Міністерство освіти і науки України

Житомирський державний університет імені Івана Франка

Фізико-математичний факультет

Кафедра алгебри та геометрії

Освітньо-кваліфікаційний рівень «Спеціаліст»

Дипломна робота

Геометричні нерівності в багатокутниках

Виконала: студентка 51- б групи
спеціальності: 7.04020101 Математика*
денного відділення
Самосій Наталія Олександрівна

Науковий керівник:
кандидат педагогічних наук
доцент кафедри алгебри та геометрії
Чемерис О.А.

Житомир - 2014 рік

ЗМІСТ

Основні умовні позначення

A, B, C — вершини трикутника *ABC;*

а, ß, γ — величини кута *A, B, C* відповідно (якщо вони є множниками, то характеризують радіанну міру кута);

a, b, c — довжини сторін, протилежних до кутів *A, B, C* відповідно;

p — нівпериметр трикутника *ABC;*

h_a, h_b, h_c— висоти, що проведені до сторін а, *b, c* або їх продовжень;

m_a, $m_ь$, m_c — медіани, що проведені до сторін *a, b, c;*

l_a, l_b, l_c- бісектриси внутрішніх кутів *A, B, C;*

S — площа трикутника;

R — радіус кола, описаного навколо трикутника *ABC;*

r— радіус кола, вписаного у трикутник *ABC;*

r_a, r_b, r_c — радіуси зовпівписаних кіл;

0 — центр описаного кола навколо трикутника *ABC;*

I — центр вписаного кола у трикутник *ABC;*

H— точка неретипу висот (ортоцентр);

M — точка перетину медіан (барицентр або центроїд).

Чевіали — це відрізки, що з'єднують вершини трикутника з довільними точками па протилежних до них сторонах, які перетинаються в одній точці.

Вступ

У сучасній математиці нерівності відіграють велику роль. Є ціла низка окремих галузей сучасної математики — лінійне і нелінійне програмування, теорія ігор, дослідження операцій тощо, де нерівностям відводиться центральне місце.

З числовими нерівностями та їх властивостями учні ознайомлюються в основній школі. Там же вони вивчають окремі методи розв'язування нерівностей та їх доведення. У старшій школі нерівності зустрічаються при вивченні границь, похідної, інтегралів, розв'язуванні прикладних задач.

Геометричні нерівності – важлива частина планіметрії. Тема "Геометричні нерівності" є "класичною темою", тобто темою, яка давно і міцно увійшла в планіметрію. Задачі на доведення геометричних нерівностей трапляються у планіметрії досить часто. Їх розв’язання викликає в учнів іноді труднощі, пов’язані зі специфікою. Загальні ідеї, які часто застосовують при розв’язанні, базуються на відомих властивостях алгебраїчних нерівностей.

Тема "Геометричні нерівності" є і почесною, і важкою. Не перерахувати олімпіадних і конкурсних завдань на цю тему. Легкі, майже очевидні, нерівності частенько виявляються "міцним горішком". Щоб учні не боялися цієї теми не обходили її стороною, дуже важливо правильно розставити акценти, зробити перші кроки!

Мета дослідження: вивчити і докладно викласти матеріал даної теми, а також підібрати та розв’язати ряд задач на доведення геометричних нерівностей.

Актуальність цієї теми полягає у прикладному застосуванні геометричних нерівностей. Розв'язання задач на геометричні нерівності не потребує будь-яких складних математичних знань або складної техніки, але вимагає творчого і логічного мислення. Задачі на геометричні нерівності необхідно включати в шкільну програму, а також обов’язково розглядати на гурткових і олімпіадних заняттях.

Завдання дослідження:

- Розглянути основні геометричні нерівності в трикутниках та багатокутниках;
- Розглянути методи доведення планіметричних нерівностей;
- Розв'язати ряд задач на доведення геометричних нерівностей.

Структура дипломної роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел та літератури з 10 найменувань. Повний обсяг дипломної роботи становить 32 сторінок.

РОЗДІЛ І. Геометричні нерівності

1.1 Поняття про геометричні нерівності

Для початку означимо категорію «нерівності» в математиці.

Нерівності (математичні) — співвідношення між числами або величинами, що вказують, які з них більші інших. Для елементів упорядкованих множин нерівність може додатково стверджувати, що один із двох елементів менший або більший від іншого. Нерівністю також називають математичну задачу знаходження усіх елементів упорядкованої множини, для яких відповідне твердження істинне.

Геометричні нерівності показують нам, що деякі об'єкти геометричних фігур є різними. Це можуть бути нерівності між сторонами, площею і периметром, довжиною діагоналі і півпериметром та інші.

1.2 Методи доведення планіметричних нерівностей

Розглянемо основні методи доведення нерівностей пов'язаних з фігурами на площині.

1. Нерівність трикутника

Добре відомо, що для будь-яких трьох точок *A, B, C* має місце нерівність $AB \leq AC + CB$ (якщо *C* не лежить на відрізку *AB,* нерівність буде строгою). Звідси отримуємо, що довжина ламаної не менша за відстань між її кінцями. Ці елементарні міркування часто є ключовими в доведенні нерівностей для відстаней.

Приклад 1. Довести, що довжини медіан m_a, m_b, m_c та периметр P довільного трикутника задовольняють нерівності $\frac{3}{4}P < m_a + m_b + m_c < P$.

Розв'язання. Нехай медіани m_a, m_b, m_c проведено до сторін довжини *a, b, c* відповідно. Розглянувши половинки сторін та відповідні середні лінії, отримуємо, що $m_a < (b+c)/2$, $m_b < (c+a)/2$, $m_c < (a+b)/2$. Сума цих нерівностей показує, що сума довжин медіан менша за периметр. Оскільки відрізки від точки перетину медіан до вершин трикутника дорівнюють $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b, \frac{2}{3}m_c$, маємо нерівності $a< 2(m_b+ m_c)/3,\ b< 2(m_a+ m_c)/3,\ c< 2(m_a+ m_b)/3$. Додавши, отримаємо ліву частину нерівності задачі.

2. Використання векторів

Нерівність трикутника можна сформулювати і у векторному вигляді – довжина суми векторів не перевищує суми їх довжин. Інколи обґрунтування нерівності для відстаней зручно проводити розглядаючи вектори.

Приклад 2. На площині дано 2 відрізки *AB* і *CD*. Довести, що довжина відрізка, що сполучає їх середини, не більша за півсуму довжин відрізків *AC* і *BD*.

Розв'язання. Нехай точки *K* і *L* – це середини *AB* і *CD* відповідно. Тоді, очевидно, $2\overrightarrow{KL}= (\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CL})+(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DL})=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$, звідки і маємо потрібну нерівність.

3. Оцінка площі через добуток довжин відрізків

Добре відомо, що площа трикутника не перевищує половини добутку його двох сторін , площа опуклого чотирикутника не більша за половину добутку його діагоналей.

Приклад 3. Нехай a, b, c, d – довжини послідовних сторін опуклого чотирикутника. Довести, що його площа не перевищує $(ac+bd)/2$.

Розв'язання. Проведемо діагональ чотирикутника, по один бік від якої будуть сторони довжини a і b, по інший – c і d. Утворений трикутник зі сторонами довжини a і b відобразимо симетрично відносно серединного перпендикуляра проведеної діагоналі. Отримаємо чотирикутник тієї ж площі з довжинами послідовних сторін a, c, d, b. Друга діагональ чотирикутника розділяє трикутні частини, площа однієї з яких не перевищує $\frac{ac}{2}$, а другої - $\frac{bd}{2}$.

4. Використання площі в оцінках відстаней

5. Принцип Діріхле

Якщо в об'єднанні *n* фігур відмічено $n+1$ точку, то знайдеться фігура, в якій відмічено не менше 2 точок. При використанні цієї простої ідеї головною складністю розв’язання може бути пошук вдалого вибору цих фігур.

6. Використання алгебраїчних методів

Інколи вирази з геометричними елементами варто дослідити алгебраїчними методами, використати класичні нерівності.

7. Використання інтеграла

1.3 Основні алгебраїчні нерівності та співвідношення у трикутнику

Нерівність трикутника — одна з інтуїтивних властивостей відстані, що використовується в геометрії, функціональному аналізі.

Нерівність трикутника входить як аксіома в визначення метрики простору, норми. Нерівність трикутника є теоремою в Евклідовій геометрії, доведення присутнє ще в «Початках» Евкліда.

ТЕОРЕМА 1. Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших сторін.

Наслідок . Для довільних трьох точок, *A, B* і *C*, що не лежать на одній прямій, справедливі нерівності:

$$AB < AC + CB,\ AC < AB + BC,\ BC < BA + AC.$$

Кожна з цих нерівностей називається нерівністю трикутника.

Приклад 1. Порівняти кути трикутника ABC і визначити, чи може бути кут A тупим, якщо $AB > BC > AC$.

Розв'язання. За теоремою 1 маємо: $\angle C > \angle A > \angle B$. Кут A тупим бути не може, бо тоді $\angle C$ також тупий і, значить, $\angle A + \angle B + \angle C > 180°$, що неможливо (п. 1, теорема).

Приклад 2. Порівняти сторони трикутника ABC, якщо $\angle C > \angle A > \angle B$.

Розв'язання. Проти більшого кута лежить більша сторона , отже маємо $BC > AC > AB$.

Нерівність ***Фінелара-Хадвігера***.

$$a^2 + b^2 + c^2 - (a-b)^2 - (b-c)^2 \geq 4\sqrt{2S}$$

Примітка. Оскільки в геометрії застосовуємо алгебраїчні нерівності для порівняння довжин або площ, то кожного разу не будемо вказувати на невід'ємність величин, що входять до нерівостей.

1. Нерівність Коші

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

При $n=2$ нерівність набуває вигляду: $x+y \geq 2\sqrt{xy}$.

При $n = 3$ нерівність набуває вигляду: $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$.

2. $\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$.

3. $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$.

4. $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+xz)$.

5. Нерівність трьох квадратів $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy+yz+xz$.

6. $(x+y)(y+z)(x+z) \geq 8xyz$.

7. $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$

8. $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y} \geq x+y+z$.

9. $(xy+yz+xz)^2 \geq 3xyz(x+y+z)$.

10. $x^3y+y^3z+z^3x \geq xyz(x+y+z)$.

11. $6xyz \leq xy(x+y)+yz(y+z)+xz(x+z) \leq 2(x^3+y^3+z^3)$.

12. $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$.

13. $\frac{x^2}{y^2+z^2}+\frac{y^2}{x^2+z^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2} \geq \frac{3}{2}$

14. $\left(\frac{x+y}{z}\right)^2+\left(\frac{y+z}{x}\right)^2+\left(\frac{x+z}{y}\right)^2 \geq 12$.

15. Нерівність Коші-Буняковського

$(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^2 \leq (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)\cdot(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2)$

Рівність має місце при

$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}$.

У співвідношеннях 16-25 *a, ß, γ* - кути трикутника.

16. $sin^2 a + sin^2 \beta + sin^2 \gamma = 2 + 2 cosa cos\beta cos\gamma$.

17. $sina + sin\beta + sin\gamma = 4cos\frac{\alpha}{2} - cos\frac{\beta}{2} - cos\frac{\gamma}{2}$.

18. $cosa + cos\beta + cos\gamma = 1 + 4sin\frac{\alpha}{2} sin\frac{\beta}{2} sin\frac{\gamma}{2}$.

19. $sin2a + sin2\beta + sin2\gamma = 1 - 2sin\frac{\alpha}{2} sin\frac{\beta}{2} sin\frac{\gamma}{2}$.

20. $sin2a + sin2\beta + sin2y = 4sina sin\beta siny$.

21. $tg\frac{\alpha}{2} tg\frac{\beta}{2} + tg\frac{\beta}{2} tg\frac{\gamma}{2} + tg\frac{\gamma}{2} tg\frac{\alpha}{2} = 1$

22. $ctg\frac{\alpha}{2} + ctg\frac{\beta}{2} + ctg\frac{\gamma}{2} = ctg\frac{\alpha}{2} ctg\frac{\beta}{2} ctg\frac{\gamma}{2}$.

23. $ctga ctg\beta + ctg\beta ctg\gamma + ctg\gamma ctga = 1$.

24. $p = 4Rcos\frac{\alpha}{2} cos\frac{b}{2} cos\frac{\gamma}{2}$.

25. $r = 4Rsin\frac{\alpha}{2} sin\frac{\beta}{2} sin\frac{\gamma}{2}$.

26. $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{1}{2Rr}$

27. $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$

28. $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

29. $l_b = \frac{2ac}{a + c} cos\frac{\beta}{2}$

30. ***Формула Лагранжа:***

$$l_b^2 = ac - mn,$$

де *m, n* — підрізки, на які ділить бісектриса кута *B* протилежну сторону.

31. $l_b = \frac{2\sqrt{ac}}{a + c}\sqrt{p(p - b)}$.

32. $a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr.$

33. $(a+b-c)^3 + (a+c-b)^3 + (b+a-c)^3 + 24abc = (a+b+c)^3$

34. *Теорема Чеви*

Якщо точки A_1, B_1, C_1 лежать на сторонах *BC, AC* і *AB* відповідно, то відрізки AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці тоді й тільки тоді, коли виконується рівність:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

35. Задача про трилисник

Якщо бісектриса кута *B* перетинає описане навколо трикутника *BC* коло в точці *D*, тоді *AD* =*DI* =*DC,* де I - інцентр трикутпика *ABC.*

36. Формула Ейлера

$OI^2 = R^2 - 2Rr.$

37. Формула Ейлера

$OI_b^2 = R^2 + 2Rr_b.$

38. Формула Ейлера

$$OM^2 = R^2\left(1 - \frac{4S_1}{s}\right),$$

де S_1 — площа педального трикутника, *M* — педальна точка.

1.4 Нерівності між елементами інших багатокутників

1. Кожна сторона чотирикутника менша за суму всіх інших його сторін, оскільки в будь-якому чотирикутнику $ABCD$ за нерівністю трикутника

$AD < AC + CD < AB + BC + CD$. Звідки $AD < AB + BC + CD$.

Додавши до обох частин останньої нерівності по AD, можна одержати нерівність $AB < 0,5(AB + BC + CD + DA)$.

1. Кожна сторона чотирикутника менша від його півпериметра.

2. Кожна діагональ чотирикутника менша від його півпериметра. Тому сума діагоналей довільного чотирикутника менша від його периметра.

3. Якщо чотирикутник опуклий, то сума його діагоналей більша за його півпериметр.

Якщо a, b, c, d - послідовні сторони чотирикутника, а e, f, - його діагоналі, то кожна з сум $a + c$, $b + d$, $e + f$ менша від суми двох інших. Тобто з відрізків $a + c$, $b + d$, $e + f$ можна побудувати трикутник. Довести це твердження неважко, використовуючи нерівність трикутника.

4. У кожному чотирикутнику добуток діагоналей не більший за суму добутків його протилежних сторін. .Тобто завжди $e \cdot f < ac + bd$.

5. Якщо один опуклий багатокутник лежить всередині іншого , то периметр зовнішнього багатокутника більший периметра внутрішнього.

6. Сума довжин діагоналей опуклого чотирикутника більша суми довжин будь-якої пари його протилежних сторін.

7. Довжина відрізка , що лежить всередині опуклого багатокутника, не перевищує або найбільшої сторони , або найбільшої діагоналі.

Теорема Птолемея (наслідок з теореми Бретшнейдера). Добуток діагоналей вписаного чотирикутника дорівнює сумі добутку протилежних сторін ($ef=ac+bd$).

Нерівність Птолемея (наслідок з теореми Бретшнейдера). Якщо чотирикутник не є вписаним у коло, то добуток діагоналей менший ніж сума добутків протилежних сторін.

Теорема Стюарта (наслідок з теореми Бретшнейдера)

$$BD^2 = \frac{1}{AC}\left(AB^2 \cdot DC + BC^2 \cdot AD - AC \cdot AD \cdot DC\right),$$

де D — довільна точка на стороні AC.

РОЗДІЛ II. Задачі на доведення геометричних нерівностей

2.1 Задачі на доведення геометричних нерівностей в трикутнику

Однією з перших нерівностей, з якою зустрічаємося при вивченні геометрії, є так звана *нерівність трикутника.* А саме: для будь-яких точок A, B, C площини $AB \leq BC+CA$. У випадку, коли A, B, C є вершинами трикутника, нерівність стає строгою. Вже навіть така найпростіша властивість дає змогу розв'язувати змістовні задачі.

Задача 1. У трикутнику довжини двох сторін відповідно дорівнюють 3,14 та 0,67. Знайти довжину третьої сторони, якщо відомо, що вона виражається цілим числом.

Розв'язання. Якщо ця довжина дорівнює a, то $a<3{,}14+0{,}67$ та $a>3{,}14-0{,}67$. А отже, $a=3$.

Задача 2. У площині взяли довільний трикутник ABC і коло радіуса 1. Довести, що на колі знайдеться точка, сума відстаней від якої до вершин трикутника не менша 3.

Розв'язання. Нехай M та N – дві діаметрально протилежні точки на колі (рис. 1.1).

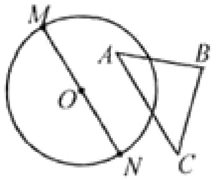

Рис. 1.1

Тоді $MN=2$. А отже, $MA+AN \geq 2, MB+BN \geq 2$, $MC+CN \geq 2$. Додавши ці нерівності,одержимо $(MA+MB+MC)+(AN+BN+CN) \geq 6$.

А тому, принаймні в одних дужках сума не менша від 3.

Розглянемо дещо складніший приклад застосування нерівності трикутника.

Задача 3. На сторонах трикутника ABC побудовано квадрати $BCKM$, $BAQT$, $ACNP$ у зовнішній бік. Довести нерівності $5P_1<2P_2<6P_1$,де P_1 – периметр трикутника ABC, P_2–периметр шестикутника $MKNPQT$.

Розв’язання.

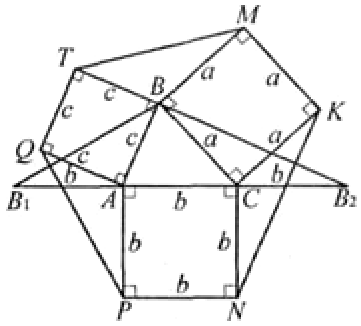

Рис. 1.2

Нехай $BC=a$, $AC=b$ (Рис. 1.2).

Очевидно, що $P_2=P_1+KN+PQ+TM<P_1+(a+b)+(b+c)+(c+a)=3P$.

Отже, $2P_2<6P_1$. Для доведення нерівності $5P_1<2P_2$ достатньо довести нерівність $3P_1<2P_2-2P_1$ тобто $3P_1<2(KN+PQ+TM)$.

Для цього на прямій AC візьмемо точки B_1та B_2 так, щоб $AB_1=CB_2=b$. Тоді $\Delta BAB_1=\Delta QAP$, а $\Delta BCB_2=\Delta KCN$(за двома сторонами та кутом між ними). Отже, $BB_1=PQ$, а $BB_2=KN$. Із трикутника B_1BB_2: $BB_1+BB_2>B_1B_2$, а значить, $PQ+KN>3b$. Аналогічно доводимо, що $TM+PQ>3c$, $TM+KN>3a$. Додавши останні три нерівності, одержуємо потрібну нерівність.

Нерівність трикутника може бути використана і для доведення алгебраїчних нерівностей. Наприклад.

Задача 4. Довести, що для додатних чисел a, b, c виконується нерівність$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\geq\sqrt{a^2+ac+c^2}$.

Розв’язання. Відкладемо відрізки $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ так, щоб $\angle AOB=\angle BOC=60°$ (Рис. 1.3).

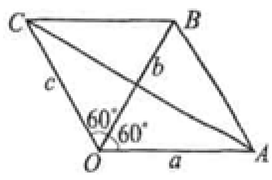

Рис. 1.3

Тоді за теоремою косинусів

$AB=\sqrt{a^2-ab+b^2}$, $BC=\sqrt{b^2-bc+c^2}$, $AC=\sqrt{a^2+ac+c^2}$.

А отже, задана нерівність зводиться до очевидної: $AB+BC\geq AC$.

Зі сторонами трикутника можуть бути пов'язані і дещо складніші нерівності. Наприклад.

Задача 5. Нехай $a,\ b,\ c$ – сторони трикутника із периметром 1. Довести нерівність$\frac{1+a}{1-2a}+\frac{1+b}{1-2b}+\frac{1+c}{1-2c}>6.$

Розв'язання.$1-2a=(a+b+c)-2a=b+c-a>0.$

Аналогічно $1-2b>0, 1-2c>0.$

Отже, всі три дроби додатні. Нехай для визначеності a – найбільша із сторін трикутника. Тоді $\frac{1}{3}\le a\le\frac{1}{2}$. Оскільки на цьому проміжку $1+a$ – зростає, $1-2a$ –спадає, то $\frac{1+a}{1-2a}\ge\frac{1+\frac{1}{3}}{1-2\cdot\frac{1}{3}}=4$. Але $\frac{1+b}{1-2b}>1$, $\frac{1+c}{1-2c}>1,$ тому задана нерівність виконується.

Відзначимо, що можна одержати і більш точну оцінку:

$$\frac{1+a}{1-2a}+\frac{1+b}{1-2b}+\frac{1+c}{1-2c}\ge 12.$$

Справді, зафіксуємо a і покладемо $b=d+x, c=d-x$. Розглянемо тепер різницю$\frac{1+b}{1-2b}+\frac{1+c}{1-2c}-(\frac{1+d}{1-2d}+\frac{1+d}{1-2d}).$

Після нескладних спрощень одержимо, що вона дорівнює

$\frac{12x^2}{(1-2b)(1-2c)(1-2d)}\ge 0.$

Таким чином, найменше значення заданої суми досягається при $b=c,$ якщо a–фіксоване. Зрозуміло, що при цьому $a=b=c,$ бо інакше, зафіксувавши, наприклад, $c,$ ми могли б зменшити суму, взявши $a=b$. А отже,

$$\frac{1+a}{1-2a}+\frac{1+b}{1-2b}+\frac{1+c}{1-2c}\ge 3\cdot\frac{1+\frac{1}{3}}{1-2\cdot\frac{1}{3}}=12.$$

Крім сторін, у нерівностях можуть фігурувати також інші елементи трикутника чи інших фігур.

Задача 6. Довести, що в будь-якому трикутнику сума медіан $m_a+m_b+m_c$ більша $\frac{3}{4}$ периметра, але менша всього периметра.

Розв'язання. Нехай для трикутника ABC точка D – симетрична до A

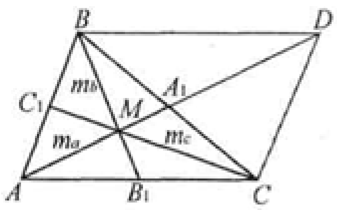

Рис. 1.4

відносно середини A_1 сторони AC (Рис. 1.4).

Тоді $2m_a=AD<AB+BD=AB+AC=b+c$.

Аналогічно доводимо, що $2m_b<a+c, 2m_c<b+a$. Додавши ці нерівності, одержимо $m_a+m_b+m_c<a+b+c$.

В іншу сторону, якщо M – точка перетину медіан, то $AM+BM>AB$, $BM+CM>BC$, $AM+CM>AC$.

Додаючи ці нерівності і враховуючи, що

$AM=\frac{2}{3}m_a, BM=\frac{2}{3}m_b, CM=\frac{2}{3}m_c$, одержимо

$$\frac{4}{3}(m_a+m_b+m_c)>a+b+c,$$

звідки і випливає потрібна нерівність.

Задача 7. Довести нерівність $l_a \le \sqrt{p(p-a)}$, де l_a –бісектриса трикутника ABC, проведена до основи a,p –його півпериметр.

Розв'язання. Нехай продовження бісектриси AD перетинає описане навколо трикутника ABC коло в точці M. Тоді $AD{\cdot}DM=CD{\cdot}DB$. Оскільки $\Delta ABD \sim \Delta AMC$(за двома рівними відповідними кутами), то $AB{\cdot}AC=AD{\cdot}AM=AD(AD+DM)=AD^2+BD{\cdot}DC$. Крім того, за властивістю бісектриси трикутника $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$, звідки $BD=\frac{ac}{b+c}, DC=\frac{ab}{b+c}$. Тоді

$$AD^2=bc-\frac{bca^2}{(b+c)^2}=\frac{4p(p-a)bc}{(b+c)^2}\le p(p-a).$$

А отже, $l_a \le \sqrt{p(p-a)}$.

Задача 8. Всередині трикутника ABC розташований відрізок MN. Довести, що його довжина не перевищує найбільшої сторони трикутника.

Розв'язання. Нехай пряма MN, що проходить через внутрішні точки M, N трикутника ABC, перетинає сторони в точках M_1 та N_1,причому для визначеності візьмемо, що M_1 лежить на AB, N_1–на BC (Рис. 1.5).

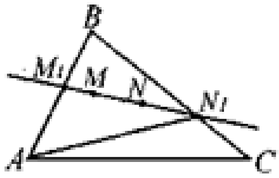

Рис. 1.5

Зрозуміло, що $MN\leq M_1N_1$. З двох кутів AM_1N_1та BM_1N_1 принаймні один не менший за 90^0. А тому $M_1N_1\leq AN_1$або $M_1N_1\leq BN_1\leq BC$. Аналогічно, з кутів BN_1Aта CN_1A принаймні один не менший за 90°. Отже, $AN_1\leq AB$ або $AN_1\leq AC$.

Таким чином, MN не перевищує довжини принаймні однієї, отже, і найбільшої сторони трикутника ABC.

Узагальнюючи задачу 8, приходимо до такого твердження: довжина відрізка всередині опуклого багатокутника не перевищує довжини найбільшої сторони або найбільшої діагоналі цього багатокутника.

Відзначимо також, що якщо всередині опуклого багатокутника лежить інший опуклий багатокутник, то периметр P_2 зовнішнього багатокутника не менший, ніж периметр P_1 внутрішнього.

Справді, побудуємо на сторонах внутрішнього багатокутника півсмуги, паралельні сторони яких перпендикулярні до відповідних сторін цього багатокутника (Рис. 1.6). Якщо P –та частина периметра зовнішнього багатокутника, яка знаходиться всередині цих півсмуг, то, очевидно,справджуються нерівності $P_1\leq P_2$.

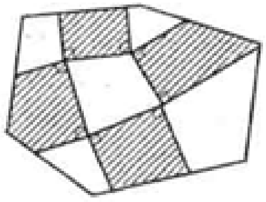

Рис. 1.6

Крім лінійних елементів у нерівності можуть входити кути та площі фігур. Зокрема, досить очевидним є твердження, що площа трикутника не перевищує півдобутку будь-яких двох його сторін:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A \leq \frac{1}{2} AB \cdot AC.$$

Задача 9.Площа трикутника зі сторонами $a<b<c$ дорівнює 1. Довести, що $b \geq \sqrt{2}$.

Розв'язання. Оскільки $2 = 2S = ab \cdot sin\angle C \leq ab \leq b^2$, *то* $b \geq \sqrt{2}$.

Задача 10.Довести, що площа трикутника, вершини якого лежать на сторонах паралелограма, не перевищує половини площі паралелограма.

Розв'язання. Якщо дві вершини трикутника лежать на одній стороні паралелограма, то його основа і висота не перевищують відповідно сторони і висоти паралелограма (Рис. 1.7). Отже, твердження задачі в цьому випадку справедливе.

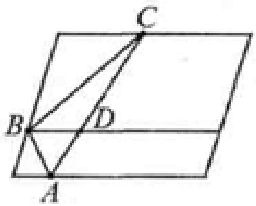

Рис. 1.7

Якщо ж усі вершини трикутника лежать на різних сторонах паралелограма, то знайдуться дві вершини, наприклад *A* і С, які лежать на протилежних сторонах. Проведемо тоді через *B* пряму, паралельну основі паралелограма. В результаті Δ *ABC* розіб'ється на два трикутники *BCD* та *ABD,* спільна основа *BD* яких лежить на одній стороні відповідних паралелограмів. Тому приходимо до вже розглянутого випадку.

Задача 11. Довести нерівність $S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$, де *S*— площа трикутника, p – його півпериметр.

Розв'язання. І з формули Герона маємо:

$$\frac{S^2}{p} = (p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{3}\right)^3 = \frac{p^3}{27}.$$

Тут ми скористалися відомою нерівністю Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним кількох додатних чисел

$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_{2\cdot\ldots\cdot}a_n} \le \frac{a_1 \cdot a_{2\cdot\ldots\cdot}a_n}{n}$. Звідси і випливає потрібна нерівність.

Відзначимо, що для доведення окремих нерівностей як допоміжний засіб може використовуватися площа. Наприклад.

Задача 12. Довести, що $h_a+h_b+h_c \ge 9r$, де h_a, h_b, h_c– висоти трикутника, а r–радіус вписаного в нього кола.

Розв’язання. Оскільки $ah_a=2S=r(a+b+c)$, то $h_a = r\left(1+\frac{b}{a}+\right.$ $ca.$ Аналогічно знаходимо$hb=r1+ab+cb,\ hc=r1+ac+bc$.

Звідси $h_a + h_b + h_c = r\left(3 + \left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right) + \left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)\right) \ge 9r,$

бо для додатних чисел x, y завжди $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \ge 2.$

Що ж стосується нерівностей із кутами, то у більшості з них фігурують тригонометричні функції цих кутів. Тому такі нерівності доречніше розглядати у тригонометрії.

Задача 13. Доведіть, що в трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут.

Доведення. Нехай b>с. Доведемо, що B>C (рис. 1.9).

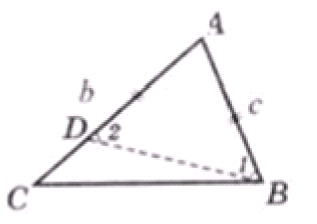

Рис. 1.8

Відкладемо $AD=c$ на стороні b. Тоді ∠1=∠2 і ∠1<∠B (складає частину кута B). ∠2>∠C (оскільки ∠2 – зовнішній для ΔBDC). Звідки, і ∠1>∠C, і тим більше ∠B>∠C. Що й потрібно було довести.

Задача 14. Доведіть що проти більшого кута в трикутнику лежить більша сторона.

Доведення. Нехай $\angle B > \angle C$. Доведемо, що у такому випадку b>с. Припустимо протилежне: b<с. Але тоді, за попередньою задачею $\angle B > \angle C$, що протирічить умові. Отже, наше припущення невірне, а тому $b > c$.

Задача 15. Доведіть нерівність трикутника: кожна сторона менша суми двох інших сторін і більша їх різниці.

Доведення. Нехай a– найбільша сторона в трикутнику ABC (рис.1.10).

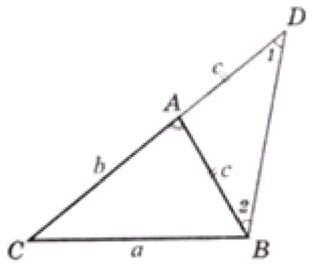

Рис. 1.9

Доведемо, що а<b+c і а>b-c. На продовженні AC відкладемо AD=c.

Тоді $<1 =< 2 = \frac{\angle A}{2}$ (оскільки $\angle$ A– зовнішній кут для ΔBDA). $\angle DBC$>$\angle 2$,тобто $<DBC > \frac{\angle A}{2}$(оскільки $\angle 2$ складає частину кута DBC).

У трикутнику BDC сторона a лежить проти кута $\frac{\angle A}{2}$, а сторона b+c– проти кута, більшого за $\frac{\angle A}{2}$.

Отже, a<b+c. Тим більше, c<a+b і b<a+c. Перенесемо в останній нерівності c в ліву частину, отримаємо: a>b-c. Що й потрібно було довести.

Задача 16. Точка K знаходиться усередині ΔABC. Що більше: $\angle BAC$ чи $\angle BKC$ (рис.1.11)?

Розв’язання.

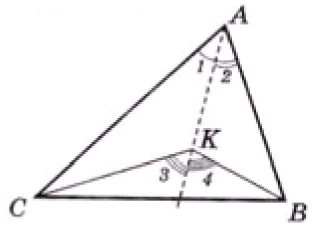

Рис. 1.10

Проведемо пряму *AK*. Очевидно, що ∠3>∠1 (він зовнішній для Δ*AKC*) і ∠4>∠2 (зовнішній для Δ*AKB*). Тоді і ∠*BKC*=∠3+∠4 буде більшим, ніж ∠*BAC*=∠1+∠2.

Задача 17. Доведіть, що медіана трикутника менша півсуми прилеглих до неї сторін.

Доведення. Згідно рисунка 1.13, доведемо, що $m_a < \frac{b+c}{2}$.

Продовживши медіану вдвічі, отримаємо паралелограм *ABDC*.

І $b + c > 2m_a$(за нерівністю трикутника для Δ*ACD*), що й потрібно

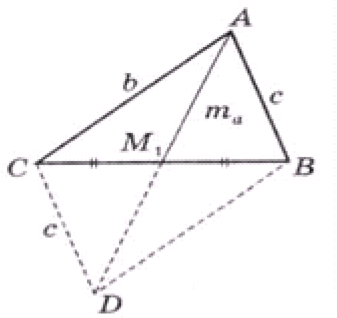

Рис. 1.11

було довести.

Задача 20. Доведіть, що для суми медіан будь-якого трикутника справедлива наступна подвійна нерівність:$\frac{3}{2}p < m_a + m_b + m_c < 2p$.

Доведення. Згідно із задачею 18, $m_a < \frac{b+c}{2}, m_b < \frac{a+c}{2}, m_c < \frac{b+a}{2}$.

Додавши ліві і праві частини нерівності, отримаємо: $m_a + m_b + m_c < 2p$. Далі для Δ*AMB* (рис.1.14):$\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b > c$.

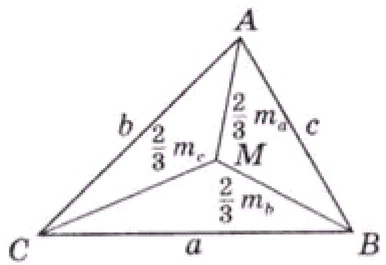

Рис. 1.12

Далі для ΔBMB:$\frac{2}{3}m_c + \frac{2}{3}m_b > a$ і ΔCMB:$\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_c > b$. Додавши ліві і праві частини нерівностей, отримаємо:

$$\frac{4}{3}(m_a + m_b + m_c) > 2p \text{ або } \frac{3}{2}p < m_a + m_b + m_c.$$

Що й потрібно було довести.

Задача 21. У ΔABC (b>c) проведена медіана m_a(рис.1.15). Який з кутів більший ∠1 чи ∠2? ∠3 чи ∠4?

Розв'язання.

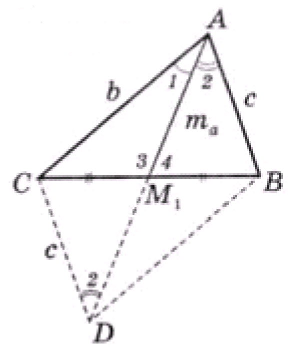

Рис. 1. 13

Продовживши медіану m_a, отримаємо паралелограм *ABDC*, в якому *CD* =*c* і ∠*ADC*=∠2 (як внутрішні різносторонні). У трикутнику *ACD* проти сторони b лежить ∠2, а проти *c* – ∠1. Оскільки *b*>*c*, то ∠2>∠1. крім того, ∠3=∠2+*B* (зовнішній для ΔABM_1), а ∠4=∠1+*C* (зовнішній кут для ΔACM_1). Тоді очевидно, що ∠3> ∠4.

Задача 22. Доведіть, що відрізок між вершиною і протилежною стороною трикутника менший найбільшої з двох інших сторін.

Доведення. Нехай в ΔABC *b*>*c* і AE – даний відрізок (рис.1.16).

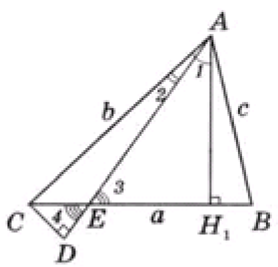

Рис. 1.14

Доведемо, що $AE<b$. Проведемо висоту AH_1. $\angle 1+\angle C=90°$ (з ΔAH_1C). Тоді $\angle 2+\angle C<90°$ і $\angle 3<90°$, оскільки $\angle 3=\angle 2+\angle C$ (зовнішній для ΔACE). Значить, і вертикальний з ним $\angle 4<90°$. Отже, висота в ΔACE потрапить на продовження AE. У прямокутному ΔACD $AC>AD$ (гіпотенуза більше катета) і тим більше $AC>AE$, тобто $AE<b$, що і потрібно було довести.

Задача 23. Доведіть, що відрізок, розміщений між двома сторонами трикутника, менший найбільшої із сторін трикутника.

Доведення. Нехай сторона a найбільша, а EF– цей відрізок (рис.1.15).

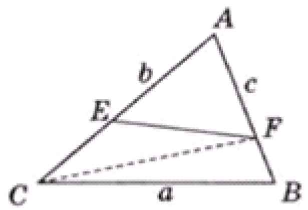

Рис. 1.15

Проведемо CF. Тоді для ΔAFC $EF<AF$ або $EF<CF$ (у залежності від того, який з відрізків AF або CF більший).

Нехай AF більший і $EF<AF$. Але $AF<AB=c$ і $c<a$ (за умовою). Значить, $EF<a$. Нехай CF більший відрізок. Тоді $EF<CF$. Але для ΔABC $CF<a$ (оскільки $a>b$ – найбільша сторона). І тим більше $EF<a$. Ми показали, що у будь-якому випадку $EF<a$. Що й потрібно було довести.

Задача 24. Доведіть, що для довільної точки K усередині трикутника ABC справедлива наступна нерівність: $p<KA<KB<KC<2p$(Рис. 1.16).

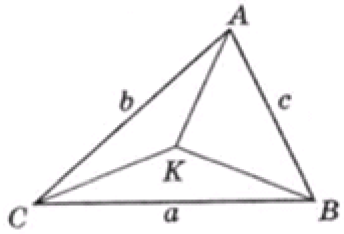

Рис. 1.16

Доведення. Ліва частина нерівності майже очевидна: *KB*+*KC*>*a*; *KC*+*KA*>*b* і *KA*+*KB*>*c*. Додавши ліві і праві частини і розділивши на 2, отримаємо потрібне. Помітимо також, що ліва частина нерівності виконується і для будь-якої точки *K* в площині Δ*ABC* (не обов'язково усередині).

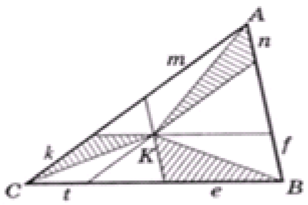

Рис. 1.17

Для доведення правої частини нерівності проведемо через точку *K* прямі паралельно сторонам Δ*ABC*. Сторони отриманих паралелограмів позначимо m і n, e і f, k і t (рис.1.17).

Запишемо нерівність трикутника для трьох заштрихованих трикутників: *KA*<m+n; *KB*<e+f; *KC*<k+t. Додавши ліві і праві частини, отримаємо: *KA*+*KB*+*KC*<m+n+e+f+k+t. Оскільки сума $m+n+e+f+k+t$ складає лише частину периметра Δ*ABC*, то *KA*+*KB*+*KC*<2p.

Задача 25. У трикутнику *ABC* довільна точка *M* лежить на стороні *BC*. Довести, що (AM-*AC)BC* ≤*(AB-AC)MC.*

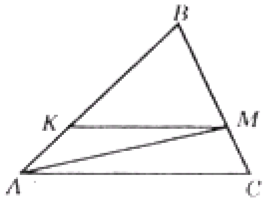

Рис. 1.18

Доведення. Проведемо *MK* паралельно AC. Із подібності трикутників *ABC* і *KBM,* випливає $\frac{AK}{AB}=\frac{CM}{BC}$ або $AK = CM\cdot\frac{AB}{CB}$, аналогічно $\frac{MK}{AC}=\frac{MB}{CB}, MK =$

$MB \cdot \frac{AC}{CB}$. Оскільки АМ $\leq AK + KM$, то $AM \leq \frac{CM \cdot AB}{BC} + \frac{MB \cdot AC}{BC}$. Але $MB=CB-CM$, отже:

$$AM \leq \frac{CM \cdot AB + (CB - CM)AC}{BC}, AM \cdot BC \leq CM \cdot AB + CB \cdot AC - CM \cdot AC,$$

$AM \cdot BC - BC \cdot AC \leq CM(AB - AC)$ *або* $BC(AM - AC) \leq CM(AB - AC)$, що й треба було довести.

Довести нерівності.

1. $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{4}{3}p^2$.

Доведення. Згідно з нерівністю $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$, маємо

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{4}{3}\left(\frac{(a+b+c)^2}{2}\right) = \frac{4}{3}p^2.$$

2. $(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \leq 4a^2b^2$.

Доведення. Виділимо у всіх множниках лівої частини нерівності півпериметри, після чого скористаємося формулою для обчислення площі трикутника $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ та обмеженістю синуса:

$2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c) = 16S^2 = 16\,\frac{1}{4}a^2b^2\sin^2\gamma \leq 4a^2b^2$.

3. $abc \leq R^2(a+b+c)$.

Доведення. Оскільки $2r \leq R$, то за допомогою ланцюжка некладних тотожних перетворень доводимо нерівність:

$abc = 4RS = 4R \cdot pr \leq 2R \cdot p \cdot R = R^2 \cdot 2p = R^2(a+b+c)$.

4. $a^3+b^3+c^3 \geq 8S(2R-r)$.

Доведення. Використовуючи формули

$S = \frac{abc}{4R} = pr$ та $r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$ перетворимо різницю:

$a^3+b^3+c^3-16SR+8Sr = a^3+b^3+c^3-4abc+8(p-a)(p-b)(p-c) =$

$= a^3+b^3+c^3-4abc+(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) =$

$= a^3+b^3+c^3-4abc+(a^2b+bc^2-b^3+a^2c+b^2c-c^3+c^2a+b^2a-a^3-2abc) = ab(a+b-c)+ac(a+c-b)+bc(b+c-a)-3abc = abc\left(\frac{a+b-c}{c}+\frac{a+c-b}{b}+\frac{b+c-a}{a}-3\right) =$

$$= abc\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-6\right)=$$

$$= abc\left(\frac{a+b+c}{c}+\frac{a+c+b}{b}+\frac{b+c+a}{a}-9\right)=$$

$$= abc\left((a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9\right)\geq abc(9-9)=0.$$

5. $S \leq \frac{a^2+b^2}{4}$.

Доведення. Площу трикутника можна обчислити за формулою , $S = \frac{absin\gamma}{2}$, і оскільки $|\sin\gamma| \leq 1$, то $S \leq \frac{ab}{2}$. За нерівністю Коші $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Отже $S \leq \frac{ab}{2} = \frac{2ab}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{4}$.

Рівність можлива у рівнобедреному трикутнику.

6. *R>2r*.

Доведення. Згідно з нерівністю *abc* ≥ *(a + b-c)(a + c -b)(b+ c -a)* і формул для обчислення площі трикутника

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R}$, маємо:

$$R = \frac{abc}{4S} \geq \frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)=}{4S}$$

$$= \frac{(a+b+c-2c)(a+c+b-2b)(b+c+a-2a)}{4S} =$$

$$= \frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{4S} = \frac{2S^2}{pS} = \frac{2S}{p} = 2r.$$

Рівність досягається у рівносторонньому трикутнику.

7. $m_a \geq \frac{1}{2}\sqrt{a(8p-9a)}$.

Доведення. Відомо, що $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$.

Перетворимо підкореневий вираз: $2b^2 + 2c^2 - a^2 = 4a^2 + (2a^2 + 2b^2) + (2a^2 + 2c^2) - 9a^2$. Урахувавши, що $a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{ab}$, маємо:

$$2b^2 + 2c^2 - a^2 \geq 4a^2 + 4ab + 4ac - 9a^2 = 4a(a+b+c) - 9a^2 = a(8p-9a).$$

Отже, $m_a \geq \frac{1}{2}(8p-9a)$. Рівність досягається при $a=b=c$.

2.2 Задачі на доведення геометричних нерівностей в інших багатокутниках

Задача 1. Нехай $ABCD$ - опуклий чотирикутник. Доведіть, що $AB + CD < AC + BD$.

Доведення. Нехай O - точка перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$. Тоді $AC + BD = (AO + OC) + (BO + OD) = (AO + OB) + (OC + OD) > AB + CD$.

Задача 2. Опуклий багатокутник, площа якого більше $0,5$, поміщений в квадрат зі стороною 1. Доведіть, що всередині багатокутника можна помістити відрізок довжини $0,5$, паралельний стороні квадрата.

Доведення. Проведемо через всі вершини багатокутника прямі, паралельні одній парі сторін квадрата і розіб'ємо тим самим квадрат на смужки. Кожна така смужка відрізає від багатокутника трапецію або трикутник. Досить довести , що довжина однієї з основ цих трапецій більше $0,5$. Припустимо , що довжини основ всіх трапецій не перевищують $0,5$. Тоді площа кожної трапеції не перевищує половини висоти смужки. Тому площа багатокутника , що дорівнює сумі площ трапецій і трикутників , на які він розрізаний, дорівнює половині суми висот смужок , тобто не перевершує $0,5$.

Задача 3. Доведіть , що площа паралелограма , який лежить всередині трикутника , не перевищує половини площі трикутника.

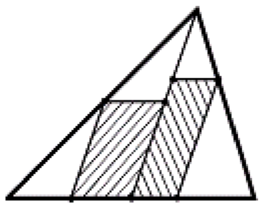

Рис. 1.19

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли дві сторони паралелограма лежать на прямих *AB* і *AC* , а вершина *X* лежить на стороні *BC*. Якщо $BX : CX = x : (1 - x)$,то відношення площі паралелограма до площі трикутника рівне $2x(1 - x) \leq 1/2$.У загальному випадку проведемо паралельні прямі, що містять пару сторін даного паралелограма. Площа даного паралелограма не перевищує суми площ заштрихованих паралелограмів .Якщо прямі , що містять пару сторін даного паралелограма , перетинають лише дві сторони трикутника , то можна обмежитися одним заштрихованим паралелограмом.

Задача 4. Доведіть, що в будь-якому опуклому шестикутнику площі *S* знайдеться діагональ, що відсікає від нього трикутник площі не більше *S / 6*.

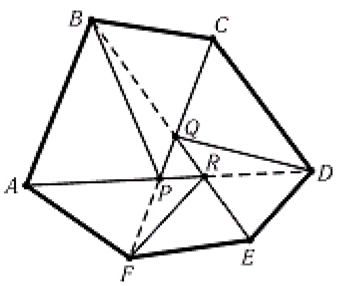

Рис. 1.20

Доведення. Позначимо точки перетину діагоналей *AD* і *CF* , *CF* і *BE* , *BE* і *AD* через *P* , *Q* , *R* відповідно. Чотирикутники *ABCP* і *CDEQ* не мають спільних внутрішніх точок , так як сторони *CP* і *QC* лежать на прямій *C*F , а відрізки *AB* і *DE* - по різні сторони від неї. Аналогічно чотирикутники *ABCP* , *CDEQ* і *EFAR* не мають попарно спільних внутрішніх точок. Тому сума їх площ не перевершує *S*. Отже, сума площ трикутників *ABP* , *BCP* , *CDQ* , *DEQ*

, EFR , FAR не перевищує S , тобто площа одного з них , наприклад ABP ,не перевищує $S / 6$. Точка P лежить на відрізку CF , тому або точка C , або точка F віддалена від прямої AB не більше, ніж точка P. Отже, або $S_{ABC} \leq S_{ABP} \leq S / 6$, або $S_{ABF} \leq S_{ABP} \leq S / 6$.

Задача 5. Доведіть, що якщо два протилежні кути чотирикутника тупі, то діагональ, що з'єднує вершини цих кутів, коротша другої діагоналі.

Доведення. Нехай кути *B* і *D* чотирикутника *ABCD* тупі. Тоді точки *B* і *D* лежать всередині кола з діаметром *AC*. Так як відстань між будь-якими двома точками, що лежать усередині кола, менше його діаметра, то *BD* <*AC*.

Задача 6. Довести, що серед усіх чотирикутників з даними діагоналями і даним кутом між ними найменший периметр має паралелограм.

Доведення. Нехай *ABCD* – довільний чотирикутник у якому *AC=a, BD=b*, $\angle(AC, BD)=\alpha$. *AC, BD* – діагоналі, $0< \alpha \leq 90°$. Позначимо через *E* і *M* такі точки, що *BECA* і *ACMD* – паралелограми. Тоді *BEMD* – паралелограміз сторонами *a, b* і кутом α між ними (тобто є інваріантом для різних таких чотирикутників *ABCD*.

Використовуючи нерівність трикутника, отримуємо $AB+BC+CD+DA= EC+BC+CD+CM \geq ED+BM$.

Отже, периметр чотирикутника *ABCD* не менший, ніж сума довжин діагоналей паралелограма *BEMD*. Знак рівності досягається лише тоді, коли точки *B, C, M* лежать на одній прямій та точки *E, C, D* лежать на одній прямій, тобто при виконанні умови, що *ABCD* – паралелограм.

Задача 7. Дано чотирикутник *ABCD*. Довести, що $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD+BC \cdot AD$(нерівність Птолемея).

Доведення. Відкладаємо на *AB, AC, AD* відрізки AB_1, AC_1, AD_1, такі, що $AB_1 = \frac{1}{AB}$, $AC_1 = \frac{1}{AC}$, $AD_1 = \frac{1}{AD}$. Тоді маємо $AB : AC = AC_1 : AB_1$, тому трикутники

AC_1B_1 та ABC подібні. З відношень $\frac{AB}{AC_1} = \frac{AC}{AB_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ отримуємо $B_1C_1 = \frac{BC}{AB}AC_1 = \frac{BC}{AB \cdot AC}$.

Аналогічно $AB : AD = AD_1 : AB_1$, тому трикутники ABD і AD_1B_1 подібні. З відношень $\frac{AB}{AD_1} = \frac{AD}{AB_1} = \frac{BD}{B_1D_1}$ отримаєиво, що $B_1D_1 = \frac{BD}{AB}AD_1 = \frac{BD}{AB \cdot AD}$.

Також $AC : AD = AD_1 : AC_1$, тому трикутники ACD і AD_1C_1 подібні. З відношень $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AC_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$ отримаємо, що $C_1D_1 = \frac{CD}{AC}AD_1 = \frac{CD}{AC \cdot AD}$.

З нерівності $B_1D_1 \leq B_1C_1 + C_1D_1$, або $\frac{BD}{AB \cdot AD} \leq \frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AC \cdot AD}$. Отримуємо $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

При доведенні геометричних нерівностей також використовуються добре знайомі такі твердження: довжина перпендикуляра менша за довжину похилої; у трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона (і навпаки). Як допоміжний засіб часто використовуються формули площі трикутника та залежності між середніми величинами.

Висновки

У процесі дослідження обраної теми мета дипломної роботи досягнута, повністю вирішені поставлені завдання й отримані наступні результати й висновки:

1. Тема дослідження не має великої теоретичної бази, проте має неабиякий прикладний характер.
2. Задачі на доведення геометричних нерівностей зустрічаються в планіметрії досить часто.
3. Багато олімпіад та конкурсів включать завдання на доведення геометричних нерівностей.
4. Загальні ідеї, які часто застосовують при доведенні таких нерівностей , базуються на відомих властивостях алгебраїчних нерівностей.

Завдання дослідження виконано:

- Розглянуто основні геометричні нерівності в трикутниках та багатокутниках;
- Опрацьовано методи доведення планіметричних нерівностей;
- Розв'язано ряд задач на доведення геометричних нерівностей (25 у трикутниках та 7 у чотирикутниках).

На мою думку, задачі такого типу необхідно включати в олімпіади та розглядати на факультативних заняттях. В школі я б рекомендувала розв'язувати побільше таких задач, щоб учні мали навики роботи з геометричними нерівностями.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Жидков С.І. Геометричні нерівності для довільного трикутника - Х. : Видавнича група "Основа", 2008. - 143 с. - (Б-ка ж-лу "Математика в школах України" ; вип. 12 (72)).

2. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. М., Наука, Физматлит, 1970. - 336с. (Выпуск 12 серии "Библиотека математического кружка").

3. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. 5-е изд., испр.и доп.—М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2006.— 640 с.

4. Радченко В.М. Про доведення нерівностей // У світі математики, 2(1996), №1.

5. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. — К.: Видавництво А.С.К., 2004. — 344 с.: іл.

6. Сивашинський І. Х. Неравенства в задачах.−М.:Наука, 1967.

7. Федак І.В. Розв'язування рівнянь. Доведення нерівностей: Посібник для підготовки до математичних олімпіад у 9-10 класах //Тернопіль,1997, 64с.

8. Филипповский Г. Школьная геометрия в миниатюрах // Киев, “Грот”, 2002, 239с.

9. Кикоть В. М., Кислюк О.О. Посібник для підготовки учнів 7-11 класів до олімпіад К-77 Математика, Шепетівка, 2011. – 20с.

10. Яремчук М.Л., Попруженко М.Г. Збірник геометричних задач. Планіметрія //К., Радянська школа, 1996.