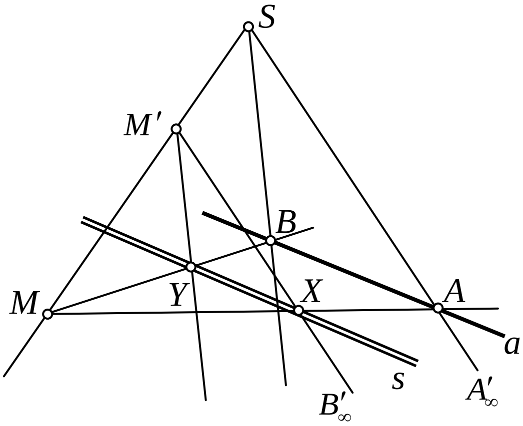


Рис. 19

I. Проводимо пряму SB. II. Проводимо пряму AB та фіксуємо точку $AB \cap s = X$– подвійна точка. III. Пряма XA' в перетині з прямою SB дасть шукану точку B' (рис. 18).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАНИХ ЗАДАЧ

Задача I. Дано центр гомології S, пару відповідних точок M і M' і пару відповідних прямих a і a'_∞. Побудувати вісь гомології s.

Розв'язання.

На прямій a виберемо довільні точки A і B. Оскільки за умовою прямій a відповідає пряма a'_∞, то точці A – точка A'_∞, а точці B – точка B'_∞. За властивістю гомології: $MA \cap M'A'_\infty = X$, $MB \cap M'B'_\infty = Y$, де $XY \equiv s$ – шукана вісь гомології (рис. 19).

Задача II. Гомологію суміщених полів задано віссю ss, центром S і парою відповідних точок A і A'. Побудувати прямі, що відповідають невласній прямій площини, вважаючи її прямою одного або другого плоского поля.

Розв'язання.

Пряма, що відповідає невласній прямій площини, називається *граничною прямою*. Вона паралельна до осі гомології ss, тому досить знайти якусь одну її точку (образ до вибраної невласної точки).

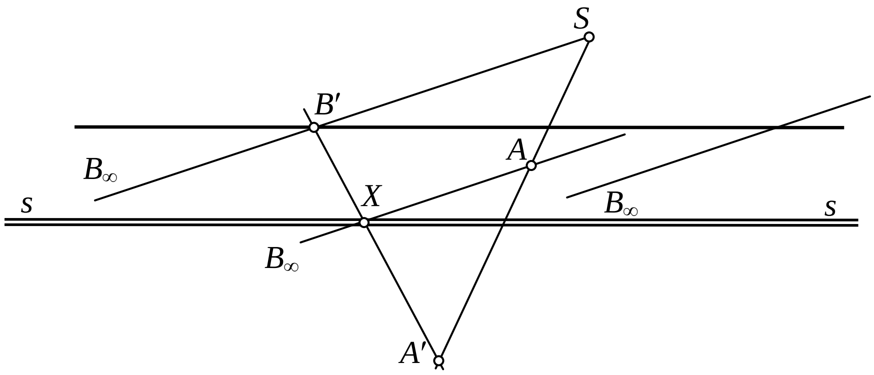


Рис. 20

Перетин прямих (рис. 20), що з’єднують відповідні точки одного поля, належить осі гомології, тому нехай $AB_{\infty} \cap s = X$, отже шукана точка B' – це перетин $A'X$ і SB_{∞}.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

Завдання для самоконтролю:

1. Показати загальний спосіб побудови колінеарності.
2. Чим задається колінеарна відповідність 2 плоских полів?
3. Чим цілком можна задати гомологію?
4. Що називається центром, віссю гомології?
5. Як розміщуються відповідні точки в гомології?

Задачі для роботи на парі:

Задача 1. Задано вісь гомології *ss*, центр гомології S і пару відповідних точок A і A'. Для точки B побудувати відповідну до неї, припускаючи, що вона спочатку належить до поля ω, а потім до поля ω'.

Задача 2. Задано три пари відповідних точок гомології A і A', B і B', C і C'. Побудувати вісь гомології.

Задача 3. Див. задачу I теми.

Задача 4. Див. задачу II теми.

Задача 5. Задано центр, вісь і одну з граничних прямих гомології (розглянути обидва випадки). Побудувати точку M', відповідну до точки M.

Задача 6. Знайти гомологію, вісь якої *ss* проходить через задану точку X_0, а дві задані точки A і B переходять відповідно в задані точки A' і B'.

Домашнє завдання:

Задача 7. Задано вісь гомології *ss*, центр гомології S і пару відповідних точок A і A'. Знайти в цій гомології два будь-які гомологічні трикутники.

Задача 8. Задано центр, вісь і пару відповідних точок гомології. Треба побудувати точку, відповідну до заданої (невласної) точки, яку задають довільною прямою, що проходить через неї.

Задача 9. Задано вісь гомології *ss*, центр гомології S і пару відповідних точок A і A'. На прямій AA' задано точку M. Побудувати відповідну до неї точку M'.

Задача 10. Гомологію, центр якої лежить на її осі *ss*, задано віссю і парою відповідних точок A і A'. Побудувати точку B', відповідну до точки B. Побудувати точку, відповідну до невласної точки прямої AA'.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 7

Тема: ***Гомологія (друге заняття з теми)***

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

Завдання для самоконтролю:

1. Чим цілком можна задати гомологію?
2. Що називається центром, віссю гомології?
3. Як розміщуються відповідні точки в гомології?
4. Яка пряма називається граничною?

Задачі для роботи на парі:

Задача 1. Дано центр S, вісь g і відповідні прямі a і a' гомології. Для даної точки $\boldsymbol{M}$ поля $\boldsymbol{w}$ побудувати відповідну точку M' поля ω'.

Задача 2. Гомологія задана невласним центром S_∞, власною віссю g і парою відповідних точок A і A'. Побудувати для даної точки M поля w відповідну точку M' поля ω'.

Задача 3. Гомологія задана центром S, парою відповідних точок A і A' і невласною віссю g_∞. Побудувати для даної точки M поля ω відповідну точку M' поля ω'.

Задача 4. Гомологію задано невласним центром S_∞, невласною віссю g_∞ і парою відповідних точок A і A'. Побудувати для даної точки M поля w відповідну точку M' поля w'.

Задача 5. Задано центр S і обидві граничні прямі гомології l і m'. Побудувати вісь і пару відповідних точок гомології.

Задача 6. Дано центр гомології $\boldsymbol{S}$ і дві пари відповідних прямих a і a_∞', b' і b_∞ ($a_\infty' \equiv b_\infty$) плоских полів. Побудувати вісь $\boldsymbol{g}$ гомології.

Задача 7. Гомологію задано центром S, невласною віссю ss_∞ і парою відповідних точок A і A'. На заданих двох негомологічних прямих знайти відповідні точки гомології.

Задача 8. Гомологію задано парою відповідних точок A і A' і двома парами відповідних прямих m і m', n і n'. Для заданої прямої g знайти гомологічну пряму g'.

Домашнє завдання:

Задача 9. Гомологію, центр якої лежить на її осі ss, задано віссю і парою відповідних точок A і A'. У кожному полі побудувати пряму, гомологічну до невласної прямої.

Задача 10. Вісь гомології – невласна пряма, центр – невласна точка. Точці M відповідає точка M'. Побудувати трикутник $A'B'C'$, гомологічний до трикутника ABC.

Задача 11. Дано центр гомології S і дві пари відповідних прямих a і a', b і b'. Побудувати для даної точки M поля ω відповідну точку M' поля w'.

Задача 12. Дано центр гомології S, вісь g і пару відповідних точок A і A_∞'. Побудувати точку B', відповідну до заданої точки B.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 8

Тема: ***Криві ІІ-го порядку. Теорема Паскаля***

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТЕМИ

Означення. Множина точок перетину відповідних прямих двох проективних пучків першого порядку (твірних) називається ***рядом точок другого порядку (лінією другого порядку)***.

Властивості ряду точок другого порядку:°

1. Ряд другого порядку, утворений двома перспективними пучками першого порядку, розпадається на два ряди першого порядку – вісь перспективності твірних пучків і спільної прямої цих пучків.

2. Центри твірних проективних пучків першого порядку належать до точок ряду другого порядку.

3. Довільна пряма не може мати з рядом другого порядку більше двох спільних точок.

4. Прямі твірних пучків, які відповідають спільній прямій, віднесеній до першого або другого пучка, називаються дотичними до ряду другого порядку в точках, що є центрами пучків.

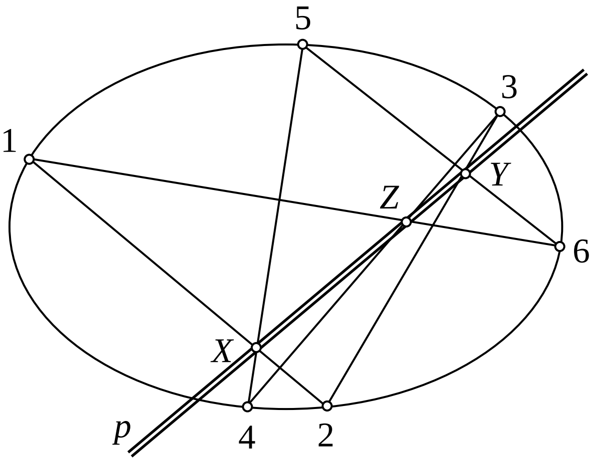


Рис. 21

5. Точки ряду другого порядку проектуються з будь-яких точок цього ряду двома проективними пучками (теорема Штейнера).

6. У кожній точці ряду другого порядку можна побудувати дотичну до цього ряду, і до того ж тільки одну.

7. Ряд точок другого порядку повністю визначається будь-якими його п’ятьма точками, жодні три з яких не лежать на одній прямій.

Означення. Фігура, яка складається із шести точок ряду другого порядку і шести відрізків, які послідовно з’єднують ці точки, називається ***шестивершинником*** (шестикутником), вписаним у лінію другого порядку (рис. 21).

Теорема Паскаля: у кожному шестивершиннику, вписаному в лінію другого порядку, точки перетину пар протилежних сторін лежать на одній прямій (прямій Паскаля).

Схема розв’язування задач на теорему Паскаля:

$$\left.\begin{aligned}(1,2)\cap(4,5)&=X\\(2,3)\cap(5,6)&=Y\\(3,4)\cap(6,1)&=Z\end{aligned}\right\}\text{ – пряма Паскаля } p.$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАНИХ ЗАДАЧ

Задача І. Криву ІІ-го порядку задано п’ятьма точками. Побудувати дотичні до неї в будь-яких двох точках, беручи ці точки за центри пучків, що утворюють задану криву.

Розв'язання.

<u>*І спосіб*</u> *(за означенням):*

Скористаємось властивостями ліній другого порядку та віднесемо спільну пряму *AB* (S_1S_2) до другого пучка, тоді цій прямій буде відповідати пряма, яка буде дотичною в точці *A* (рис. 22)

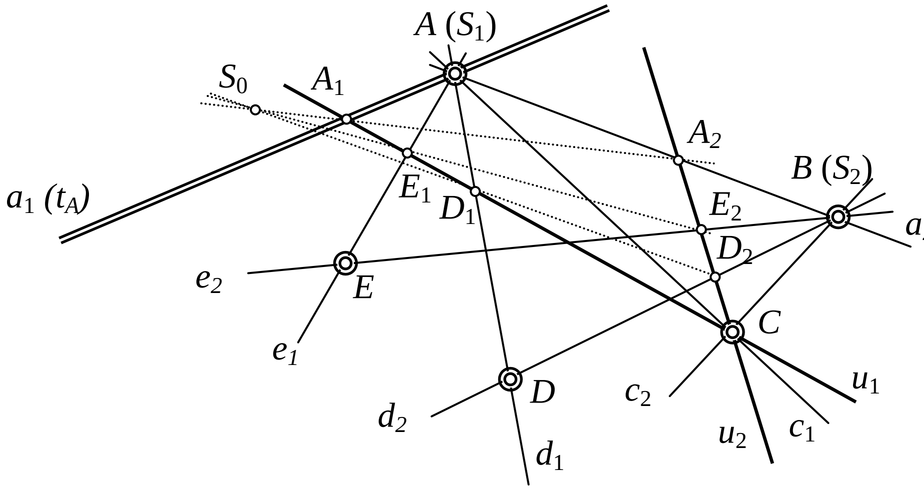


Рис. 22

$A(S_1)(c_1,d_1,e_1)\,\overline{\wedge}\,B(S_2)(a_2,c_2,d_2,e_2)$. $u_1\,\overline{\overline{\wedge}}\,S_1$, $u_2\,\overline{\overline{\wedge}}\,S_2$ (через точку *C*), $S_0\,\overline{\overline{\wedge}}\,u_1$, $S_0\,\overline{\overline{\wedge}}\,u_2$. $a_2\cap u_2=A_2$, $S_0A_2\cap u_1=A_1$, $S_1A_1\equiv t_A$ – шукана дотична.

<u>*ІІ спосіб*</u> *(за теоремою Паскаля)* (рис. 23)*:*

Для розв'язання задачі скористаємося схемою, поданою вище, тому занумеруємо точки наступним чином: *A*≡1≡2 (оскільки в цій точці будемо будувати дотичну), *B*≡3, *C*≡4, *D*≡5, *E*≡6.

За схемою можна побудувати пряму Паскаля p через точки Y і Z, які одержимо як перетини таких прямих: *Y*=(2,3)⌒(5,6), *Z*=(3,4)⌒(6,1). Тому пряма Паскаля *p* в перетині з (4,5) дадуть точку *X*. А пряма (*X*,1≡2) = t_A – шукана дотична.

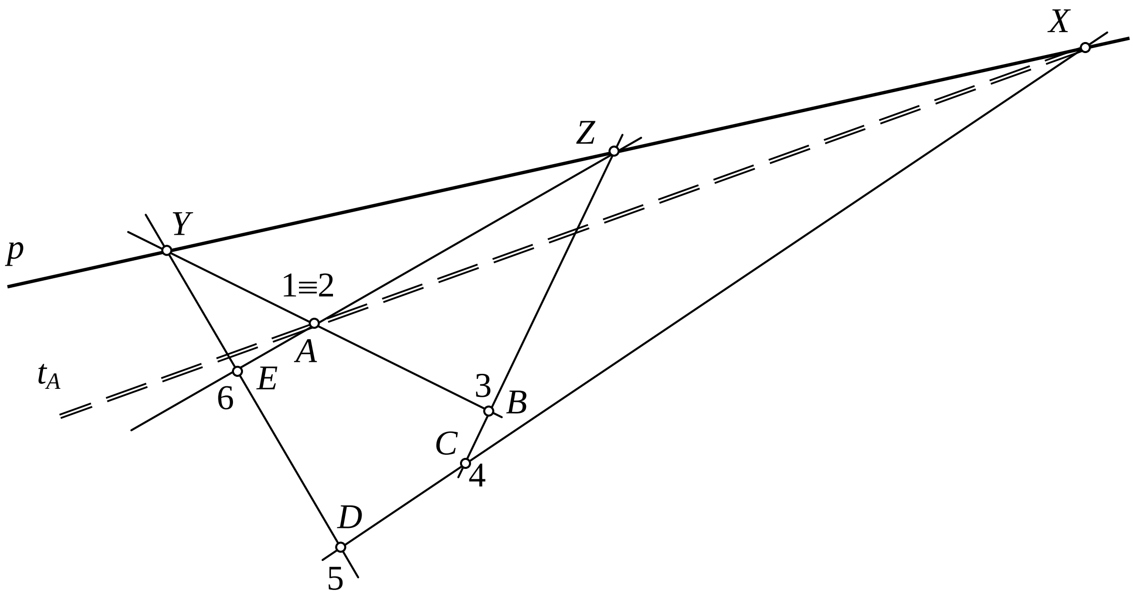


Рис. 23

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

Завдання для самоконтролю:

1. Дайте означення кривої ІІ-го порядку.
2. Перерахуйте властивості кривої ІІ-го порядку.
3. Де лежать центри проективних пучків, що визначають криву ІІ-го порядку?
4. За якої умови крива ІІ-го порядку розпадається на дві прямі?
5. Яка пряма буде дотичною до кривої ІІ-го порядку?
6. Сформулювати основну властивість кривих ІІ-го порядку.
7. Скількома точками задається крива ІІ-го порядку?
8. Поясніть побудову точок кривої ІІ-го порядку за означенням.
9. Сформулюйте теорему Паскаля та її частинні випадки.
10. Поясніть побудову точок кривої ІІ-го порядку за теоремою Паскаля. Запишіть схему побудови.

Побудову в задачах (по можливості) проводити двома способами: за означенням та за теоремою Паскаля.

Задачі для роботи на парі:

Задача 1. Дано п’ять точок *A, B, C, D, E* кривої ІІ-го порядку. Побудувати довільну точку *F* цієї кривої.

Задача 2. Зробити рисунок до теореми Паскаля у випадку, коли пряма Паскаля є невласною.

Задача 3. Дано п’ять точок *A, B, C, D, E* кривої ІІ-го порядку і пряму *CN*. Знайти другу точку перетину прямої *CN* із заданою кривою.

Задача 4. Див. задачу І теми.

Задача 5. Крива ІІ-го порядку задана трьома точками *A, B, C* і двома дотичними t_A і t_B . Через точку *C* проведена пряма *CP*. Побудувати другу точку перетину прямої *CP* з кривою.

Домашнє завдання:

Задача 6. Крива ІІ-го порядку задана трьома точками ***A, B, C*** і дотичними в точках ***A*** і ***B***. Побудувати дотичну в точці ***C***.

Задача 7. Крива ІІ-го порядку задана чотирма точками ***A, B, C, D*** і дотичною в точці ***C.*** Побудувати дотичну в точці ***D.***

Задача 8. Крива ІІ-го порядку задана трьома точками ***A, B, C*** і дотичними в точках ***A*** і ***B***. Побудувати скільки завгодно точок кривої.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 9

Тема: ***Пучки ІІ-го порядку. Теорема Бріаншона***

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТЕМИ

Означення. Множина прямих, які проходять через пари відповідних точок двох проективних рядів точок першого порядку, називається ***пучком прямих другого порядку***.

Властивості пучка прямих другого порядку:

1. Пучок другого порядку, утворений двома перспективними рядами першого порядку, розпадається на два пучки першого порядку – один належить центру перспективності, другий – спільній точці твірних рядів.
2. Носії твірних проективних рядів першого порядку належать до прямих пучка другого порядку.
3. Через довільну точку площини може проходити не більше двох прямих пучка другого порядку.
4. Точки твірних рядів, які відповідають спільній точці, віднесеній до першого або другого ряду, називаються точками дотику пучка другого порядку.
5. Кожна пряма пучка другого порядку має одну і тільки одну точку дотику.
6. Будь-які дві прямі пучка другого порядку можна взяти носіями двох проективних рядів першого порядку, які утворюють цей пучок другого порядку.

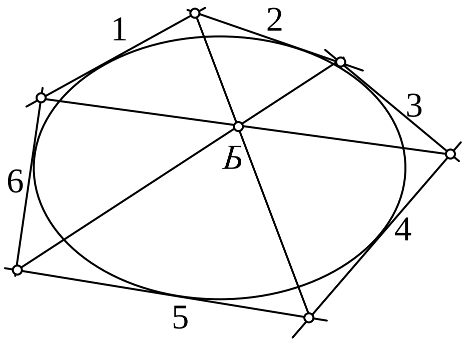


Рис. 24

7. Пучок прямих другого порядку повністю визначається будь-якими п’ятьма прямими, жодні три з яких не належать одній точці.

Означення. Фігура, утворена шістьма прямими пучка другого порядку, жодні три з яких не належать одній точці, називається ***шестисторонником***.

Теорема Бріаншона: у кожному шестисторонику, сторони якого належать прямим пучка другого порядку, три прямі, що сполучають його протилежні вершини, належать одній точці (точці Бріаншона) (рис. 24).

Схема розв’язування задач на теорему Бріаншона:

$$\left.\begin{array}{l}(1,2)-(4,5)\\(2,3)-(5,6)\\(3,4)-(6,1)\end{array}\right\}-Б \text{ – точка Бріаншона}$$

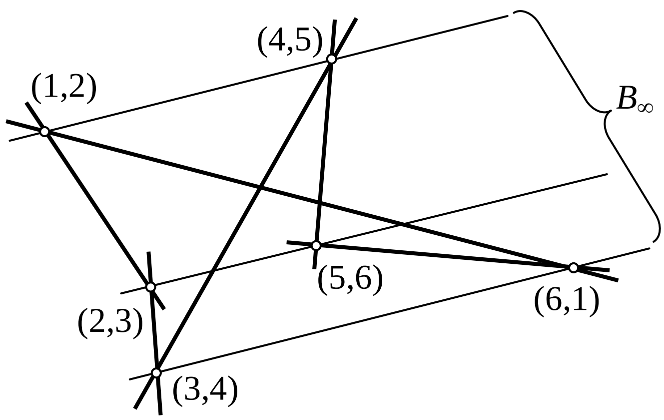


Рис. 25

Задача I. Зробити рисунок до теореми Бріаншона, коли точка Бріаншона є невласною.

Розв'язання.

$$\left.\begin{array}{l}(1,2)-(4,5)\\(2,3)-(5,6)\\(3,4)-(6,1)\end{array}\right\} Б \equiv B_\infty,$$ отже прямі $(1,2)-(4,5)$, $(2,3)-(5,6)$, $(3,4)-(6,1)$ – паралельні (рис. 25).

Задача II. Дано п'ять дотичних до кривої II-го порядку *a, b, c, d, e*. Побудувати шосту дотичну *f*, паралельну до дотичної *b*.

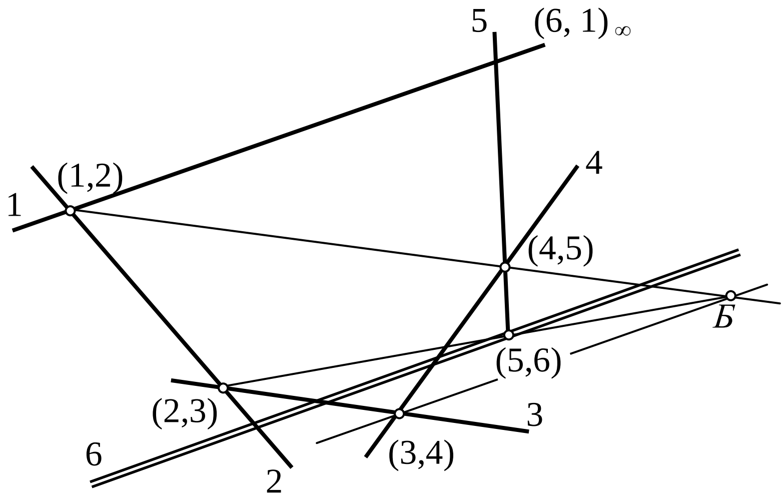


Рис. 26

Розв'язання.

<u>I спосіб</u> (за теоремою Бріаншона):

Нехай дотична 1 паралельна до дотичної 6, точка (6,1) визначається як дотичною 1. Точку Бріаншона ми можемо знайти наступним чином (рис. 26):

$$\left.\begin{array}{l}(1,2)-(4,5)\\(3,4)-(6,1)_\infty\end{array}\right\} Б, \text{ тому}$$

$((2,3)-Б)\cap 5=(5,6)$. Тепер через точку (5,6) паралельно до дотичної 1 проводимо шукану дотичну 6.

<u>II спосіб</u> (за означенням):

Скористаємось означенням пучка другого порядку і, ввівши позначення, будемо працювати з двома проективними рядами: $b\equiv u_1\left(C_1, D_1, E_1, M_{1\infty}\right)$ і $a\equiv u_2\left(C_2, D_2, E_2\right)$. Щоб провести шукану дотичну, знайдемо точку M_2, відповідну до точки $M_{1\infty}$ (див. побудову 1 з практичного заняття № 4).

На C_1C_2 виберемо довільні точки S_1 і S_2 – центри перспективних пучків до рядів u_1 і u_2. $S_1D_1\cap S_2D_2=D_0$, $S_1E_1\cap S_2E_2=E_0$. Одержали ряд $u_0\left(D_0, E_0\right)$ – перспективний і до пучка S_1, і до ряду u_1, аналогічно, і до пучка S_2, і до ряду u_2.

$S_1M_{1\,\infty}\cap u_0=M_0$, а $S_2M_0\cap u_2=M_2$ – шукана відповідна точка, а $M_{1\infty}M_2\equiv f$ – шукана шоста дотична, паралельна до b (рис. 27).

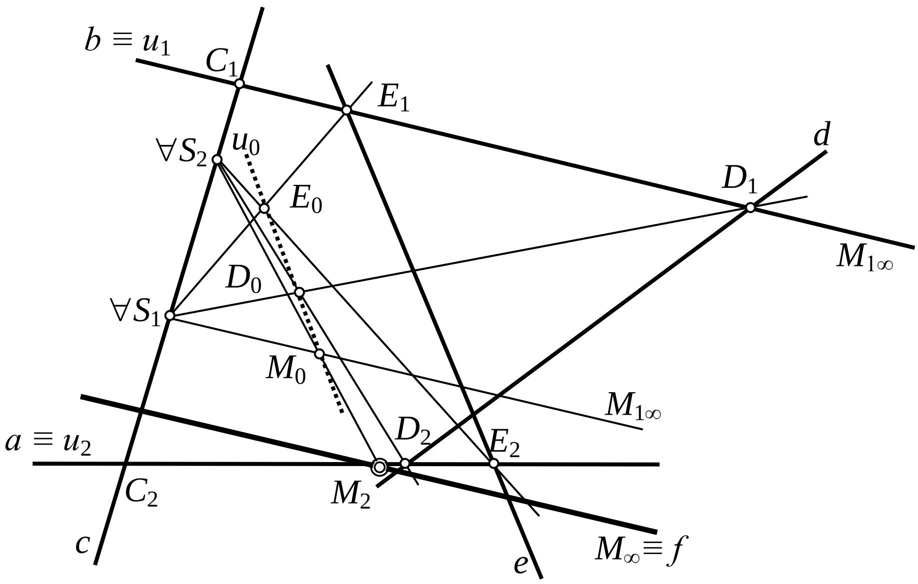


Рис. 27

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

<u>Завдання для самоконтролю:</u>

1. Дайте означення пучків ІІ-го порядку.
2. За якої умови пучок ІІ-го порядку розпадається на два пучки І-го порядку?
3. Сформулюйте основну властивість пучків ІІ-го порядку.
4. Скількома прямими задається пучок ІІ-го порядку?
5. Сформулюйте теорему Бріаншона та її частинні випадки.

Побудову в задачах (по можливості) проводити проводити двома способами: <u>за означенням та за теоремою Бріаншона.</u>

<u>Задачі для роботи на парі:</u>

Задача 1. Дано п’ять дотичних до кривої ІІ-го порядку *a, b, c, d, e*. Побудувати кілька дотичних до цієї кривої.

Задача 2. Дано п’ять дотичних до кривої ІІ-го порядку *a, b, c, d, e* і точка *M* на дотичній *a*. Через точку *M* провести другу дотичну до кривої.

Задача 3. Див. задачу І теми.

Задача 4. Дано чотиристоронник *abcd*, описаний навколо кривої ІІ-го порядку, і точку дотику сторони *b*. Знайти точку дотику протилежної сторони.

Задача 5. Див. задачу ІІ теми.

<u>Домашнє завдання:</u>

Задача 6. Пучок ІІ-го порядку задано п’ятьма своїми прямими *a, b, c, d, e*. Побудувати точку дотику прямих *a* і *b*, приймаючи їх за носії твірних рядів.

Задача 7. Дано чотири дотичні до кривої ІІ-го порядку і точку дотику однієї з них. Побудувати ще дотичні до кривої.

Задача 8. Дано три дотичні до кривої ІІ-го порядку *a, b, c,* точки дотику дотичних *a* і *b*. Побудувати скільки завгодно дотичних до цієї кривої.

Задача 9. Дано три дотичні до кривої II-го порядку *a, b, c*, точки дотику дотичних *a* і *b* і точку *K* на прямій *c*. Через точку *K* провести другу дотичну до кривої.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 10

Тема: ***Криві II-го порядку. Гіпербола***

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТЕМИ

Означення. Гіперболою називається ряд другого порядку, якщо дві його довільні точки розміщені на невласній прямій (рис. 28).

Означення. Параболою називається ряд другого порядку, якщо одна його довільна точка розміщені на невласній прямій (рис. 29).

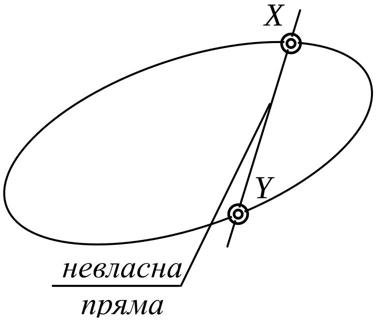


Рис. 28

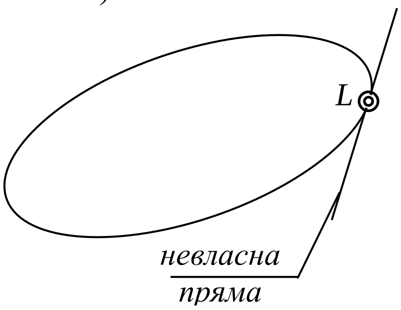


Рис. 29

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАНИХ ЗАДАЧ

Задача I. Дано чотири точки гіперболи, з них дві власні – *A, B* та дві невласні – C_∞, D_∞ і дотичну в точці *A*. Провести дотичну в точці *B*.

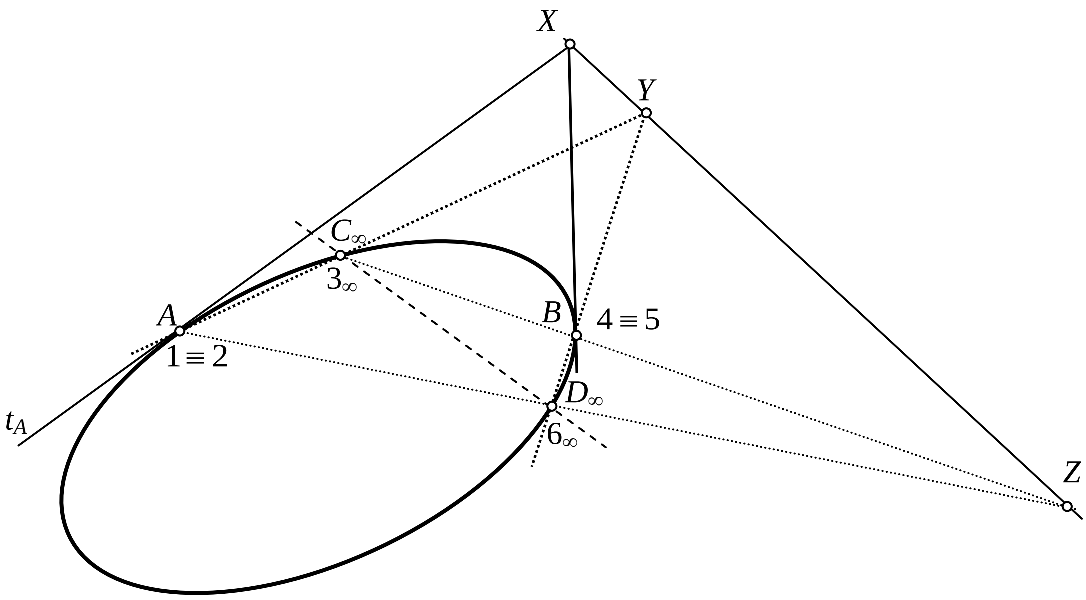


Рис. 30

Розв'язання.

Опишемо розв'язання даної задачі на моделі. Гіпербола – це крива II-го порядку з двома невласними точками (рис. 30). Занумеруємо задані точки та застосуємо схему теореми Паскаля.

Згідно даних в умові маємо: $A \equiv 1 \equiv 2$, $t_A \equiv (1,2)$, $C_\infty \equiv 3_\infty$, $D_\infty \equiv 6_\infty$, $B \equiv 4 \equiv 5$. Шуканою буде дотична $t_B \equiv (4,5)$. Використовуємо схему: $(2,3_\infty) \cap (5,6_\infty) = Y$, $(6_\infty,1) \cap (3_\infty,4) = Z$. $YZ \equiv p$ – пряма Паскаля. Тому $(1,2) \cap p = X$, а $(X,4 \equiv 5) \equiv (4,5) \equiv t_B$.

Виконаємо тепер побудову в проективній площині (згідно описаної послідовності дій) (рис. 31).

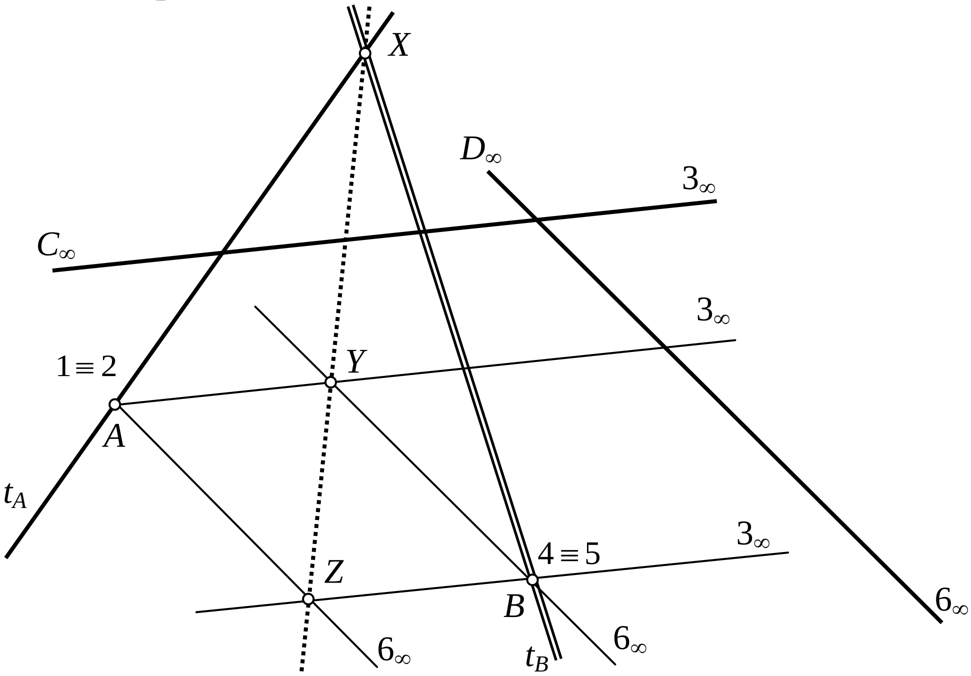


Рис. 31

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

Завдання для самоконтролю:

1. Які криві ІІ-го порядку Ви знаєте?
2. Дайте означення гіперболи.
3. Куди напрямлені асимптоти гіперболи?
4. Що є центром гіперболи?

Задачі для роботи на парі:

Задача 1. Див. задачу І теми.

Задача 2. Дано п’ять точок *A, B, C, D,* E_∞ гіперболи, з них одна невласна. Визначити другу невласну точку гіперболи.

Задача 3. Дано п’ять точок *A, B, C, D,* E_∞ гіперболи, з них одна невласна. Побудувати асимптоту, напрямлену в дану невласну точку E_∞.

Задача 4. Дано три дотичні *a, b, c* і асимптоту *d* гіперболи. Через точку *A* на дотичній *a* провести другу дотичну до гіперболи.

Задача 5. Дано три власні точки *A, B, C,* дві невласні точки D_∞ *і* E_∞ гіперболи і пряму *m*, паралельну до однієї з асимптот. Побудувати точку перетину даної прямої *m* з гіперболою.

Задача 6. Дано дві власні точки *A і B* і одну невласну точку C_∞ гіперболи. Відома також асимптота гіперболи, яка не проходить через точку C_∞ . Побудувати дотичну до гіперболи в точці *A*.

Задача 7. Дано дві асимптоти гіперболи і точка ***C***, що належить гіперболі. Побудувати дотичну до гіперболи в точці *C*.

Задача 8. Дано три точки *A, B, C* гіперболи і одну її асимптоту. Побудувати дотичну до гіперболи в точці *B*.

Задача 9. Дано три точки A, B, C_∞ гіперболи, одна з яких невласна, і дві дотичні в точках *A і B*. Побудувати асимптоту, напрямлену в дану невласну точку C_∞ .

Задача 10. Дано дві асимптоти гіперболи $t_{A\infty}$ *і* $t_{B\infty}$ і одну її точку *C*. Через точку *C* проведена пряма *c*, яка не паралельна асимптотам. Знайти другу точку перетину прямої *c* з гіперболою.

<u>Домашнє завдання:</u>

Задача 11. Дано дві точки *A* і B_∞ гіперболи, одна з яких невласна, дотичну в точці *A* і асимптоту, проведену в другу невласну точку C_∞ . Побудувати другу асимптоту, проведену в дану невласну точку B_∞ .

Задача 12. Дано три власні точки *A, B, C* і дві невласні точки D_∞ і E_∞ гіперболи. Побудувати дотичну в точці *A*.

Задача 13. Дано чотири точки A, B, C, D_∞ гіперболи, одна з яких невласна, і дотичну в точці *A*. Побудувати будь-яку п'яту точку цієї гіперболи.

Задача 14. Дано три точки *A, B, C* гіперболи і одну асимптоту. Побудувати четверту точку гіперболи, яка лежить на прямій *b*, що проходить через точку *B*.

Задача 15. Дано три точки A, B, C_∞ гіперболи, одна з яких невласна, і дві дотичні в точках *A* і *B*. Через точку *A* проведена пряма *a*. Побудувати другу точку перетину прямої *a* з гіперболою.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 11

Тема: ***<u>Криві ІІ-го порядку. Парабола</u>***

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАНИХ ЗАДАЧ

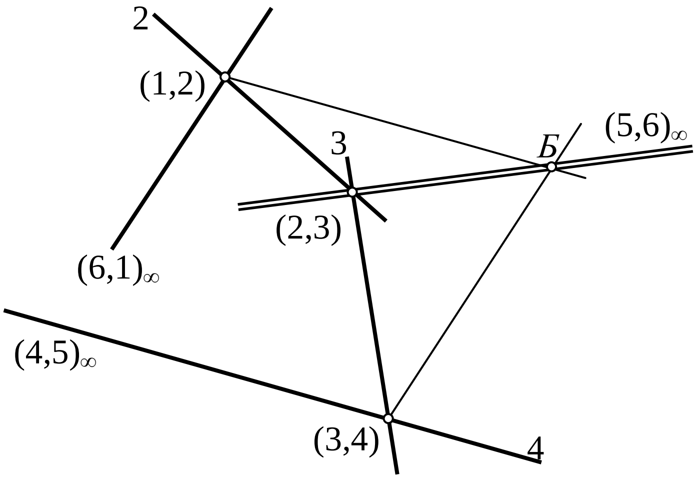


Рис. 32

Задача І. Дано чотири дотичні *a, b, c, d* до параболи. Визначити напрям осі параболи.

Розв'язання.

Напрям осі параболи визначається її невласною точкою – центром параболи (точка дотику невласної прямої) (рис. 32).

Введемо позначення дотичних: 1, 2, 3, 4, $(5 \equiv 6)_\infty$. Точка дотику прямої $(5 \equiv 6)_\infty$ – шуканий центр параболи.

Застосуємо схему

розв'язування задач за теоремою Бріаншона: $\left.\begin{array}{l}(1,2)-(4,5)_\infty \\ (3,4)-(6,1)_\infty\end{array}\right\} - Б$.

Тому $(2,3)-Б \equiv (5,6)_\infty$ – шуканий напрям осі параболи.

Задача II. Дано дві власні точки A *і* B і невласну точку C_∞ параболи. Через точку A проведено дотичну t_A до параболи і відмінну від неї пряму a. Побудувати другу точку прямої a з параболою.

Розв'язання.

Опишемо розв'язання даної задачі на моделі. Парабола – це крива II-го порядку, яка дотикається до невласної прямої. Занумеруємо задані точки та застосуємо схему за теоремою Паскаля (рис. 33).

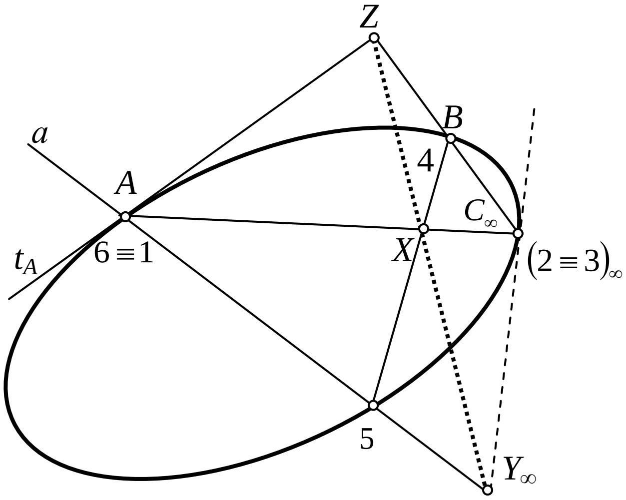


Рис. 33

Згідно даних в умові маємо: $A \equiv 6 \equiv 1$, $t_A \equiv (6,1)$, $C_\infty \equiv (2 \equiv 3)_\infty$, $a \equiv (5,6)$, $B \equiv 4$. Шуканою буде точка 5. Використовуємо схему: $(2_\infty, 3_\infty) \cap (5,6) = Y_\infty$, $(6,1) \cap (3_\infty, 4) = Z$.

$Y_\infty Z \equiv p$ – пряма Паскаля. Тому $(1, 2_\infty) \cap p = X$, а $(X,4) \cap (5,6) \equiv 5$ – шукана точка.

Виконаємо тепер побудову в проективній площині (згідно описаної послідовності дій) (рис. 34).

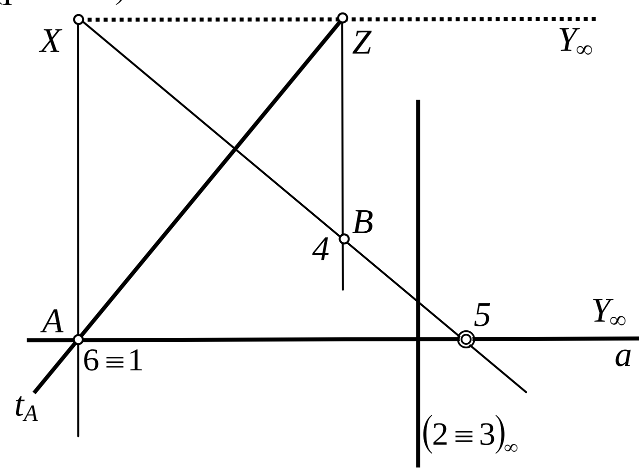


Рис. 34

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

<u>*Завдання для самоконтролю:*</u>

1. Дайте означення параболи.
2. Що є центром параболи?
3. Чим визначається напрям осі параболи?

<u>*Задачі для роботи на парі:*</u>

Задача 1. Див. задачу I теми.

Задача 2. Див. задачу II теми.

Задача 3. Дано три дотичні *a, b, c* до параболи, точку дотику *B* прямої *b* і точку *M* на прямій *c*. Через точку *M* провести ще одну дотичну до параболи.

Задача 4. Дано три точки A, B, C_∞ параболи, з яких одна невласна, дотичну t_A в точці *A* і пряму *b*, що проходить через точку *B*. Побудувати другу точку перетину прямої *b* з параболою.

Задача 5. Дано три дотичні *a, b, c* і напрям осі параболи. Через точку *M* на дотичній ***c*** провести другу дотичну до параболи.

Задача 6. Дано три дотичні *a, b, c* до параболи і точку дотику *B* прямої *b*. Через точку *A* дотичної *a* провести другу дотичну до параболи.

Задача 7. Дано чотири дотичні *a, b, c, d* до параболи. Побудувати точку дотику прямої *b*.

Домашнє завдання:

Задача 8. Дано три точки A, B, C_∞ параболи, з яких одна невласна, дотичну t_A в точці *A*. Побудувати дотичну t_B до параболи в точці *B*.

Задача 9. Дано три дотичні *a, b, c* і напрям осі параболи. Побудувати точку дотику дотичної *b*.

Задача 10. Дано чотири точки A, B, C , D_∞ параболи, з них D_∞ – невласна. Побудувати дотичну до параболи в точці *B*.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 12

Тема: *Полярна відповідність*

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТЕМИ

Означення. Пряму *p*, відповідну даній точці *P* відносно даної лінії другого порядку k^2, називають ***полярою*** точки *P*, а точку *P* – полюсом прямої *p*.

Означення. ***Полярою*** *p* точки *P* називається пряма, на якій лежать точки перетину дотичних до лінії другого порядку в кінцях хорд, проведених через полюс *P*.

Означення. ***Полярою*** *p* точки *P* називається пряма, на якій лежать точки, гармонічно спряжені з точкою *P* і точками перетину з лінією другого порядку хорд, проведених через полюс *P*.

Означення. ***Полярою*** *p* точки *P* називається діагональ повного чотирьохвершинника, вписаного в лінію другого порядку і для якого точка *P* є діагональною точкою, що проходить через дві інші діагональні точки.

Означення. ***Полюсом*** *P* поляри *p* називається точка, полярою якої є пряма *p*.

Означення. Трикутник, у якого кожна вершина є полюсом протилежної сторони, називається ***полярним*** трикутником.

Означення. Відповідність між точками і прямими площини, при якій кожні точці *P* площини ставиться у відповідність певна пряма *p* (її поляра) цієї ж площини і кожній прямій *p* площини ставиться певна точка *P* (її полюс) цієї ж площини, називається ***полярною відповідністю.***

Полярна відповідність має властивість взаємності.

Якщо поляра будь-якої точки проходить через другу точку, то поляра другої точки проходить через першу точку.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАНИХ ЗАДАЧ

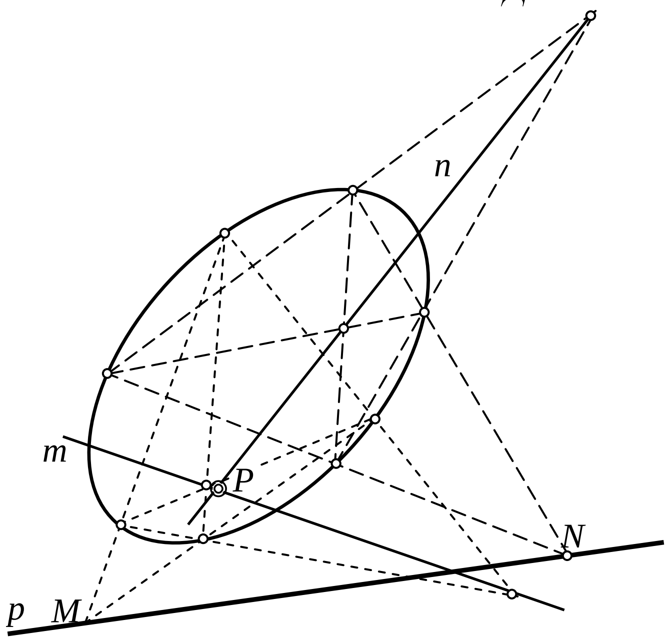


Рис. 35

Задача I. Дано (накреслено) криву II-го порядку і пряму p. Побудувати полюс прямої p відносно заданої кривої (розглянути всі випадки).

Розв'язання.

1) поляра розташована поза кривою II-го порядку (рис. 35).

На полярі p вибираємо довільні точки M і N, приймаючи їх за полюси та шукаємо до них відповідні поляри m і n. Тоді шуканий полюс поляри p буде точкою перетину: $m \cap n = P$.

2) поляра перетинає криву II-го порядку (міркування аналогічні);

3) поляра дотикається до кривої.

Другий і третій випадки розгляньте самостійно.

II-го порядку: Шукана точка P – це спільна точка кривої II-го порядку і поляри p.

Задача II. Через точку P, задану всередині кривої II-го порядку, провести хорду, яка поділилася б у цій точці навпіл.

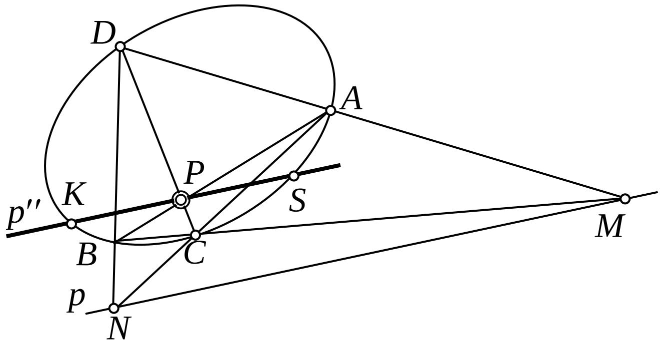


Рис. 36

Розв'язання.

Будуємо поляру p точки P,. Через точку P проводимо $p' \parallel p$ (KS– шукана хорда). Доведення. $KS \parallel NM$, оскільки $KS \cap NM = R_\infty$, а $(KS, PR_\infty) = -1$, то $KP = PS$ (рис. 36)

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

<u>Завдання для самоконтролю:</u>

1. Дайте означення полюса та поляри.
2. Який трикутник називається полярним?
3. Поясніть, що означає термін «полярна відповідність».
4. Сформулюйте властивості полярної відповідності.

<u>Задачі для роботи на парі:</u>

Задача 1. Див. задачу I теми.

Задача 2. Дано (накреслено) криву II-го порядку і точку P. Побудувати поляру точки P відносно даної кривої (розглянути всі можливі випадки).

Задача 3. Задано вершину і сторону автополярного трикутника, яка проходить через цю вершину. Побудувати автополярний трикутник, враховуючи, що основна крива II-го порядку накреслена.

Задача 4. Задано криву II-го порядку і точку *P*. Через точку *P* провести за допомогою тільки однієї лінійки дотичну до кривої.

Задача 5. Задано чотири точки *A, B, C, D* перетину двох прямих *m* і *n*, що виходять з точки *P*, з кривою II-го порядку. Інші точки кривої невідомі. Побудувати поляру точки *P*.

Задача 6. Див. задачу II теми.

Задача 7. На кривій II-го порядку задано чотири точки *A, B, C, D*. Дотичні *a, b, c, d* до кривої в цих точках утворюють описаний чотиристоронник. Довести, що пряма, на якій лежать точки перетину протилежних сторін описаного чотирикутника і вписаного чотирикутника *ABCD*, буде полярою точки, через яку проходять діагоналі цих чотирикутників.

Домашнє завдання:

Задача 8. Довести, що з трьох вершин автополярного трикутника дві вершини лежать зовні, а одна вершина всередині основної кривої II-го порядку.

Задача 9. З точок *P* і *Q* проведено дві пари дотичних до кривої II-го порядку. Побудувати полюс прямої *PQ*, якщо криву II-го порядку не задано.

Задача 10. Задано коло (накреслене) і точку *P*. Через точку *P* провести за допомогою тільки однієї лінійки дотичні до кола.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. ***Боровик В.Н., Яковець В.П.*** Курс вищої геометрії: Навчальний посібник. – Суми: ВТД «Університетська книга», 2004. – 464 с.
2. ***Буземан Г., Келли П***. Проективная геометрия и проективные метрики. ИЛ. 1957.
3. ***Вольтберг О.А.*** Основные идеи проективной геометрии. – М.: Учпедгиз. 1949.
4. ***Глаголев Н.А.*** Проективная геометрия. – М.: Высшая школа, 1963. – 344 с.
5. ***Гуревич Г.Б.*** Проективная геометрия. – М.: Физматгиз. 1960. – 320 с
6. ***Житомирский О.К.*** Проективная геометрия в задачах. – М.: ГИТТЛ. 1954.
7. ***Коба В.І.*** Проективна геометрія / Тренувальні вправи та контрольні роботи для студентів-заочників фізико-математичних факультеті педагогічних інститутів. – Київ: Радянська школа, 1965. – 60 с.
8. ***Кованцов М.І.*** Проективна геометрія. –К.: Вища школа, 1969. – 411 с.
9. ***Комисарук А.М.*** Проективная геометрия в задачах. – Минск: Высшая школа, 1971.
10. ***Нікулін, Чуб, Коба В.І.*** Проективна геометрія. –К.: Рад. шк. 1962. – 235 с.
11. ***Павлов В. О.*** Збірник задач з проективної геометрії. . – К.: Вища школа, 1971. – 351 с.
12. ***Погорелов А.В.*** Геометрия. Учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности „Математика" – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 288 с.
13. ***Польский Н.И.*** О различных геометриях. –К.: из-во АН УССР, 1962.
14. ***Сергунова О.П., Котлова В.М***. Практикум з проективної геометрії. – К.: Вища школа, 1977. – 192 с.
15. ***Четверухин Н.Ф.*** Проективная геометрия. Учебник для педагогических институтов. – М.: Учпедгиз, 1961. – 350 с.

ДЛЯ НОТАТОК