Форма N Н-9.02

Міністерство освіти і науки України

Житомирський державний університет імені Івана Франка

Фізико-математичний факультет

Кафедра алгебри та геометрії

Освітньо-кваліфікаційний рівень «спеціаліст»

ДИПЛОМНА РОБОТА

Алгебраїчні криві та ейдографіка

Виконала: студентка 51-б групи,
спеціальності: 7.04020101 Математика*,
денного відділення
Заворотнюк Тетяна Петрівна

Керівник: кандидат педагогічних наук,
доцент кафедри алгебри та геометрії
Чемерис Ольга Анатоліївна

Житомир – 2014 рік

Зміст роботи

Вступ …………………………………………………………………...3

Розділ 1. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики

1.1. Комп'ютерно-орієнтовані технології навчання математики ………..….5

1.2. Розвиток особистості у процесі навчання математики засобами ІКТ…21

1.3. Розвиток креативності за допомогою ейдографіки…………………….26

Розділ 2. Теоретичні відомості про деякі визначні алгебраїчні криві

2.1. Листок Декарта ……………………………………………………29

2.2. Цисоїда Діоеклеса …………………………………………………32

2.3. Строфоїда ……………………………………………………………35

2.4. Верзієра………………………………………………………………42

2.5. Равлик Паскаля………………………………………………………44

2.6. Кардіоїда ……………………………………………………………47

2.7. Астроїда ……………………………………………………………..51

2.8. Лемніската Бернуллі…………………………………………………53

2.9. Троянди ………………………………………………………………61

Розділ 3. Графічні етюди в техніці ейдографіки………………………………67

Висновки ……………………………………………………………………85

Список використаних джерел та літератури …………………………………86

Вступ

Сьогодні загально прийнято, що інформація і її вища форма – знання – є вирішальним фактором, який визначає розвиток суспільства в цілому. Для того, щоб гігантські об'єми інформації і знань, що створювалися в ході сучасної інформаційної революції, були ефективно використані для вирішення проблем та подолання реальних труднощів, Україні необхідно провести інтенсивну інформатизацію суспільства.

Важливою складовою цієї інформатизації є використання нових інформаційних технологій в освіті. Прогрес України в економіці, політиці, культурі, науці неможливий без добре налагодженої освітньої системи на різних рівнях навчання. Поділяючи погляди науковців на тотальну інформатизацію усіх ланок сучасного життя як категоричний імператив, бачимо низку невирішених або спірних питань у царині напрацювання ефективної методики використання ІКТ у шкільній та педагогічній освіті.

Мало дослідженою є проблема залучення учнів та майбутніх учителів до творчої діяльності, яка б виходила за жорсткі рамки суто математичних задач і дозволяла поєднувати математику, мистецтво і комп'ютер. Саме цей напрям обрано для детальних науково-методичних і практичних розвідок. Тобто мова йде про ейдографіку, а за основу дослідження цієї особливої техніки взято алгебраїчні криві. Оскільки, на сучасному рівні розвитку технічної думки є необхідність у знаннях про визначні алгебраїчні криві. Вони не так вже й рідко зустрічаються в природі і мають практичне значення в житті людини.

Мета даної дипломної роботи – розкрити особливості застосування ейдографіки до алгебраїчних кривих.

Для досягнення мети були поставлені наступні *завдання*:

1. Дослідити наукову та методичну літературу з обраної теми.
2. Проаналізувати використання сучасних інформаційних технологій в освіті і принципи впровадження комп'ютерів в навчально-виховний процес.

3. Визначити вплив засобів ІКТ на підвищення активності навчально-пізнавальної діяльності учнів в процесі навчання математики з використанням комп’ютера.
4. Розкрити форми і методи використання комп'ютера і комп'ютерних технологій в навчально-виховному процесі.
5. Розглянути ейдографіку як потужний засіб розвитку творчого мислення.
6. Розглянути теоретичний матеріал з теми «Алгебраїчні криві».
7. Ознайомитись з теоретичними відомостями та оволодіти практичними навичками роботи з ППЗ GRAN-1.
8. Навести приклади застосування ейдографіки до створення графічних етюдів за допомогою алгебраїчних кривих.

Актуальність дослідження полягає в доцільному, педагогічно виваженому, методично вмотивованому використанні інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) у процесі навчання математики в загальноосвітніх навчальних закладах та під час фахової підготовки майбутніх вчителів.

Дипломна робота складається з *трьох розділів*.

У першому розділі здійснено огляд науково-методичної, психолого-педагогічної і навчальної літератури, в якій розкриваються основні погляди на структуру комп’ютерно-орієнтованої методичної системи навчання математики, розглянуто основні засади використання ІКТ у математиці, проаналізовано переваги використання ейдографіки як потужного засобу розвитку креативності.

У другому розділі подано теоретичний матеріал щодо деяких алгебраїчних кривих: особливості форми, основні властивості, спосіб побудови, історична довідка, практичнее застосування.

У третьому розділі зосереджується увага на практичному застосуванні графічних образів алгебраїчних кривих до створення графічних етюдів за допомогою ІКТ, тобто мова йде про ейдографіку.

Розділ 1. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики

1.1. Комп'ютерно-орієнтовані технології навчання математики

Процеси інформатизації та глобалізації мають фундаментальний вплив на освітню філософію та дидактику. Насамперед це стосується технології навчання, трансляції знань, формування системи цінностей. Освіта має орієнтуватись на діяльнісні, розвиваючі технології, які формують у учнів уміння вчитися, оперувати і управляти інформацією, швидко приймати рішення, пристосовуватись до потреб ринку праці (формувати основні життєві компетенції). Світовий процес переходу до інформаційного суспільства, а також економічні, політичні і соціальні зміни, що відбуваються в Україні, зумовлюють необхідність прискорення реформування системи освіти.

Людство має нагальну потребу обробки інформації. Необхідність пошуку нових організаційних форм і методик навчання зумовлена тим, що виникла потреба в розробці методики, яка відповідає адаптації школи до комп'ютерної епохи. Школа має стати найважливішим фактором формування нових сучасних життєвих установок особистості. Це завдання під силу лише тим учителям, які здатні не тільки "завантажувати" пам'ять учнів, а й формувати їх компетентності. В умовах традиційних форм та методів навчання школярі, отримуючи інформацію пасивно, не вміють самостійно її здобувати, а також застосовувати те, що знають.

Сучасному суспільству потрібна компетентна особистість, здатна брати активну участь у розвитку економіки, науки, культури. Тому сьогодні у шкільній освіті на перший план висувається завдання створення сприятливих умов для виявлення і розвитку здібностей учнів, задоволення їхніх інтересів та потреб, розвитку навчально-пізнавальної активності та творчої самостійності.

Освіта має орієнтуватися на перспективи розвитку суспільства. А це означає, що в сучасній освіті необхідно застосовувати найновітніші інформаційні технології. Створення добротного інформаційного середовища є ключовим завданням на шляху переходу до інформаційного суспільства. Масове впровадження інформаційно-комунікативних технологій (ІКТ) в освітню сферу висуває проблему комп’ютеризації закладів освіти в розряд пріоритетних. Розвиток і впровадження ІКТ спрямовані на їх комплексне інформаційно-ресурсне й методичне забезпечення.

Кожний шкільний предмет здатний суттєво вплинути на менталітет людини, яка формує себе як особистість, на методи вирішення не тільки шкільних завдань, а й навколишнього середовища. Сучасний випускник школи повинен мати компетенцію використання інформаційних технологій, тобто технологій, що проектуються сучасною індустрією як в освіті, так і в повсякденному житті. Нові інформаційні технології відкривають учням доступ до нетрадиційних джерел інформації, підвищують ефективність самостійної роботи, дають нові можливості для творчості, знаходження і закріплення будь-яких професійних навичок, дозволяють реалізовувати принципово нові форми і методи навчання.

Розгляд комплексу питань, пов'язаних із використанням сучасних ІКТ у навчальному процесі, дидактичні та психологічні аспекти застосування ІКТН, проблеми формування інформаційної культури як системної особистісної якості учня і вчителя знайшли відображення у працях М.І.Жалдака, Н.В.Морзе, С.А. Ракова, О.В. Співаковського, Є.М. Смирнової-Трибульскої, Ю.В. Триуса, Є.Ф. Вінниченка, Ю.В. Горошка, І.В. Лупан, СО. Семерікова та ін. Результати дослідження цих авторів переконливо свідчать, що впровадження ІКТ у навчання математики створює передумови поглиблення змісту математичної освіти, сприяє інтенсифікації процесу навчання, розвиває особистість, стимулюючи пізнавальну активність школяра, сприяє підготовці спеціалістів, здатних працювати в умовах інформаційного суспільства та ефективно використовувати математичні знання на практиці. Впровадження ІКТН сприяє підвищенню практичної спрямованості навчання математики, формуванню в учнів життєво необхідних навичок, збагачує їх досвідом експериментальної та дослідницької роботи. Тому якщо раніше основною функцією математичної освіти була власне математична освіта, то на сучасному етапі на перше місце виходить інша не менш важлива функція - освіта за допомогою математики.

Структура методичної системи

Сучасні інформаційні технології - це сукупності методів, засобів і прийомів, що використовуються для забезпечення ефективної діяльності людей в різноманітних виробничих і невиробничих процесах. Інформаційно-комунікаційні технології навчання, включаючи комп'ютер як засіб управління навчально-пізнавальною діяльністю, є сукупністю комп'ютерно-орієнтованих методів, засобів та організаційних форм навчання. Поряд з терміном «інформаційно-комунікаційні технології навчання» використовується термін «комп 'ютерно-орієнтовані технології навчання».

Структура МСН визначається трьома основними питаннями: «навіщо навчати?» (цілі), «чого навчати?» (зміст) і «як навчати?» (методи, засоби, форми навчання). Згідно з системним підходом на рівні методики навчання за А.М. Пшикало, всі компоненти навчального процесу - цілі, зміст, методи і прийоми, засоби, організаційні форми навчання – утворюють єдине ціле із визначеними внутрішніми зв'язками. Сукупність компонентів МСН, що відповідають на питання «як навчати?», деякі науковці розглядають як певну підсистему – технології навчання у вузькому смислі. Структуру з підсистемою «технологія навчання» можна подати як триєдине ціле, що містить цільовий, змістовий, технологічний компоненти МСН. Визначальними є цільовий та змістовий компоненти.

На думку Н.В. Морзе, модель МСН, враховуючи темпи розвитку засобів інформатизації, слід доповнити включенням очікуваних результатів навчання; технології добору змісту, методів, форм і засобів навчання; технології встановлення зв'язків між елементами методичної системи

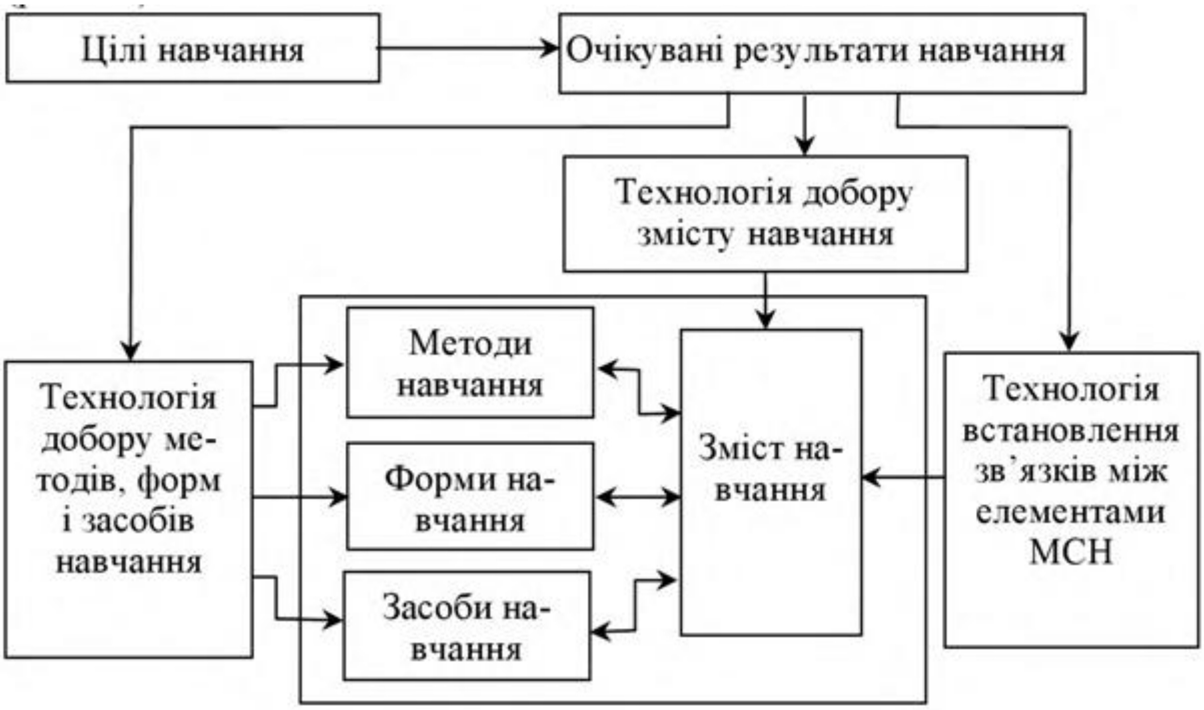


Рис. 1.1. Модель методичної системи навчання за Н.В. Морзе

Під комп'ютерно-орієнтованою МСН за Ю.В. Триусом розумітимемо МСН, яка забезпечує цілеспрямований процес здобування знань, набуття умінь і навичок, засвоєння способів пізнавальної діяльності суб'єктом навчання і розвиток його творчих здібностей на основі широкого використання ІКТ (рис. 1.1).

Щоб застосування інформаційно-комунікаційних технологій гарантувало досягнення зазначених цілей, необхідний відповідний добір змісту, методів, форм організації навчання; диференціація та індивідуалізація навчального процесу, підвищення внутрішньої мотивації учня, створення середовища, сприятливого для розвитку особистості

Рис. 1.2. Структура методичної системи навчання на основі ІКТ за Ю.В. Триусом

Як зазначає М.І. Жалдак, в основу інформатизації навчального процесу слід покласти створення і широке впровадження у повсякденну педагогічну практику нових КОМСН на принципах поступового і неантагоністичного, без руйнівних перебудов і реформ вбудовування ІКТ у діючі дидактичні системи, гармонійного поєднання ТМСН і КОМСН, не заперечування і відкидання здобутків педагогічної науки минулого, а їх удосконалення і посилення, в тому числі і за рахунок використання досягнень у розвитку комп'ютерної техніки і засобів зв'язку.

Є.М. Смирнова-Трибульска виділяє чотири ступені включення комп'ютерів у дидактичний процес. Найнижчий ступінь - доповнення, розміщення комп'ютерів з ІКТ окремо від середовищ навчання. Другий ступінь - «розміщення» комп'ютерів та ІКТ в навчальному предметі, однак з обтяжливою рисою «доповнення», бо його використання незінтегроване з предметним змістом і його структурою. На третьому етапі (сучасному) відбувається інтеграція ІКТ у предмет навчання. Це означає повну інтеграцію програм навчання, дидактичного забезпечення, у тому числі підручників, відповідного програмного забезпечення навчального призначення і методів використання їх у навчанні визначеного предмета. Найвищим ступенем має стати повна міжпредметна інтеграція з певною предметною галуззю, наприклад, математикою.

Ю.В. Триус використання ІКТ у навчальному процесі при традиційній МСН характеризує такими рівнями:

- ІКТ не використовуються;
- використання вчителем, викладачем ІКТ для підготовки навчально-методичних матеріалів з дисципліни;
- епізодичне використання ППЗ у навчальному процесі, зокрема для контролю знань, вмінь і навичок учнів чи студентів;
- епізодичне використання ІКТ як засобів навчання і засобів управління навчальною діяльністю.

Для КОМСН вищих навчальних закладів виокремлено три рівні.

- Систематичне використання ІКТ у деяких видах навчальної діяльності студентів при навчанні дисципліни (на лекціях, практичних і лабораторних заняттях). Використання ІКТ суттєво впливає на деякі компоненти МСН (методи, засоби і форми організації навчання).
- Систематичне використання ІКТ в усіх видах навчальної діяльності студентів при навчанні дисципліни. Використання ІКТ суттєво впливає на всі компоненти методичної системи навчання (цілі, зміст, методи, засоби і форми організації навчання).
- Організація навчального процесу з дисципліни на основі освітньо-наукового інформаційного середовища. У навчальному процесі використовуються переважно комп'ютерно-орієнтовані методи, засоби і форми організації навчання на основі комп'ютерно-орієнтованого навчально-методичного комплексу дисципліни

Аналізуючи причини низького рівня використання вчителями математики ІКТ у професійній діяльності, Є.М. Смирнова-Трибульска виділяє наступні проблеми:

1) теоретичні і правові (відсутність атестаційних вимог з використання ІКТ і дистанційних форм навчання та цілеспрямованої системи навчання вчителів);

2) методичні (брак методичної літератури, недостатня розробленість методик використання ІКТ на уроках та в дистанційних формах навчання в професійній діяльності вчителя);
3) технічні (нестача комп'ютерної техніки, обмежений доступ до Інтернет);
4) в області програмного забезпечення (недостатня кількість педагогічних програмних засобів, освітніх порталів і платформ дистанційного навчання);
5) організаційні (проведення в комп'ютерному класі уроків з більшості навчальних дисциплін не передбачено у шкільному розкладі; не скрізь організовані або слабо функціонують регіональні системи методичної підтримки на основі Інтернет-технологій);
6) особистісні (вчителі невмотивовані використовувати ІКТ; не сформована потреба в безперервному навчанні і підвищенні кваліфікації).

Цілі навчання

На основі аналізу джерел можемо виділити такі цілі КОМСН, як розвиток особистості учня, інтенсифікація всіх рівнів навчально-виховного процесу за рахунок застосування ІКТН, оптимізація пошуку необхідних користувачу відомостей, підвищення якості освіти; виконання соціального замовлення суспільства на формування особистості, що проживатиме в умовах інформаційного суспільства.

Спостерігається диференціація використання комп'ютера як засобу навчання, виховання та розвитку від комп'ютерних ігор для раннього шкільного віку до тренажера, консультанта, екзаменатора і партнера у вирішенні конкретних навчальних завдань для старшокласників. Це накладає вимогу враховувати вікові особливості учнів і застосовувати в навчанні доступні засоби. ІКТ справляють вплив на учнів через спілкування в мережі Інтернет, телепередачі, відеомагнітофонні записи та інші опосередковані прояви, що безупинно змінюють все інформаційне середовище й тих людей, у спілкуванні з якими виростає дитина і формується як особистість. Значні переваги перед текстовим, графічним чи іншим традиційним повідомленням має аудіовізуальне у поєднанні з кольором і рухом, що якісно інакше сприймається і запам'ятовується, а іноді має властивість вступати в несподівані асоціативні зв'язки з іншими фрагментами відомостей. Через істотне розширення обсягу і характеру доступних людині відомостей, форм їх одержання і перетворення, через діяльність і спілкування відбувається внутрішнє збагачення особистості, накопичується її різноманітний духовний потенціал. Завдяки автоматизації функцій розумової праці людини за рахунок перекладання на комп'ютер доступних йому рутинних логічних і обчислювальних операцій, вивільняються резерви розуму для виконання творчої роботи.

Ю.І. Машбиць серед найбільш плідних застосувань комп'ютера виокремлює значні можливості у реалізації проблемного навчання; формування творчого мислення школярів, готовності їх до творчої праці. Автор наголошує на формуванні алгоритмічного мислення як процесі, що передбачає евристичний пошук, сміливий здогад, інтуїцію - усе те, що у найбільшій мірі характеризує творчі витоки мислительного акту. Важливо, щоб надмірна алгоритмізація діяльності на основі готових вказівок не стала гальмом для розвитку творчих якостей, пов'язаних із здогадкою і пошуком скорочених шляхів розв'язування задачі.

Важливо, щоб учні могли мислено уявити весь логічний ланцюг творчого процесу застосування комп'ютера на практиці: явище —► його математична модель —► алгоритм —► програма мовою ЕОМ —► розв'язування задачі за допомогою ЕОМ —► інтерпретація результату —► область його застосування на практиці. При моделюванні виокремлюється сама сутність явищ і стає ясною їх спільність.

Якщо застосовується ППЗ, то учні виступають в ролі користувачів програмного забезпечення. Запропонований ланцюг дещо видозмінюється: явище —► розробка моделі —► розв'язування засобами ППЗ — ► інтерпретація отриманих результатів —► застосування на практиці. При цьому захоплення використанням готових моделей погрожує передчасним розривом зв'язку виучуваного явища з дійсністю. Для уникнення формалізму в знаннях учнів потрібно віддати перевагу створенню моделі перед використанням розробленої іншими. Пропонуючи готові моделі, динамічні креслення в дидактичній грі з комп'ютерною підтримкою, необхідно обговорювати з учнями етапи їх розробки, відтворювати послідовність кроків побудови.

Використання ІКТ у навчальному процесі має сприяти підвищенню інтересу учнів до отримання знань; забезпеченню диференціації, індивідуалізації у процесі навчання, зокрема проходженню учнем матеріалу за власним темпом; об'єктивності контролю якості знань; активізації процесу навчання, зокрема через інтенсифікацію подачі матеріалу з використанням ІКТ; формуванню умінь і навичок різноманітної творчої діяльності; вихованню інформаційної культури; оволодінню навичками оперативного прийняття рішень в складних ситуаціях.

Одним з найважливіших принципів, що дозволяють забезпечити розвиваюче навчання, є профільна та рівнева диференціація, індивідуалізація навчання. М.І. Жалдак акцентує увагу на тому, що при використанні ІКТ у навчальному процесі «мова не повинна йти лише про вивчення певного навчального матеріалу, а, перш за все, про всебічний і гармонійний розвиток особистості учнів, їх творчих здібностей». ІКТН, відкриваючи перспективи диференціації навчання, розкриття творчого потенціалу, пізнавальних здібностей кожного учасника навчального процесу, мають стати особистісно орієнтованими.

Індивідуалізація навчання на основі ІКТ може бути забезпечена при рефлексивному управлінні навчальною діяльністю. Використання комп'ютерно-орієнтованих систем навчання має забезпечувати відповідність інформаційної моделі конкретному учневі. Для цього необхідно передбачити визначення стійких і ситуативних індивідуальних особливостей учнів.

Зміст навчання

Зміст навчання на рівні навчального предмету - система знань з певної наукової галузі, практичних вмінь і навичок та способів діяльності, якими повинен оволодіти учень у процесі навчання.

Навчальна програма з математики - основний документ, що визначає зміст і обсяг знань з цього предмету, умінь і навичок, які підлягають засвоєнню, зміст розділів і тем з розподілом їх за роками навчання.

Вплив ІКТ на зміст навчання проявляється в розширенні та поглибленні теоретичних основ курсу математики завдяки більшій їх доступності для школярів, в поглибленні міжпредметних зв'язків і використанні завдань прикладного характеру.

У зв'язку з впровадженням ІКТН математики виникає потреба в перегляді системи завдань для формування знань, умінь та навичок школярів, для контролю і оцінювання знань. ПЗНП мають відповідати вимогам доцільності створення і практичного застосування. Тому електронні засоби слід наповнювати таким змістом, який найбільш ефективно може бути поданий і засвоєний переважно з використанням комп'ютера. В той же час, з впровадженням обчислювальної техніки необхідно обачливо підходити до зміни змісту математичної освіти з метою запобігання зниженню її рівня.

Засоби навчання

Використання засобів навчання залежить від цілей і завдань уроку, змісту і логіки подачі навчального матеріалу, майстерності вчителя.

Засоби навчання ділять на три групи: а) засоби зорової (візуальної) наочності (діафільми, діапозитиви, моделі, муляжі, таблиці, картини, графіки, роздавальний матеріал); б) засоби слухової наочності (платівки, компакт-диски, аудіокасети); в) наочно-слухові (аудіовізуальні) засоби (діафільми зі звуковим супроводом, кінофільми і відеофільми, кінофрагменти тощо).

До традиційних засобів навчання відносять наочні та технічні засоби навчання, підручники й посібники, дидактичні матеріали, довідкову та іншу навчально-методичну предметну літературу.

Схвальні відгуки педагогів отримали посібники, які демонструють шляхи впровадження в навчальний процес ППЗ, інтеграцію навчальних дисциплін та посилення міжпредметних зв'язків.

Серед комп'ютерно-орієнтованих засобів навчання математики розрізняють апаратне забезпечення (комп'ютер, засоби телекомунікацій) та програмне забезпечення (операційні системи; текстові й графічні редактори; табличні процесори; експертні системи; педагогічні програмні засоби; проблемно-орієнтовані програми; електронні підручники, електронні бібліотеки, методичні та консультаційні каталоги, навчальні телекомунікаційні проекти та ін.). Серед програмних засобів комп'ютерної математики виділяють системи для чисельних розрахунків, табличні процесори, матричні системи, системи для статистичних обчислень, спеціалізовані програми і пакети, системи комп'ютерної алгебри і геометрії, універсальні математичні системи.

Як зазначає В.П. Вембер, не існує єдиного підходу як до класифікації електронних засобів навчального призначення, так і до термінології у цій сфері. Взявши за основу класифікації цілі та завдання, які можуть бути вирішені за допомогою ЕЗНП, можна виділити наступні типи: ілюструючі, консультуючі, операційне середовище, тренажери, навчальний контроль.

М.І. Жалдак, В.В. Латиський, М.І. Шут пропонують класифікацію залежно від переважного виду навчальної діяльності учня при роботі з певним засобом навчання (продуктивна діяльність, спрямована на формування нових знань; продуктивно-репродуктивна діяльність, спрямована на формування умінь, навичок, на актуалізацію та закріплення знань тощо). Виокремлюють 1) демонстраційно-моделюючі програмні засоби; 2) ППЗ тину діяльнісного предметно-орієнтованого середовища; 3) ППЗ, призначені для визначення рівня навчальних досягнень, які в свою чергу класифікують за способом організації роботи в мережі; ступенем «гнучкості», можливістю редагування предметного наповнення і критеріїв оцінювання; структурою і повнотою охоплення навчального курсу; способом введення команд і даних та можливою варіативністю формулювання відповіді; можливими способами формулювання та подання учневі навчальних задач; способом введення даних – командних впливів користувача; 4) ППЗ довідниково-інформаційного призначення.

В.П. Вембер, класифікуючи освітні електронні ресурси, ототожнює такі поняття, як електронні навчальні видання, електронні засоби навчального призначення, комп'ютерні навчальні системи, педагогічні програмні засоби, електронні навчально-методичні матеріали. Автором виділено такі складові як електронна навчальна книга, електронний навчальний посібник (енциклопедії, словники, альбоми карт і схем, інформаційні бази та банки знань, комп'ютерні лабораторні практикуми, бібліотеки електронних наочностей, хрестоматії, довідники, збірники вправ і задач, електронні атласи, контролююче-тестуючі комплекти, віртуальні лабораторії, комп'ютерні тренажери), електронний підручник (для дистанційного навчання і для підтримки традиційного навчання), автоматизовані навчальні системи, програмно-методичні комплекси, програмні засоби контролю за навчально-виховним процесом.

В.М. Мадзігон, В.В. Латиський та Ю.О. Дорошенко акцентують увагу на тому, що ПЗНП повинні задовольняти дидактичні принципи навчання: принципи свідомості й активності, наочності, систематичності й послідовності, міцності, науковості, доступності, зв'язку теорії з практикою. Принцип науковості визначає як спосіб і критерії добору змісту навчального матеріалу, так і способи його подання відповідно до сучасного рівня наукових знань. Процес засвоєння матеріалу повинен відбуватися у відповідності з методами пізнання, а саме - науковим експериментом, через здійснення аналізу, синтезу, порівняння, аналогій, індукції та дедукції, абстрагування і конкретизації, систематизації і узагальнення. Способи подання навчального матеріалу, форми і методи організації навчальної діяльності мають відповідати рівню підготовки учнів та їх віковим особливостям. Досягнення успіху кожним школярем може бути забезпечене завдяки доступності навчального засобу. Завдяки перевагам подання графічних та інших даних засобами ІКТ закладаються істотні передумови успіхів у навчанні - емоційне включення, гностичність, емоційне сприйняття даних. Принцип наочності за умови використання ППЗ полягає не стільки в можливості пасивного споглядання учнями моделей, як в активній перетворюючій діяльності, у процесі якої школярі самостійно будують моделі.

Встановлення суттєвих зв'язків між складовими динамічної моделі, певних ознак, впливає на формування у школярів прийомів мислительної діяльності.

У вищих педагогічних та середніх загальноосвітніх навчальних закладах пройшли апробацію такі електронні засоби навчального призначення з математики як GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D, DG, ТерМ, «Світ лінійних рівнянь», «Математика, 5-6 клас», Бібліотеки електронних наочностей «Алгебра, 7-9 клас», «Геометрія, 7-9 клас», ППЗ «Алгебра, 10-11 клас», «Геометрія, 10-11 клас» та інші. Набув поширення засіб «Евристико-дидактичні конструкції» (ДонНУ).

Згідно з правилами використання комп'ютерних програм у навчальних закладах, придбати у школу і використовувати можна ті комп'ютерні програми навчального призначення, що мають відповідний гриф та/або свідоцтво про визнання відповідності педагогічним вимогам МОН України.
Сучасне життя складно уявити без глобальної мережі Інтернет. Освітні шкільні Інтернет-портали «Острів Знань» (http://ostriv.in.ua), портали Львівщини (www.osvit-portal.lviv.ua), Херсонщини (www.ucheba.ks.ua/new) та інші призначені для користувачів-учнів, вчителів, батьків, всіх тих, хто зацікавлений у розвитку особистості учня.

Методи навчання

Результативність навчання з використанням ІКТ багато в чому визначається тим, якими методами оперує вчитель у вирішенні дидактичних завдань. Метод навчання - упорядкований спосіб взаємозалежної діяльності вчителя і учнів, спрямований на вирішення завдань освіти, виховання і розвитку у процесі навчання.

В табл. 1.1 наведено перелік основних традиційних і комп'ютерно-орієнтованих методів навчання, в яких за основу вибрано джерело здобуття знань.

Методи навчання (за джерелом здобуття знань)

Традиційні	Комп'ютерно-орієнтовані
Словесні (вербальні) методи навчання	
Розповідь, пояснення, бесіда, навчальна дискусія, лекція, робота з підручником, довідковою, науково-популярною та навчальною літературою	Робота з електронними підручниками, довідковим матеріалом комп'ютерних програм; опрацювання відомостей, що отримуються через глобальну мережу Інтернет
Наочні методи навчання	
Ілюстрування статистичної наочності, плакатів, карт; демонстрування приладів, дослідів, установок, фільмів; самостійне спостереження	Робота з навчаючими та навчально-контролюючими програмами Відеометод
Практичні методи навчання	
Виконання вправ, лабораторних робіт, практикумів; розв'язування доцільно дібраних задач; графічні роботи	Дослідницька робота у комп'ютерних лабораторіях; обчислювальні експерименти; телекомунікаційні проекти

Можливість швидко проводити обчислювальні експерименти з використанням ППЗ створює передумови навчання розвиваючими методами: проблемний виклад досліджуваного матеріалу, частково-пошуковий (евристичний) метод, дослідницький метод. Це забезпечує досягнення високого рівня навчання та проблемності пізнавальної активності на основі чого в учнів створюються пізнавальні навички та потреба у набутті інших. Сфера застосування обчислювального експерименту у шкільному курсі математики широка - від формулювання понять (графіка функції, границі, похідної функції в точці і т.д.) до перевірки відомих тверджень. У ході їх виконання учні зможуть «відкрити» певні закономірності чи перевірити відомі твердження. Метою дослідницької діяльності є пробудження активних дослідницьких інтересів. Особливу увагу слід звернути на створення проблемної ситуації, стимулювання здогадки, висування гіпотези. Активність та глибока зацікавленість творчим процесом сприятимуть розширенню знань учня, його інтересів та форм пізнання, заохочуватимуть до пошуку нових фактів, нових відомостей. Вчитель стимулює самостійність роздумів і суджень школярів, заздалегідь готуючи систему запитань. У ході діалогу за допомогою запитань, які допомагають активізувати мислення учня, відбувається відкриття істини. Відповідаючи на питання, учні самостійно формулюють означення, поняття, «відкривають» доведення теореми, знаходять способи розв'язування задачі, приходять до розв'язання певної проблеми.

Форми організації навчання

Форма навчання – це встановлений зразок організації навчальної діяльності, що передбачає характер зв'язків між викладачем і учнями, групування учнів для занять, характер їхньої діяльності, місце занять та їх проведення.

У табл. 1.2 наведено перелік основних традиційних і комп'ютерно-орієнтованих форм організації навчання. Детальніше розглянемо окремі з комп'ютерно-орієнтованих форм навчання.

Форми організації навчання

Традиційні	*Комп'ютерно-орієнтовані*
Урок, лекція, практичні заняття, семінари, лабораторні роботи, навчальні дискусії, екскурсії. самостійна позакласна робота, індивідуальна або групова науково-дослідна робота, поточні та підсумкові форми контролю.	Комп'ютерно-орієнтовані урок, лекція, семінари, практичні і лабораторні заняття, контрольні роботи тощо; науково-дослідна робота; екзамени, тестування; дистанційні форми: - трансляція; чат (текстовий, графічний); - відео- і телеконференції, - інтерактивні форми проведення лекцій, семінарів, практичних й

	лабораторних занять, навчальних дискусій та ін.

Впровадження ІКТН в освітній процес здійснюється здебільшого через комп'ютерно-орієнтований урок. При цьому постає проблема добору відповідних електронних засобів навчального призначення і належного навчального матеріалу для роботи на уроці. А з іншого боку - це проблема педагогічної майстерності вчителя, уміння конструювати і розробляти ним уроки на основі методологічних і методичних положень та вимог. У процесі навчання вчителю слід враховувати внутрішній процес засвоєння учнями знань, який включає такі ланки: сприймання - осмислення і розуміння - узагальнення - закріплення - застосування на практиці.

Комп'ютерно-орієнтований урок, як і будь-який інший, має задовольняти такі дидактичні вимоги: а) чітке визначення дидактичної, виховної, розвивальної мети уроку, включаючи мету застосування того чи іншого педагогічного програмного засобу, та завдань уроку; б) правильний добір навчального матеріалу, зокрема й такого, який найкраще буде поданий за допомогою обраного програмного засобу; в) вибір оптимальних методичних прийомів і засобів навчання; г) поєднання на уроці колективної, групової, індивідуальної роботи; д) реалізація на уроці принципів і умов успішного навчання.

З виховних вимог до уроку з використанням ІКЗН відзначимо те, що завдання вчителя полягає в забезпеченні комфорту кожному учневі на уроці. В обговоренні можуть взяти участь школярі, які самостійно не досліджували з використанням програмного засобу, а лише спостерігали. Наявність творчого спілкування є однією з умов розвитку творчої особистості школяра. Важливо забезпечувати розвиток позитивних мотивів учнів, пізнавальних інтересів, потреби самостійно опановувати знаннями.

Щодо організаційних вимог до комп'ютерно-орієнтованих занять, то слід відмітити наявність чіткого плану заняття відповідно до тематичного планування, організаційна чіткість проведення уроку, підготовка і різноманітне використання технічних засобів навчання. Організація самостійної творчої роботи учнів з використанням ІКТ потребує від учителя високої кваліфікації і математичної, і педагогічної, і у галузі ІКТ.

1.2. Розвиток особистості у процесі навчання математики засобами ІКТ

Щоб розвивати особистісні якості учня у процесі навчання, вчителю необхідно діагностувати рівень їх сформованості та здійснювати їх моніторинг. Можна виокремити такі групи якостей: а) організаційно-діяльнісні, що характеризують мотиваційно-творчу спрямованість, самоорганізацію; б) пізнавальні (уміння аналізувати, синтезувати, порівнювати, узагальнювати, класифікувати, систематизувати; здатність втілювати здобуті знання в духовні і матеріальні форми); в) творчі (здатність переносити знання і уміння в нові ситуації; здатність до формулювання гіпотез, закономірностей, уміння бачити відоме в невідомому і навпаки; здатність до дослідницької діяльності, творча уява, фантазія; дивергентність мислення).

Однією з умов ефективного формування особистісних якостей учнів у процесі комп'ютерно-орієнтованого навчання математики є використання у навчально-виховному процесі такої комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання математики, яка б сприяла активізації пошуково-дослідницької діяльності учнів, унаочненню складного для сприйняття абстрактного матеріалу, проведенню обчислювальних експериментів зі створеними учнями моделями, динамічними кресленнями з метою висування гіпотез; розв'язуванню творчих, нестандартних задач; посиленню прикладної спрямованості навчання.

Ю.В. Триус зазначає, що мислення людини, яка має навички роботи з персональним комп'ютером, вигідно відрізняється організованістю, внутрішньою дисципліною, логічною строгістю.

На думку М.М. Фіцули, комп'ютерно-орієнтоване навчання розвиває такі якості особистості, як уміння планувати і раціонально будувати виконавчі операції, точно визначати цілі діяльності, що сприятиме формуванню в учнів охайності, точності, обов'язковості.

Не заперечуючи того, що комп'ютер є потужним засобом зі значними дидактичними можливостями, деякі автори зауважують, що комп'ютеризоване навчання недостатньо розвиває логічне, образне мислення, істотно обмежує властивості усного мовлення. Під його впливом формується формальна логіка мислення на шкоду почуттям і творчим розумовим операціям. М.М. Фіцула привертає увагу до проблеми швидкої стомлюваності учнів, що працюють за комп'ютером, частих випадків погіршення зору і окремих випадків розладів нервової системи. В умовах автоматизованого навчання можуть формуватися егоїстичні нахили людини, загострюватися індивідуалізм, розширюватися конкурентність, сповільнюватися виховання колективізму, взаємодопомоги.

Д. Пойа, аналізуючи творчий математичний процес, акцентує увагу на тому, що навчання повинне плекати ростки винахідливості, готувати учня до відкриття, і звертається до вчителів із закликом «Вчити здогадуватися!». При цьому школяр має відрізняти строге доведення від нестрогої спроби, доведення від здогадки, розумну здогадку від менш розумної.

Для реалізації творчої ситуації у навчально-виховному процесі до-цільно дотримуватися наступної психолого-педагогічної структури творчої навчальної діяльності учнів: 1) бажання, зацікавленість, ентузіазм, потяг до формулювання проблеми, психологічна готовність до її вирішення; 2) наявність знань, умінь та навичок, необхідних для чіткого усвідомлення і формулювання творчого завдання; 3) зосередження зусиль та пошуки додаткових відомостей для розв'язування завдання (якщо завдання не вирішується, відбувається перехід до наступних етапів); 4) інкубація - підсвідомий аналіз і вибір, уявний відхід від вирішення проблем, переключення на інші види діяльності; 5) еврика (осяяння, інсайт) - це може бути лише перший крок до розв'язання завдання, за яким будуть необхідні інші; 6) перевірка (верифікація). При плануванні творчої навчальної діяльності учитель має враховувати рівень розвитку учнів і прогнозувати вихід із творчих ситуацій для різних груп, передбачати надання диференційованої допомоги в ході творчої діяльності.

Задачу вважатимемо творчою, якщо вона або деяка із її підзадач є нерутинною відкритою пізнавальною задачею. В.А. Крутецький виділяє задачі з неформальною вимогою, з зайвими даними, з кількома розв'язками, зі змінною умовою, задачі на доведення. У навчанні доцільно використовувати типологію навчально-творчих задач за В.І. Андрєєвим та С.О. Сисоєвою.

На основі аналізу джерел можна виокремити етапи розв'язування творчих задач: 1) бачення задачі, самостійність у її пошуку і постановці; 2) виділення відомих і невідомих даних, процесів; первинне моделювання їх якостей, аналіз умови; 3) пошук невідомого в задачі (висунення гіпотез), що може потребувати довизначення умов, розгортання деяких понять, що стосуються даних задачі; 4) виведення інших характеристик даних задачі, встановлення наявності у них властивостей, поданих у визначеннях, зближення даних і вимог задачі; 5) пошук невідомого за допомогою більш визначених за змістом прийомів для підвищення рівня впевненості в собі, знаходження і використання подібної задачі, розподілення задачі на частини; пошук невідомого за допомогою прийомів менш визначених за змістом, узагальнення, конкретизація задачі, формулювання і розв'язування оберненої задачі; 6) перевірка і аналіз гіпотез, виділення обґрунтувань гіпотез, аналіз переваг і недоліків, розгляд причин некоректності гіпотез; виявлення схожості у ідеях та умовах.

В.І. Андрєєв акцентує увагу на багатоплановості застосування навчально-творчих задач, а саме: а) для оволодіння новим знанням про поняття, закони, теорії, принципи, методи, правила, засоби діяльності; б) розумовими і практичними уміннями; в) для актуалізації знань, умінь; г) для контролю знань та умінь; д) з метою діагностики і розвитку творчих якостей особистості.

Формування творчих якостей особистості відбувається у процесі розв'язування навчально-творчих задач. Задачі мають не тільки і не стільки сприяти закріпленню знань, тренуванню в їх застосуванні, скільки формувати дослідницький стиль розумової діяльності, метод підходу до виучуваних явищ. Математичне моделювання, прикладна спрямованість навчального матеріалу активізує творчу діяльність учнів.

До найбільш істотних переваг комп'ютерно-орієнтованого навчання математики у порівнянні з традиційним відносимо надання учням можливості самостійно ставити і розв'язувати за допомогою комп'ютера різноманітні навчальні задачі. Навіть у тих випадках, коли вчитель виконує певний етап у розв'язуванні навчальної задачі, його функція полягає не лише в тому, щоб забезпечити правильне розв'язування задачі, а щоб допомогти учневі у засвоєнні способу її розв'язування, у досягненні певних навчальних цілей. До основних психологічних механізмів навчання засобами ІКТ відносимо проблему зворотного зв'язку, довизначення навчальної задачі, динамічного розподілу функцій управління між учителем, комп'ютерним забезпеченням і учнями.

Враховуючи типології навчально-творчих задач В.А. Андрєєва, В.А. Крутецького, С.А. Ракова, С.О. Сисоєвої, можна виокремити типи завдань, які доцільно використовувати для формування творчих якостей особистості у процесі комп'ютерно-орієнтованого навчання математики.

Задачі на виявлення протиріччя формують бачення протиріччя, здатність формулювати проблему, діалектичність мислення.

Задачі з відсутністю повних вихідних даних бажано використовувати для формування здатності знаходити потрібні відомості та переносити їх у нові ситуації. Такі задачі називаємо «відкритими». Розмаїття дослідницьких задач з відкритою умовою чи відкритою вимогою можемо розглянути завдяки використанню ППЗ GRAN як інструментів дослідження.

Завдання на прогнозування, відкриття теорем за допомогою ППЗ доцільно використовувати для формування здібності генерувати ідеї, висувати гіпотези. Для цього слід проводити обчислювальні експерименти і аналізувати чисельні величини створених динамічних виразів.

Застосовуючи ППЗ GRAN для розв'язування практичних задач, а серед них задач на оптимізацію, можна сприяти формуванню гнучкості, дивергентності мислення учнів. Тому слід пропонувати добірки задач на дослідження моделі-функції, створювати динамічні креслення, пропонувати різні способи розв'язування однієї і тієї ж задачі.

Завдання на рецензування для забезпечення розвитку критичності мислення, здатності до оціночних суджень, пропонуються найчастіше у процесі навчання у співпраці, за методом проектів з використанням ІКТ.

Задачі на розробку алгоритмічних і евристичних приписів як результатів дослідження за допомогою ППЗ, бажано використовувати для розвитку здібності до узагальнення і згортання мислительних операцій, здатності до рефлексії мислення. Важливо пропонувати учням завдання на здійснення умовиводів через узагальнення.

Особливе значення у процесі використання ППЗ GRAN-2D слід приділяти створенню динамічних опорних конспектів (динамічні креслення, оснащені системою підказок), які цілеспрямовують школяра в ході самостійного вивчення окремих питань. До задач на винахідливість можна віднести завдання на розробку макроконструкцій для більш складних креслень.

На факультативних заняттях, на спецкурсі математики доречно пропонувати учням розв'язувати різноманітні задачі-проблеми, задачі-загадки, задачі-фантазії. Інтерес до задачного практикуму підвищується, якщо до фонду задач включати завдання створені учнями або дібрані ними з посібників за якоюсь суттєвою ознакою. Важливими є задачі, розв'язок яких цікавий чи несподіваний, або який можна естетично і вигідно подати у відомому програмному продукті. Для розвитку інтелектуально-логічних здібностей бажано пропонувати логічні задачі, задачі з параметрами. Застосовуючи ППЗ GRAN1, можна до багатьох задач з параметрами побудувати відповідне ГМТ і здійснювати аналіз задачі.

Важливо для учнів уміти знайти в літературі і подати за допомогою презентацій, файлів, створених за допомогою ППЗ, історичні математичні задачі, відомості про математиків, розробників задач з інформатики. Творчу фантазію та уяву можна розвивати, пропонуючи завдання на створення різноманітних малюнків, в яких криві можна описати функціональними залежностями; орнаментів, геометричних паркетів, калейдоскопів.

Щоб розвивати в учнів просторову уяву, розглядають завдання на створення слайдів з перерізами многогранників площиною, динамічних креслень до стереометричних задач, многогранників за їх описами і розгортками, виконують перетворення об'єктів за допомогою ППЗ та інші.
Важливо у процесі навчання з використанням ІКТ дотримуватися дидактичних і психологічних принципів розвивального навчання.

1.3. Розвиток креативності за допомогою ейдографіки

Ейдографіка – особливий різновид комп'ютерного моделювання за допомогою графіків рівнянь. Це своєрідний симбіоз математики, комп'ютера і мистецтва. Як зазначає С.П. Параскевич [29, 67], самостійне створення образів у техніці ейдографіки є продуктивною діяльністю і сприяє розвитку креативності учнів чи студентів завдяки інтегрованому поєднанню математичних та художньо-естетичних знань при посередництві комп'ютерного забезпечення; реальній можливості самовиразитися, створити щось нове, особистісно значуще; збагаченню навчального процесу позитивними емоціями; активізації навчально-пізнавальної діяльності.

Це потужний засіб розвитку математичного мислення та естетичних смаків, який ще недостатньо досліджений і впроваджений у навчальний процес в основній, старшій та вищій школах.

Існують дві базові стратегії розумової діяльності, структури яких схематично можна презентувати так:

I: інформація → сприймання → запам'ятовування → усвідомлення → використання набутих знань.

II: інформація → сприймання → усвідомлення → запам'ятовування → використання набутих знань.

За першою стратегією після сприймання інформації в її опрацюванні домінуючою є пам'ять. За другою стратегією основну роль в опрацюванні інформації після її сприймання відіграє мислення. Позитивні сторони та недоліки кожної з наведених стратегій; рівні продуктивної пізнавальної діяльності, які вони забезпечують, описані в працях з педагогічної психології. Не викликає сумніву, що завдання вчителя полягають у полегшенні сприймання навчальної інформації, усвідомлення і запам'ятовування її змісту; забезпеченні адекватного використання. Окреслені завдання надскладні і погляди сучасної дидактики математики на їх успішне вирішення неоднозначні.

Ейдографіка дозволяє ефективно організувати увагу, оптимізувати пам'ять у процесі активного мислення, розвинути образну уяву (навіть на творчому рівні). Підкреслимо, що запам'ятовування відбувається в процесі продуктивної мисленнєвої діяльності, що нівелює різкі границі між I і II стратегіями розумової діяльності.

У процесі опанування азами ейдографіки постійно розв'язуються дві взаємно обернені задачі: створення графічного образу за його аналітичним заданням і аналітичне задання готового графічного образу. Перша задача простіша і завжди має єдиний розв'язок. Друга задача є достатньо складною і неоднозначною (якщо невідомий клас функцій, які використовувались для створення графічного образу). Однак, для простих випадків, у яких використовується тільки одна лінія аналітичне прочитання графічного зображення доступне всім учням.

Перекодування інформації за схемами «знаково-символьне → візуальне», «візуальне → знаково-символьне», ефективно сприяє її запам'ятовуванню в процесі активної діяльності мислення, гармонізує його логічну та образну складові.

Під час створення графічних етюдів у техніці ейдографіки так потужно і красиво працюють усі геометричні перетворення, що свідомо запам'ятовуються без особливих зусиль.

Ейдографіка надає можливості створювати не тільки візерунки, орнаменти, але й портрети, натюрморти, пейзажі, сюжетні картинки.

Програмно-методичний комплекс GRAN, на нашу думку, якнайкраще підходить для ейдографіки. Вибір на його користь ґрунтується на функціональній доступності, достатніх можливостях вибору товщини лінії (від 1 до 5); необмеженій кількості графіків, які можна побудувати в одній системі координат. Останній аргумент в даному випадку є дуже важливим. Зазначимо, що ейдографіка буде ефективною, якщо її використовувати:

- під час вивчення кожного нового різновиду функцій;
- у процесі організації позакласної роботи;
- для індивідуальної роботи з учнями, що виявили особливі здібності.

Але, першочергово, усе зазначене передбачає опанування азами ейдографіки вчителем математики. Отже, вона як дисципліна має прийти в педагогічні університети та заклади післядипломної освіти педагогічних кадрів.

Розділ 2. Теоретичні відомості про деякі визначні алгебраїчні криві

2.1. Листок Декарта

Особливості форми. Листком Декарта називається крива 3-го порядку, рівняння якої в прямокутній системі має вигляд:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0. \qquad (1)$$

Іноді зручно користуватися параметричними рівняннями декартового листа, які можна отримати, вважаючи $y=tx$, приєднуючи до цього рівняння рівняння (1) і розв'язуючи отриману систему відносно x і y, в результаті будемо мати:

$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}, \end{cases} \qquad (2)$$

звідки слідує, що листок Декарта є раціональною кривою.

Зауважимо ще, що полярне рівняння листка Декарта має вигляд

$$\rho = \frac{2a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}. \qquad (3)$$

Координати x і y входять у рівняння листка Декарта симетрично, звідки слідує, що крива симетрична відносно бісектриси $y=x$. Звичайне дослідження на особливі точки приводить до висновку, що початок координат є вузловою точкою листка Декарта. Рівняння дотичних до алгебраїчної кривої в її особливій точці, яка співпадає з початком координат, можна отримати, як відомо, прирівнюючи до нуля групу членів нижчих степенів із рівняння цієї кривої. В нашому випадку маємо $3axy = 0$, звідки отримаємо $x = 0$ і $y = 0$ – шукані рівняння дотичних у вузловій точці. Ці дотичні співпадають з осями координат і, отже, в початку координат крива перетинає сама себе під прямим кутом. Легко побачити, що в першій координатній чверті крива робить петлю, яка перетинає пряму $y = x$ в точці $N\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$. Точки цієї петлі, в яких дотичні паралельні координатним осям, мають координати $M_1\left(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4}\right)$ і $M_2\left(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2}\right)$ (рис. 2.1).

Для остаточного висновку про форму кривої слід ще знайти асимптоту $y = kx + b$. Замінюючи в рівнянні кривої y на $kx + b$, прирівнюємо до нуля отримані коефіцієнти двох членів вищими степенями x. Отримаємо $1+k^3=0$ і $3k^2b - 3ak=0$, звідки $k = -1$і $b = -a$. Таким чином, листок Декарта має асимптоту $y = - x - a$; отже, в 2-ій і 4-ій координатних чвертях вітки листка Декарта прямують до нескінченності.

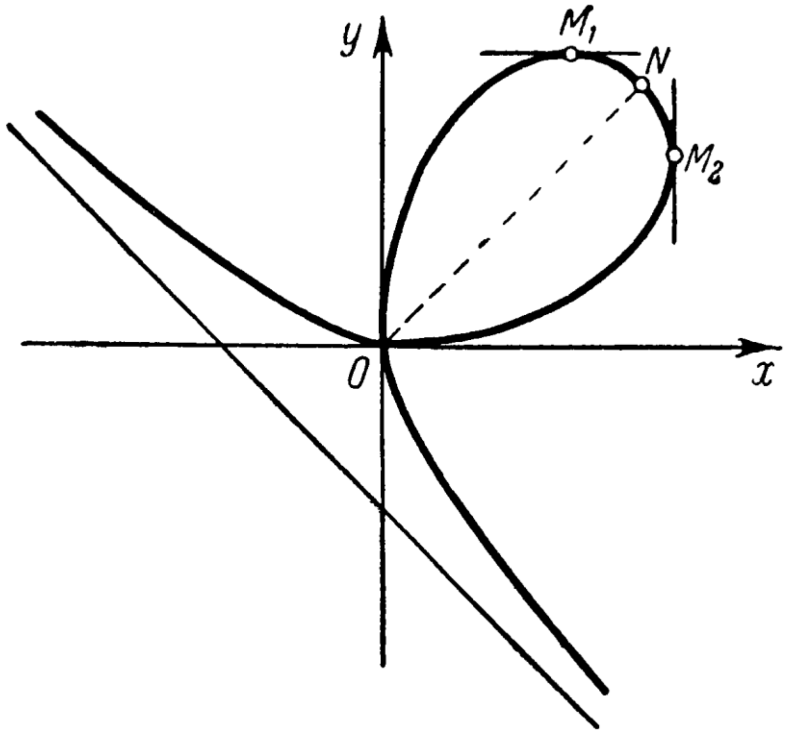


Рис. 2.1

Властивості. За теоремою Маклорена, якщо в трьох точках алгебраїчної кривої 3-го порядку, які лежать на одній прямій, провести дотичні до цієї кривої, то точки їх перетину з кривою будуть лежати також на прямій лінії. Стосовно листка Декарта ця теорема доводиться легко. Виведемо для цього умову розташування трьох точок листка Декарта, що відповідають значенням t_1, t_2 і t_3 параметра, на одній прямій. Якщо рівняння прямої має вигляд $y=kx+b$, то значення параметра, що відповідає точкам перетину цієї прямої з кривою, повинні задовольняти систему

$$y = kx + b, \;\; x = \frac{3at}{1+t^3}, \;\; y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Ця система приводить до рівняння $t^3 - \frac{3ak}{b}\ t^2 + \frac{3ak}{b} t + 1 = 0$, корені якого і будуть шуканими значеннями t_1, t_2 і t_3 параметра, звідки випливає, що

$$t_1 t_2 t_3 = -1. \qquad (4)$$

Ця рівність і є умовою розташування трьох точок $M_1(t_1)$,$M_2(t_2)$,$M_3(t_3)$ листка Декарта на одній прямій.

Використовуючи цю умову, покажемо справедливість теореми Маклорена для листка Декарта. Дійсно, дотичну в точці $M_1(t_1)$ можна розглядати як пряму, яка перетинає листок Декарта в двох співпадаючих між собою точках, для яких $t_2 = t_1$в третій точці, для якої відповідне значення параметра позначається через T_1. Умова (4) набуде вигляду $t_1{}^2 T_1 = -1$. Для дотичних в точках M_2 і M_3 отримаємо аналогічні відношення $t_2{}^2 T_2 = -1$ і $t_3{}^2 T_3 = -1$. Премножуючи ці рівності, отримаємо $(t_1 t_2 t_3)^2 T_1 T_2 T_3 = -1$. Звідки на основі (4) робимо висновок, що і $T_1 T_2 T_3 = -1$, тобто точки $N_1(T_1)$, $N_2(T_2)$і $N_3(T_3)$ лежать на одній прямій.

Знаходячи площу, обмежену петлею листка Декарта, маємо:

$$U = \frac{9a^2}{2} \int_0^\infty \frac{t^2\, dt}{(1+t^3)^2} = \frac{3a^2}{2}.$$

Історична довідка. Вперше в історії математики крива, названа згодом листком Декарта, згадується в листі Декарта до Ферма в 1638 р. як крива, для якої сума об`ємів кубів, побудованих на абсцисі і ординаті кожної точки, рівна об`єму паралелепіпеда, побудованого на абсцисі, ординаті і деякій константі. Форма кривої встановлена вперше Робервалем, який знаходить вузлову точку кривої, однак в його представленні крива складається лише з петлі. Повторяючи цу петлю в чотирьох квадрантах, він отримує фігуру, яка нагадує йому квітку з чотирма пелюстками. Поетична назва кривої «пелюстка жасмину», однак, не привилась. Повна форма кривої з наявністю асимптоти була визначена пізніше (1692) Гюйгенсом і І. Бернуллі. Назва «листок Декарнта міцно встановилася тільки на початку XVIII ст.

2.2. Цисоїда Діоеклеса

Особливості форми. Серед багатьох способів утворення цисоїди – кривої, відкритої стародавніми в пошуках розв`язку знаменитої задачі про подвоєння куба, ми зупинимося спочатку на простішому. Візьмемо похідне коло з діаметром *OA=2a* і дотичну *AB* до нього. Через точку *O* проведемо промінь *OB* і на ньому відкладемо відрізок *OM=BC*. Побудована таким чином точка *M* належить цисоїді. Повернувши промінь *0B* на деякий кут і виконавши вказану побудову, ми знайдемо другу точку цисоїди, і т. д. (Рис. 2.2).

Якщо точку *O* прийняти за полюс, то $\rho = OM = OB - OC$; але $OB = \frac{2a}{\cos\varphi}$ і $OC = 2\mathrm{a}\cos\varphi$, звідки отримуємо полярне ріняння цисоїди

$$\rho = \frac{2a\ \sin^2\varphi}{\cos\varphi,}. \qquad (1)$$

Користуючись формулами переходу від полярних координат до декартових, знайдемо рівняння цисоїди в прямокутній системі:

$$y^2 = \frac{x^3}{2a-x}. \qquad (2)$$

Параметричне рівняння цисоїди можна отримати, вважаючи x=ty, тоді, на основі рівняння (2), прийдемо до системи

$$x = \frac{a}{t^2+1}, \quad y = \frac{a}{t(t^2+1)}. \qquad (3)$$

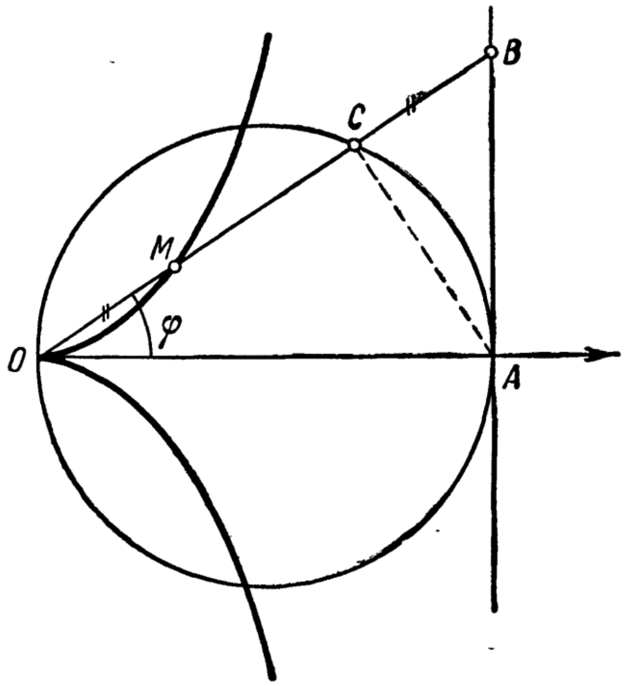


Рис. 2.2

Рівняння (2) показує, що цисоїда є алгебраїчною кривою 3-го порядку, а з рівнянь (3) випливає, що вона є раціональною кривою.

Цисоїда симетрична відносно осі абсцис, має нескінченні вітки; дотична до кола, тобто пряма $x = 2a$, служить для неї асимптотою; початок координат є точкою повернення 1-го роду.

Властивості. Кінематично цисоїда може бути отримана як тракторія середини M катета BC, яка рухається в площині креслення так, що його вершина B ковзає по осі ординат, а інший катет AC завжди проходить через нерухому точку E на осі абсцис. (Рис. 2.3)

Дійсно, позначивши середину відрізка OE через D, бачимо, що оскільки $BC=EO$, $\Delta BCE=\Delta BEO$, звідки $\Delta BEO=\Delta CBE$, і, отже, Δ NBE— рівнобедрений, а так як $ED = \frac{EO}{2} = \frac{BC}{2} = BM$, то відрізок DM паралельний відрізку BE. Нехай, надалі, точка K є точкою перетину з продовженням відрізка DM прямої, яка проходить через точку B паралельно осі абсцис. Опишемо коло з центром в початку координат і радіусом OD, і проведемо до нього дотичну до другої точки перетину з прямою EO. Вона пройде через точку K. Позначивши точку перетину прямої DMK з колом через F, помітимо, що трикутники DOF і

MBK рівні між собою. З їх рівності випливає, що *DF*=*MK*, а значить, і *DM*=*FK*. Остання рівність і показує, що геометричне місце точок М буде цисоїдою.

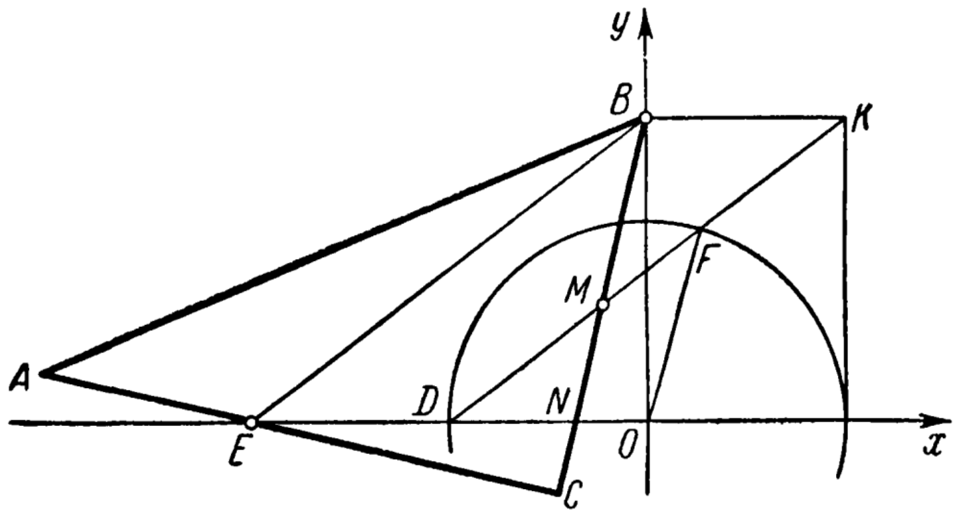


Рис. 2.3

Інші способи утворення цисоїди основані на її відношеннях з параболою. Покажемо в першу чергу, що цисоїда є підерою параболи відносно її вершини.

Нехай $y^2 = 2px$ – рівняння даної параболи. Рівняння дотичної в довільній точці М (ξ, η) цієї параболи можна записати у вигляді $\rho x = \eta y + \eta^2 = 0,$ рівняння перпендикуляра, опущеного з початку координат на цю дотичну, буде $y = -\frac{\eta}{p}x$;координати точки N перетину його з дотичною визначається за формулами

$$\begin{cases} x = -\frac{p\eta^2}{2(p^2+\eta^2)}, \\ y = \frac{\eta^3}{2(p^2+\eta^2)}, \end{cases} \qquad (4)$$

Виключаючи з цих рівностей параметр η, ми отримаємо рівняння $y^2 = -\frac{x^3}{2p+x}$, яке виражає цисоїду.

Зауважимо далі, що координати точки, симетричної початку координат відносно дотичної до параболи $y^2 = 2px$, можна отримати, якщо праві частини формул (4) подвоїти, і, отже, будуть визначатися формулами

$x = -\frac{p\eta^2}{2(p^2+\eta^2)}$ і $y = \frac{\eta^3}{2(p^2+\eta^2)}$. Виключаючи з цих рівностей параметр η, ми знову отримаємо цисоїду з рівнянням $y^2 = -\frac{x^3}{p+x}$. Звідси випливає, що цисоїда є геометричним місцем точок, симетричних вершині параболи відносно її дотичних.

Слід помітити, що геометричне місце точок, симетричних початку координат відносно дотичної до параболи, можна розглядати як траекторію вершини іншої параболи, однакової з даною, яка котиться по даній параболі. Таким чином, виникає новий спосіб утворення цисоїди як траекторії вершини параболи, яка без ковзання котиться по іншій такій же параболі. Зупинимося на метричних властивостях цисоїди; при цьому нам буде зручно використовувати параметричні рівняння цисоїди у вигляді $x = 2a\sin^2\varphi,\ y = 2a\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$.

Площа, обмежена цисоїдою і її асимптотою, дорівнює потроєній площі похідного кола; дійсно,

$$U = 2\int_0^{2a} y\,dx = 16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\,d\varphi = 3\pi a^2.$$

Це відношення отримано було Гюйгенсом і незалежно від нього Ферма.

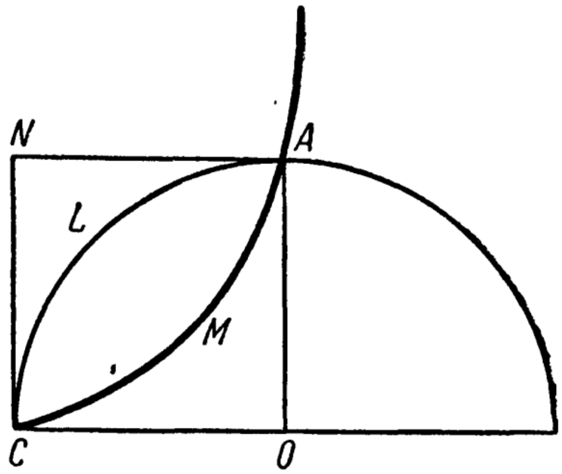


Рис. 2.4

Визначаючи площу криволінійного трикутника OAMC (рис. 2.4), знайдемо, інтегруючи в границях від φ=0 до φ=$\frac{\pi}{4}$, що вона дорівнює [ріс]. Якщо тепер провести дотичні в точках *A* і *C* до похідного кола, то площа криволінійного трикутника *CMANC* буде рівна $a^2 - \left(\frac{3\pi a^2}{4} - 2a^2\right) = 3(a^2 - \frac{\pi a^2}{4})$. Вираз, який стоїть в правій частині, визначає потроєну площу криволінійного трикутника *CLANC*. Отже,

пл. *CMANC* =3 пл. *CLANC*.

Це відношення було відкрите також Гюйгенсом.

Об`єм тіла, утвореного обертанням частини площини, обмеженої цисоїдою і її асимптотою, навколо осі ординат визначається за формулою

$$V = 2\pi \int_0^{\infty} (4a^2 - x^2)dy = 16\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3a\ \sin^2\varphi + \sin^4\varphi - 2\sin^6\varphi)d\varphi =$$
$$= 5 \cdot 2\pi^2 a^3$$

Якщо врахувати, що об`єм тора, отриманого від обертання похідного кола навколо осі ординат, дорівнює $2\pi^2 a^3$, то із отриманого результату слідує, що об`єм тіла, отриманого обертанням частини площини, обмеженої цисоїдою і її асимптотою, навколо осі ординат, в п`ять разів більше об`єма тора, отриманого від обертання похідного кола навколо тієї ж осі. Це відношення було відкрите також Гюйгенсом.

Центр тяги частини площини, обмеженої цисоїдою і її асимптотою, ділить відрізок між вершиною і асимптотою на дві частини, відношення яких рівне 5.

Це відношення дозволяє в свою чергу визначити об`єм тіла, отриманого обертанням цисоїди навколо її асимптоти. Таким чином, об`єм тіла, отриманого обертанням цисоїди навколо її асимптоти, рівний об`єму тора, отриманого від обертання похідного кола. Це відношення встановлено вперше Слюзом.

Довжина дуги цисоїди від її вершини до точки з абсцисою x визначається за формулою $S = a\int_0^x \frac{1}{2a-x}\sqrt{\frac{8a-3x}{2a-x}}dx$ $= a(z-2) + \frac{a\sqrt{3}}{2}\ln\frac{(z-\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{(z+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}}$, де $z = \sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}}$.

2.3. Строфоїда

Особливості форми. Крива, що називається строфоїдою, представляє собою геометричне місце точок, побудованих наступним чином: дана фіксована точка A і фіксована пряма g, причому $AC=a$ – перпендикуляр, опущений із точки A на цю пряму; навколо точки A обертається промінь, на якому відкладаються відрізки BM і BM_1 від точки його перетину з даною прямою, причому так, що $BM=BM_1=CB$; геометричне місце точок M і M_1 і буде строфоїдой (Рис. 2.5). Точки M і M_1 будемо називати спряженими.

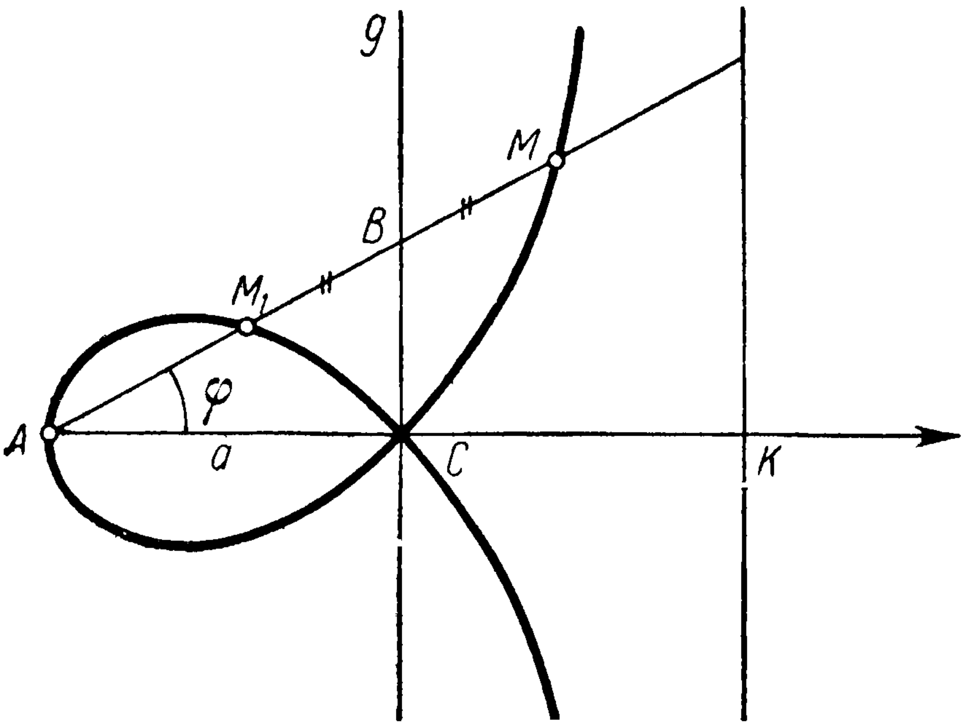


Рис. 2.5

Приймаючи точку A за полюс, а пряму AC за полярну вісь, отримаємо

$\rho = AB \pm BC$; але $AB = a\,tg\,\varphi$,

отже, полярне рівняння строфоїди матиме вигляд

$$\rho = a\frac{1 \pm \sin\varphi}{\cos\varphi}. \qquad (1)$$

Переходячи до прямокутних координат, отримаємо:

$$y \pm (x-a)\sqrt{\frac{x}{2a-x}}. \qquad (2)$$

Параметричні рівняння строфоїди можуть бути записані у вигляді

$$x = \frac{2at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{at(t^2-1)}{1+t^2}. \qquad (3)$$

Крива симетрична відносно осі абсцис, як це видно із рівняння (2); із цього рівняння випливає також, що пряма $x=2a$ є асимптотою строфоїди. Точка $C\,(a,0)$ є вузловою точкою строфоїди. Дійсно, із рівняння (2) маємо:

$$y' = \pm\left[(x-a)\frac{2a}{2(2a-x)^2\sqrt{\frac{x}{2a-x}}} + \sqrt{\frac{x}{2a-x}}\right],$$

тобто в точці $(a,0)$ $y' = \pm 1$, звідки випливає, що в цій точці строфоїда має вузол з дотичними $y=x$ і $y=-x$, і отже, вітки строфоїди перетинаються у вузловій точці під прямим кутом.

Властивості строфоїди.

1. Строфоїда є підерою параболи відносно точки перетину осі параболи з її дісектрисою. Дійсно рівняння дотичної до параболи $y^2 = 2px$ в точці M (x_1, y_1) можна записати у вигляді $y_1 y = 2p(x+x_1)$, а рівняння перпендикуляра, опущеного із точки $(-\frac{p}{2}, 0)$ на цю дотичну, запишеться у вигляді $py + y_1 x = -\frac{py_1}{2}$. Розв`язуючи ці рівняння спільно, знайдемо:

$$x = -\frac{py_1^2}{p^2+y_1^2}, \quad y = \frac{y_1^3 - p^2 y_1}{2(p^2+y_1^2)},$$

або

$$x = -\frac{pt^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{pt^3 - pt}{2(1+t^2)}, \quad \text{де } t = \frac{y_1}{p}$$

Отримана система виражає, як видно, строфоїду в параметричній формі.

2. Геометричне місце точок перетину двох дотичних, проведених в спряжених точках M і M_1 строфоїди, є цисоїдою Діоклеса. При доведенні цієї

властивості зручно користуватися параметричними рівняннями строфоїди, відмінними від (3), а саме:

$$x = 1 \pm \sin\varphi\,, \quad y = \frac{\sin\varphi(1 \pm \sin\varphi)}{\cos\varphi}.$$

3. Інверсія строфоїди дає ту ж саму строфоїду, якщо полюс інверсії співпадає з точкою A, а степінь інверсії дорівнює a^2. Дійсно, із рівняння строфоїди випливає, що

$$AM_1 = \frac{a(1-\sin\varphi)}{\cos\varphi} \text{ і } AM = \frac{a(1+\sin\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Перемножаючи ці рівності, отримаємо

$$AM_1 \cdot AM = a^2.$$

4. Визначаючи полярну піддотичну і піднормаль в довільній точці строфоїди, отримаємо:

$$S_t = \frac{\rho^2}{\rho'} = \pm a(1 \pm \sin\varphi), \quad S_n = \rho' = \pm a\frac{1 \pm \sin\varphi}{\cos^2\varphi}, \qquad (4)$$

звідки слідує, що геометричні місця точок, які є кінцями S_t і S_n будуть мати рівняння $\rho = \pm a(1 \pm \sin\varphi)$, що дає кардіоїду, і $\rho = \pm a\frac{1 \pm \sin\varphi}{\cos^2\varphi}$, що дає параболу. Якщо через точки S_t і S_t^* позначити піддотичні в спряжених точках M і M_1строфоїди, то на основі (4) отримаємо відношення

$$S_t + S_t^* = 2a.$$

5. Щоб довести наступну оригінальну властивість строфоїди, знайдемо попередньо умову, при якій три точки строфоїди, які відповідають значенням параметра t_1, t_2 і t_3 лежать на одній прямій. Визначення точок перетину прямої і строфоїди зводиться до розв`язку системи

$$y = kx + b, \quad x = \frac{2at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{at(t^2-1)}{1+t^2},$$

яка приводить до рівняння $t^3 - 2kt^2 - \frac{b}{a}t^2 - t - \frac{b}{a} = 0$ звідки отримуємо шукану умову

$$t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = -1. \qquad (5)$$

Знайдемо тепер відношення між значеннями параметра t_1, t_2, t_3 і t_4 чотирьох точок строфоїди, які лежать на одному колі. Знаходження точок перетину строфоїди і кола зведеться до розв`язку системи

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0;$$

$$x = \frac{2at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{at(t^2-1)}{1+t^2},$$

яка призводить до рівняння

$$t^4 + \frac{B}{A}t^3 + \frac{a^2+2aA+C}{a^2}t^2 - \frac{B}{A}t + \frac{C}{A} = 0,$$

звідки на основі відношення між коефіцієнтами і коренями рівняння отримаємо: $t_1+t_2+t_3+t_4 = -\frac{B}{A}$ і $t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4 + t_2t_3t_4 + t_1t_3t_4 = \frac{B}{A}$,

звідки

$$t_1+t_2+t_3+t_4 + t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4 + t_2t_3t_4 + t_1t_3t_4 = 0.$$

Виходячи з останньої рівності, помітимо, що умова, при якій три точки строфоїди, які відповідають значенням параметра t_1, t_2 і t_3, лежать на колі, яке проходить через початок координат, буде виражатися рівністю

$$t_1+t_2+t_3+t_4 + t_1t_2t_3 = 0. \qquad (6)$$

Тепер без труднощів можна довести наступну властивість строфоїди: якщо із будь-якої точки М, яка лежить на строфоїді, провести до неї дві дотичні, які дотикаються до кривої в точках *P* і *Q*, то точки *M*, *P* і *Q* будуть лежати на колі, яке проходить через початок координат (Рис. 2.6).

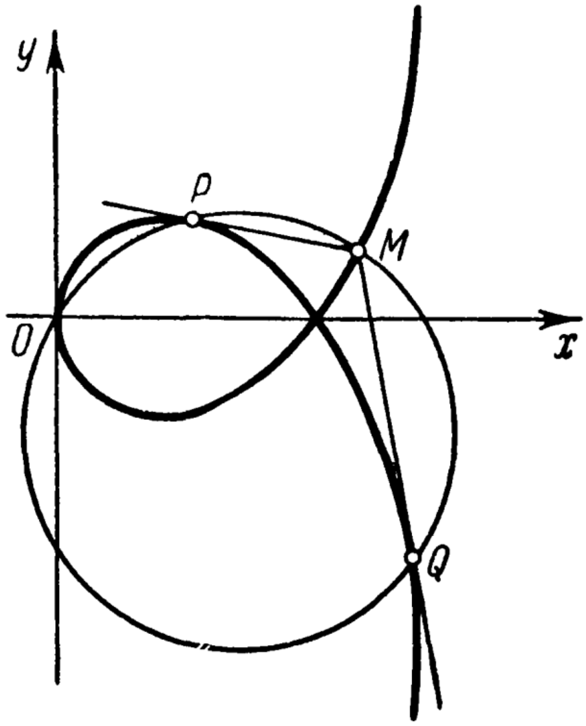


Рис. 2.6

Доведення цієї властивості зводиться до того, щоб показати, що значення параметра t_1, t_2 і t_3, які відповідають точкам *M*, *P* і *Q*, задовольняють рівність (6). Так як в точці дотику співпадають дві точки перетину прямої з колом, то для них $t_3 = t_2$. Згідно цьому умова розташування цих двох точок, що збігаються, і точки M на одній прямій виразиться, (5), рівністю $t_1 t_2 + t_1 t_2 + t_2 t_2 = -1$, звідки $t_2 = -t_1 \pm \sqrt{t_1^2 - 1}$. Одне із цих значень відповідає точці *P*, інше – точці *Q*. Підставляючи ці значення в рівність (6), переконаємося, що вона задовільняється.

6. Площа, обмежена петлею строфоїди, знаходиться за рівністю

$$U = 2\int_0^a (x-a)\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx = 2a^2 - \frac{\pi a^2}{2}.$$

Обчислюючи цей же інтеграл, але в межах від *a* до 2*a*, отримаємо $2a^2 + \frac{\pi a^2}{2}$ – площа між строфоїдою і її асимптотою. Сума знайдених площ рівна площі квадрата зі стороною 2*a*.

4.Історична довідка. Вперше строфоїду досліджував Торічеллі (1645), внаслідок чого криву довгий час називали “крилом Торічеллі”. Назва “строфоїда” походить від грецького слова, що означає поворот. В математичну літературу ця назва була введена лише в середині XIX ст. Крім багаточисленних геометричних додатків, строфоїда зустрічається також в деяких питаннях оптики і нарисної геометрії.

2.4. Верзієра

Дослідження цієї кривої пов`язують з іменем Марії Аньєзі (1718-1799).

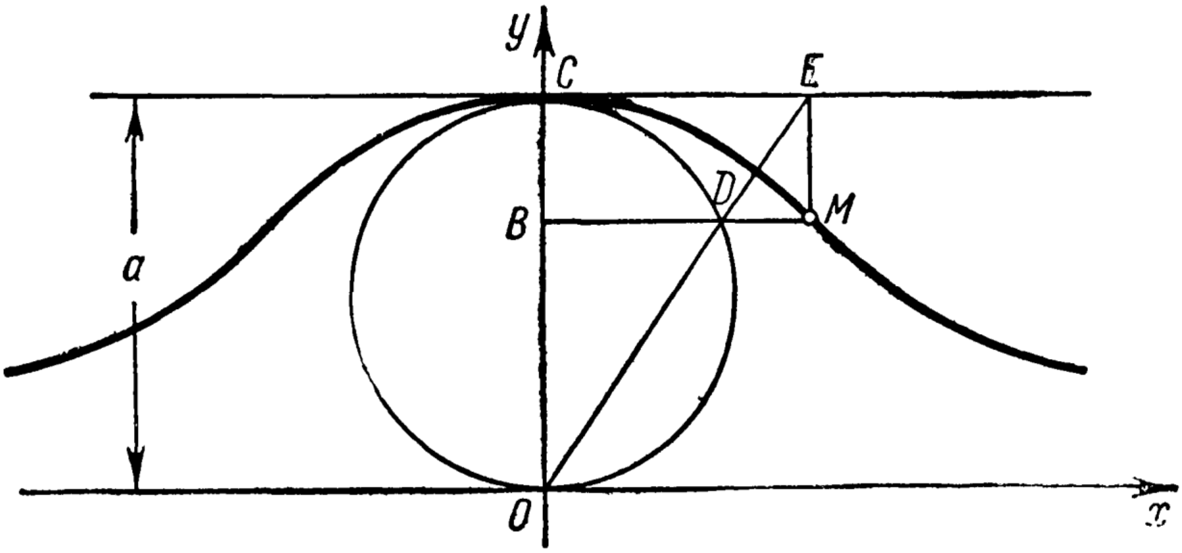


Рис. 2.7

Нехай маємо коло з діаметром *OC=a* (рис.16) і відрізок *BDM*, побудований так, що *OB:BD=OC:BM*, геометричне місце точок *M* є кривою, яка називається верзієра.

Із рис. 2.7 видно, що задана пропорція може бути переписана у вигляді $\frac{y}{BD}=\frac{a}{x}$; але $BD=\sqrt{y(a-y)}$, отже, рівняння верзієри запишеться у вигляді $\frac{y}{\sqrt{y(a-y)}}=\frac{a}{x}$; або

$$y=\frac{a^3}{x^2+a^2}\,. \qquad (1)$$

Із отриманого рівняння випливає, що верзієра є кривою 3-го порядку, симетричною відносно осі ординат; вісь абсцис служить для неї асимптотою; в точці *C* верзієра і коло мають спільну дотичну, паралельну осі абсцис.

Параметричні рівняння верзієри можуть бути записані у вигляді

$$x = t,\ \ y = \frac{a^3}{t^2 + a^2}\,.$$

Користуючись цими рівняннями і відомим із аналітичної геометрії відношенням між координатами трьох точок, які лежать на одній прямій, приходимо до висновку, що значення t_1, t_2 і t_3 параметра t, визначаючого три точки верзієри, які лежать на одній прямій, зв`язані відношенням $t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3=a^2$. Вважаючи $t_1=t_2=t_3$ отримаємо значення параметра, яке відповідає точкам перегину верзієри і визначимо координати цих точок $x = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{3a}{4}$.

Площа між вірзієрою і її асимптотою рівна вчетверо збільшеної площі похідного кола.

Об`єм тіла обертання верзієри навколо її асимптоти в два рази більший об`єму тора, отриманого від обертання похідного кола.

Узагальненням верзієри є геометричне місце точок, яке визначається такою же побудовою, як і для верзієри, але вісь абсцис уже не є дотичною до похідного кола, а зміщена паралельно сама собі на деяку відстань. Отримана в цьому випадку крива відома під назвою агвінеї Ньютона.

Найближчою родичка верзієри є псевдоверзієра, яку можна отримати, подвоївши всі ординати верзієри. Рівняння її може бути отримано безпосередньо із (1) і запишеться у вигляді $y = \frac{2a^3}{x^2 + a^2}$.

2.5. Равлик Паскаля

Равлик Паскаля можна означити як конхоиду, базисом якої є коло.

Нехай є коло з радіусом r , яка проходить через полюс O і має центр на полярній осі (рис. 2.8).

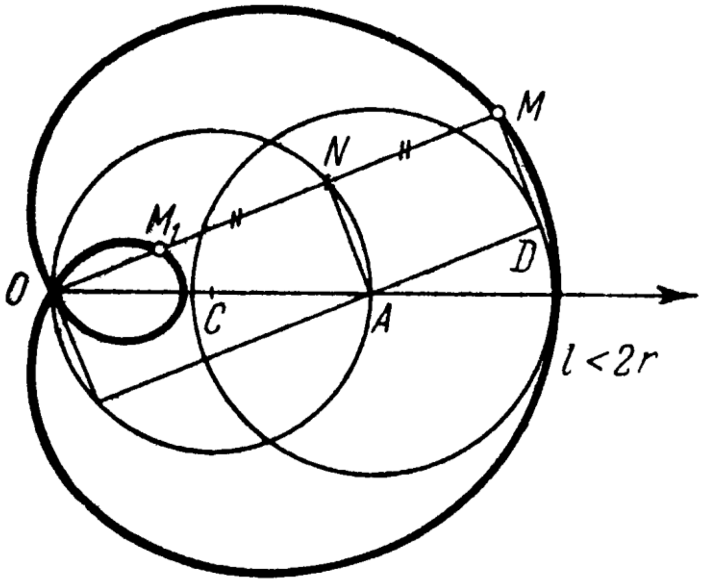


Рис. 2.8

Уявімо собі, що навколо полюса O обертається промінь OM, і в кожному його положенні від точки N перетину його з колом відкладається відрізок NM = l. При повороті променя від 0° до 180° ми отримаємо геометричне місце точок M. При подальшому повороті променя, відкладаючи відрізок, як і в першому випадку, за напрямом променя, ми фактично будемо відкладати його в бік, протилежний попередньому, і отримаємо геометричне місце точок M_1. Геометричне місце точок M і M_1 і буде равликом Паскаля.

Полярне рівняння равлики має вигляд

$$\rho = 2r\,cos\varphi + l. \qquad (1)$$

Переходячи до прямокутних координат, отримаємо:

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 - l^2(x^2 + y^2). \qquad (2)$$

Отже, равлик Паскаля є алгебраїчною лінією 4 -го порядку, форма якої залежить від двох параметрів r і l. Обчислюючи похідні лівої частини формули (2) в точці (0, 0), ми отримаємо нулі, звідки випливає, що початок координат є для равлика особливою точкою. Прирівнюючи до нуля групу членів з нижчим степенем з рівняння кривої, одержимо рівняння дотичних в особливій точці у вигляді $4r^2x^2 - l^2x^2 - l^2x^2 = 0$, або $y = \pm \frac{\sqrt{4r^2 - l^2}}{l} x$. Отже, якщо $l < 2r$, то дотичні будуть дійсними, і особлива точка- вузловою (рис. 50); якщо $l > 2r$, то дотичні виявляться уявними, а особлива точка - ізольованою (рис. 2.9); якщо $l = 2r$, то обидві дотичні співпадуть з віссю абсцис, і особлива точка буде точкою повернення (рис. 2.10).

Слід зауважити, що в останньому випадку рівняння равлика запишеться у вигляді $\rho = 2r\,(1 + cos\varphi)$, і являє собою кардіоїду, яка належить, таким чином, до сімейства равликів.

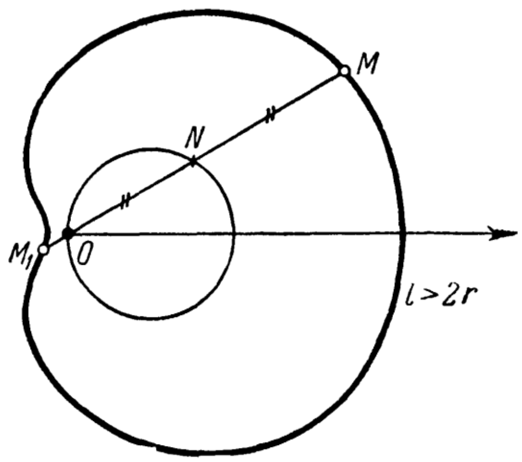


Рис. 2.9

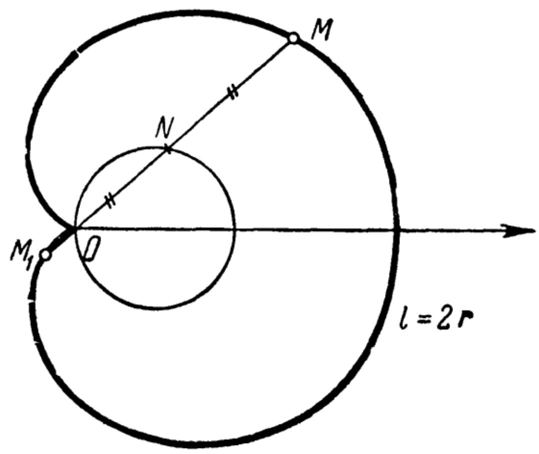


Рис. 2.10

Равлик Паскаля являє собою подеру кола відносно довільно вибраної точки площини. Справді, проведемо з точки *A* як з центра коло радіусом *l* (рис. 2.8) і побудуємо чотирикутник *ANMD*, який буде прямокутником, і, отже, точка *M* равлика є основою перпендикуляра, опущеного з полюса *O* на дотичну в точці *D* до кола. Зрозуміло, що геометричне місце таких точок, тобто равлик Паскаля, і буде подерою кола відносно полюса *O*.

Равлик Паскаля утворюється в результаті інверсії кривої 2 -го порядку щодо фокусу. Справді, піддавши вказаному перетворенню $\rho\rho_1 = k^2$ криву

$\rho = \frac{k^2}{2r\,cos\varphi + l.}$, отримаємо равлика $\rho_1 = 2r\,cos\varphi + l.$.

Якщо $l > 2r$, то інвертувалась крива - еліпс, йому відповідає равлик з ізольованою точкою ; при $l = 2r$ інвертувалась парабола, їй відповідає равлик -

кардіоїда ; якщо $l < 2r$, то інвертувалась гіпербола, відповідний їй равлик має вузлову точку.

Равлик Паскаля може бути віднесений також до числа трисектрис, тобто кривих , що дозволяють здійснити трисекции кута .

Площа, яку обмежується равликом для випадку $l > 2r$, знаходиться за формулою $U = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2r\, cos\varphi + l)^2\, d\varphi = \pi(2r^2 + l^2)$

Довжина дуги виражається еліптичним інтегралом 2 -го роду.

Застосування в техніці. Равлик Паскаля використовується як лінія для викреслювання профілю ексцентрика, якщо потрібно, щоб ковзний за профілем стрижень здійснював гармонійні коливання.

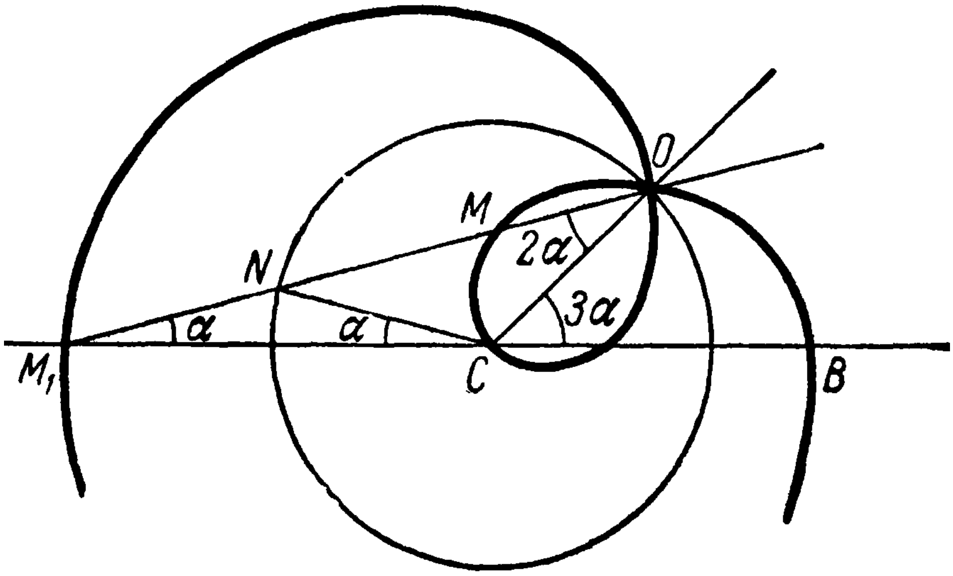


Рис. 2.11

Дійсно , поступальне переміщення S точки M (рис. 2.11) визначиться за формулою $S=\rho = 2r\cos\omega t + l = 2r\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + l$, де ω – кутова швидкість ексцентрика. Швидкість v=S'=–$2r\omega\sin\omega t$ зворотно поступального руху стрижня буде змінюватися без стрибків. Цією властивістю ексцентрики, окреслені по равлику Паскаля, вигідно відрізняються від ексцентриків, окреслених по спіралі Архімеда.

Одна із складових частин в механізмі для підняття і опускання семафора окреслена по равлику Паскаля. Властивість ексцентрика, окресленого по равлику, виявляється досить корисною, оскільки швидкість підняття або опускання плеча семафора, будучи мінімальною на початку підняття або опускання, досягає максимального значення в середині ходу семафора. Цим забезпечується плавний переклад плеча семафора з незначним початковим і кінцевим поштовхами, а також полегшується подолання сил інерції і тертя, особливо помітно в початковий момент роботи приводу.

2.6 . Кардіоїда

Кардіоїду можна визначити як траєкторію точки, яка лежить на колі радіуса *r*, що котиться по нерухомому колі з таким же радіусом.

Параметричні рівняння кардіоїди матимуть вигляд

$$\begin{cases} x = 2r\cos t - r\cos 2t, \\ y = 2r\sin t - r\sin 2t. \end{cases} \qquad (1)$$

Щоб отримати полярне рівняння кардіоїди, зручно прийняти за полюс точку *A* (рис. 2.12), а полярну вісь направити по осі абсцис. Так як чотирикутник AOO_1M буде рівнобедреною трапецією, то полярний кут φ точки *M* виявиться рівним куту повороту похідного кола, тобто параметру t. Враховуючи цю обставину, замінимо в другому рівнянні системи (1) y на $\rho\, sin\, t$. Скорочуючи отриману таким чином рівність на *sin t*, отримаємо полярне рівняння кардіоїди

$$\rho = 2r(1 - cos\varphi). \qquad (2)$$

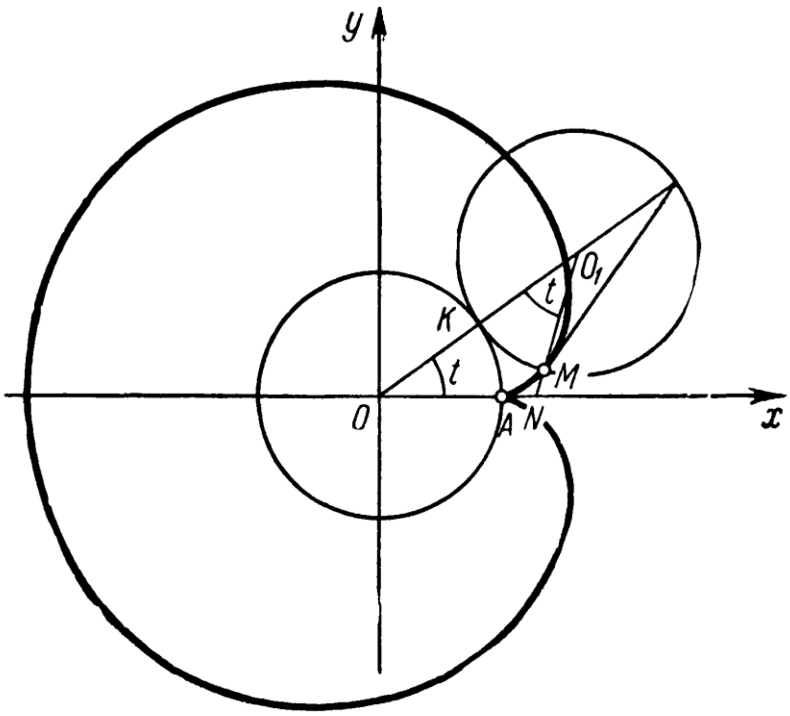


Рис. 2.12

По вигляду цього рівняння можна сказати, що кардіоїда є однією з равликів Паскаля. Отже, вона може бути визначена як конхоїда кола.

Переводячи рівняння (2) в прямокутну систему координат, отримаємо:

$$(x^2 + y^2 + 2rx)^2 = 4r^2(x^2 + y^2). \qquad (3)$$

З цього рівняння випливає , що кардіоїда є алгебраїчною кривою 4 -го порядку.

Властивості.

1 . Дотична в довільній точці кардіоїди проходить через точку похідного кола, діаметрально протилежну точці дотику кіл, а нормаль – через точку їх дотику.

2 . Кут μ, що утворений дотичною до кардіоїд з радіусом-вектором точки дотику, дорівнює половині кута, утвореного цим радіусом - вектором з полярною віссю. Дійсно, $tg\,\mu = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{2r\,(1-\cos\varphi)}{2r\sin\varphi} = tg\,\frac{\varphi}{2}$, звідки $\mu = \frac{\varphi}{2}$. З цього співвідношення випливає те, що кут, утворений дотичною до кардіоїди з віссю абсцис, дорівнює $\frac{3}{2}\varphi$ (як зовнішній кут трикутника *AMN*, рис. 2.12).

Маючи в своєму розпорядженні формулу $\mu = \frac{\varphi}{2}$, можна довести, що дотичні до кардіоїд, проведені в кінцях хорди, що проходить через полюс, взаємно перпендикулярні.

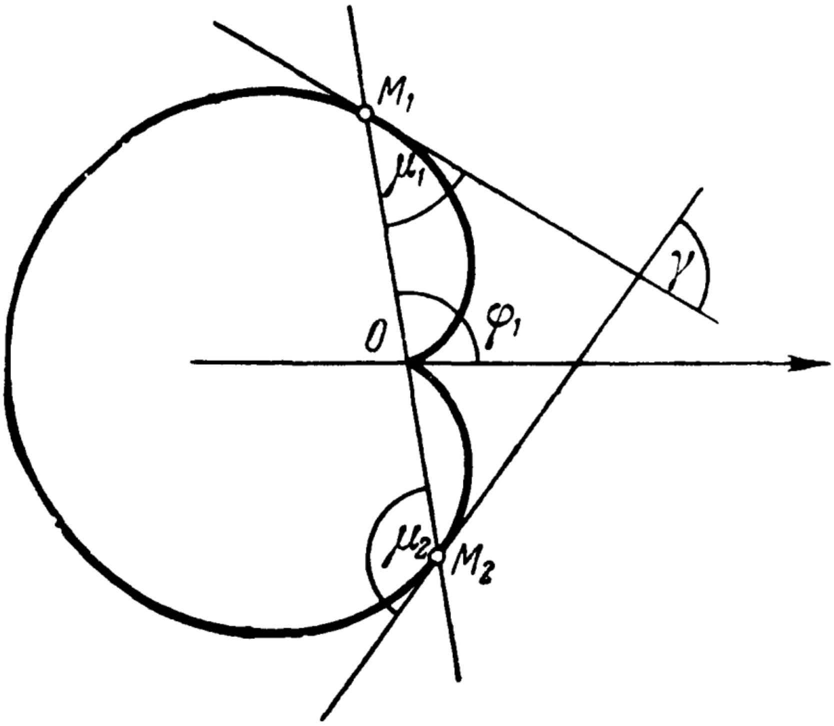


Рис. 2.13

Дійсно , так як $\mu_1 = \frac{1}{2}\varphi_1, \mu_2 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \pi),\ \gamma = \mu_2 - \mu_1 = \frac{\pi}{2}$ (Мал. 2.13).

Зауважимо, що геометричне місце точок перетину цих дотичних є колом $x^2 + y^2 = 9r^2$. Дійсно, рівняння першої дотичної на основі рівнянь (1) кардіоїди , матиме вигляд $x \sin\frac{3\varphi}{2} - y \cos\frac{3\varphi}{2} = 3r \sin\frac{\varphi}{2}$, а другої дотичної $x \cos\frac{3\varphi}{2} + y \sin\frac{3\varphi}{2} = 3r \cos\frac{\varphi}{2}$. Виключаючи з цих рівнянь параметр, одержимо рівняння зазначеного кола.

3 . Радіус кривизни в довільній точці кардіоїди знаходиться за формулою

$$R_{\text{к}} = \frac{8r}{3} \sin\frac{\varphi}{2}. \qquad (4)$$

Можна показати також, що радіус кривизни дорівнює $\frac{2}{3}$ полярної нормалі N в заданій точці.

Дійсно , $N = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = 4r \sin\frac{\varphi}{2}$, звідки на основі (4) отримуємо $R_к = \frac{2}{3} N$. Співвідношення це може бути використано для побудови центру кривизни кардіоїди .

4 . Еволюта кардіоїди буде також кардіоїдою, подібною до даної, з коефіцієнтом подібності , рівним $\frac{1}{3}$, і поверненою відносно даної на кут 180°.

5 . Довжина дуги кардіоїди від точки A до довільної точки M знаходиться за формулою

$$S = \frac{8r}{3}\sin\frac{\varphi}{2}. \qquad (5)$$

Якщо довжину дуги відраховувати від точки A_1 діаметрально протилежній точці А, то формула для знаходження довжини дуги може бути записана у вигляді

$$S = -8r\cos\frac{\varphi}{2}. \qquad (6)$$

6 . Натуральне рівняння кардіоїди отримаємо, якщо з рівностей (4) і (6) виключити параметр. Воно буде мати вигляд

$$9R_к + S^2 = 64r^2. \qquad (7)$$

7 . Площа, обмежена кардіоїдою, знаходиться за формулою

$$U = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\rho^2 d\varphi = 4r^2\int_0^{\pi}(1-\cos\varphi)^2 d\varphi = 6\pi r^2.$$

і, як видно , дорівнює в 6 разів більшою площі похідного кола. Довжина всієї кардіоїди знаходиться за формулою

$$S{=}2\int_0^{\pi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi = 2\int_0^{\pi}4r\sin\frac{\varphi}{2} = 16r$$

і, як видно, дорівнює восьми діаметрам похідного кола. Обєм тіла, отриманого обертанням кардіоїди навколо її осі, дорівнює $\frac{64}{3}\pi r^3$. Поверхня тіла, отриманого обертанням кардіоїди навколо її осі, дорівнює $\frac{128}{5}\pi r^2$.

Кардіоїда є подерою кола відносно точки, що належить цьому колу. Дійсно, нехай OM є перпендикуляром, опущеним на дотичну до кола з радіусом $2r$, проведену в точці N (рис. 2.14). Так як $OM = OB{+}BM$, або

$\rho = 2r\cos\varphi + 2r$, то геометричним місцем точок M буде кардіоїда з рівнянням $\rho = 2r\,(1+\cos\varphi)$.

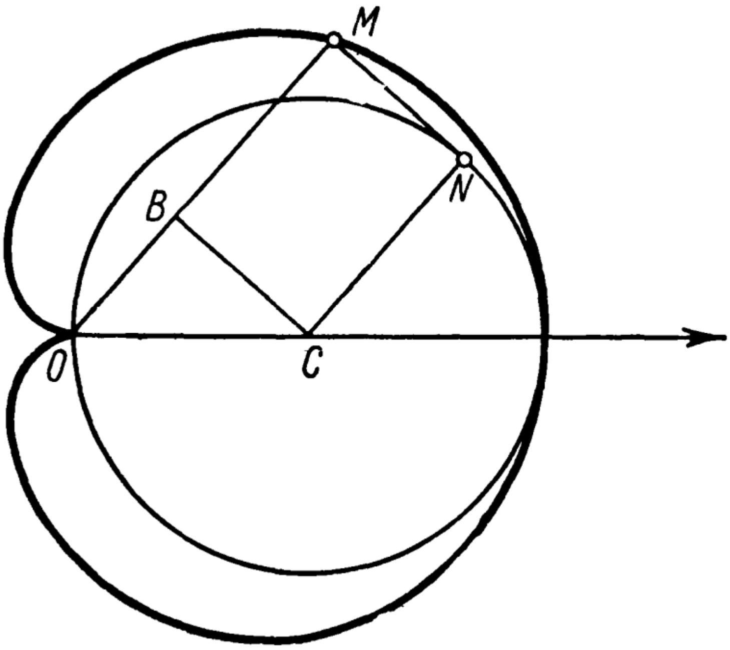


Рис. 2.14

Зауважимо, що кардіоїда відноситься також до сімейства синусоїдальних спіралей, і окремі властивості її повторюють загальні властивості цих кривих. З цих властивостей випливає, зокрема , що інверсія кардіоїди щодо точки повернення дає параболу.

2.7. Астроїда

Властивості. Астроїда являє собою траєкторію точки, що лежить на колі радіуса *r*, що котиться по внутрішній стороні іншого, нерухомого кола , радіус R якого в чотири рази більший.

Параметричні рівняння астроїди мають вигляд:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}R\cos\frac{t}{4} + \frac{1}{4}R\cos\frac{3t}{4}, \\ y = \frac{3}{4}R\sin\frac{t}{4} - \frac{1}{4}R\sin\frac{3t}{4}, \end{cases} \qquad (1)$$

де *t*, як і раніше , кут повороту похідного кола (рис. 2.15). Виключаючи з рівнянь (1) параметр *t*, отримаємо:

$$(x^2+y^2-R^2)^3 + 27R^2x^2y^2 = 0. \qquad (2)$$

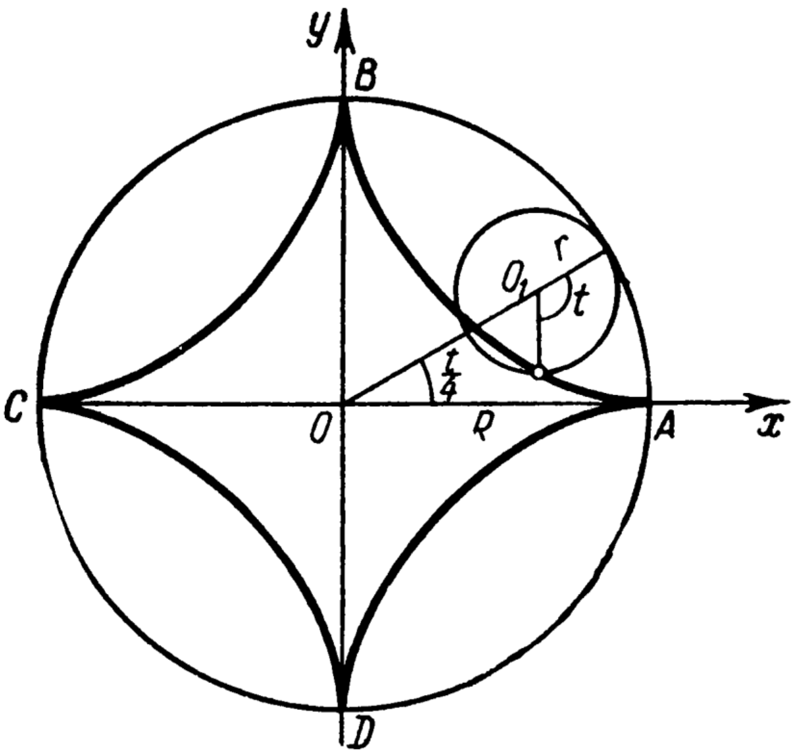


Рис. 2.15

З рівняння (2) випливає, що астроїда є алгебраїчною кривою 6 -го порядку .

Параметричні рівняння (1) астроїди можна подати у такому вигляді

$$\begin{cases} x = R\cos^3\frac{t}{4} \\ y = R\sin^3\frac{t}{4}, \end{cases} \qquad (3)$$

Виключаючи з цих рівнянь параметр t, отримаємо рівняння астроїди, що часто застосовується

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}; \qquad (4)$$

Деякі відношення для астроїди:

1) радіус кривизни в довільній точці астроїди визначається за формулою

$$R_к = \frac{3}{2}R\sin\frac{t}{2}; \qquad (5)$$

2) довжина дуги астроїди від точки A до довільної точки M (t) знаходиться за формулою $S = \frac{3}{2}R\sin^2\frac{t}{4}$; довжина однієї вітки дорівнює $\frac{3}{2}R$, а довжина всієї кривої $6R$;

3) для отримання натурального рівняння астроїди зауважимо, що якщо початком відліку довжини дуги вважати не точку A , для якої $t = 0$, а точку , для якої $t = \pi$, то довжина дуги знаходиться за формулою

$$S = \frac{3R}{2}\left(\sin^2\frac{t}{4} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{3R}{2}\cos\frac{t}{2}; \qquad (6)$$

виключаючи параметр t з рівнянь (5) і (6), отримаємо натуральне рівняння астроїди

$$R_k^2 + 4S^2 = \frac{3R^3}{2};$$

4) еволюта астроїди є також астроїда, подібна до даної, з коефіцієнтом подібності 2, і повернена відносно до даної на кут $\frac{\pi}{4}$ (рис. 2.16);

б) площа, обмежена всією астроїдою, дорівнює $\frac{3}{8}\pi R^2$; об'єм тіла, отриманого обертанням астроїди, дорівнює $\frac{32}{105}\pi R^3$; поверхня тіла, утвореного обертанням астроїди, дорівнює $\frac{12}{5}\pi R^2$.

Астроїда є обвідною відрізка постійної довжини, кінці якого ковзають по двом взаємно перпендикулярним прямим.

Приймаємо ці прямі за осі координат і, позначаючи кут нахилу ковзаючого відрізка $ND = R$ через α (рис. 2.17), матимемо рівняння прямої ND у вигляді

$$x\cos a - y\sin a + R\sin a\cos a = 0. \qquad (7)$$

Диференціюючи це рівняння по параметру a , отримаємо:

$$x\cos a + y\sin a - R\sin^2 a + R\cos^2 a = 0.$$

Виключаючи з останнього рівняння і рівняння (7) параметр a, будемо мати рівняння обвідної у вигляді $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$, тобто астроїду.

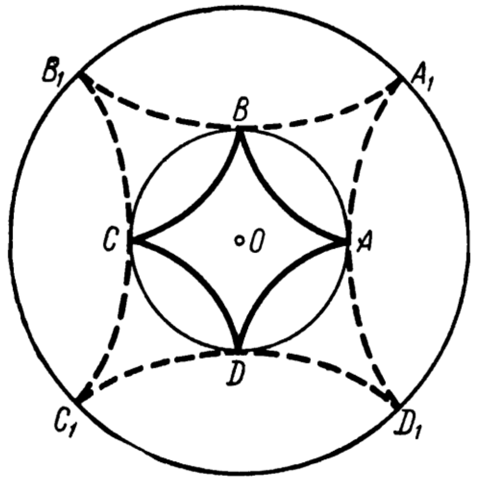


Рис. 2.16

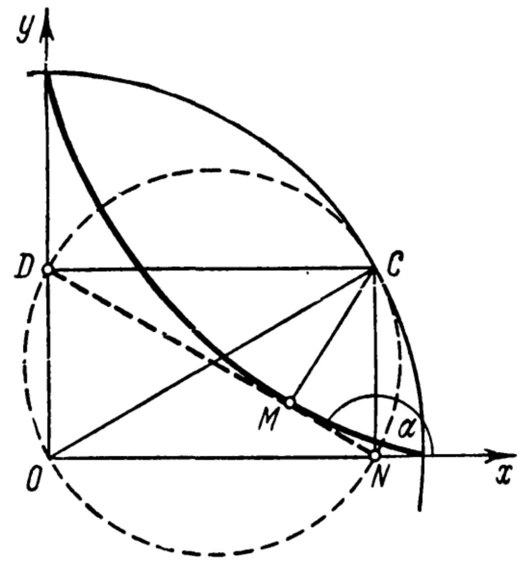


Рис. 2.17

Практично переміщення відрізка *ND* можна здійснити за допомогою так званих карданових кіл. Одне з цих кіл з радіусом *R* нерухоме, а інше, з радіусом *r,* в два рази меншим, котиться по внутрішній стороні нерухомого кола. Будь-які дві діаметрально протилежні точки *N* і *D* кола, що котиться, будуть переміщатися по двом взаємно перпендикулярним діаметрам *Ox* і *Oy* нерухомого кола. Зрозуміло, що обвідною діаметра кола, що котиться, і буде астроїда.

Розглянутий спосіб утворення астроїди можна пояснити також наступним чином . Прямокутник *ODCN*, дві сторони якого лежать на двох взаємно перпендикулярних прямих, деформується так, що діагональ його зберігає свою довжину, що дорівнює R;обвідною діагоналі і буде астроїда . Так як при цьому перпендикуляр, опущений з вершини *C* на діагональ *DN*, служить нормаллю до обвідної, то астроїда являє собою геометричне місце основ перпендикулярів, опущених з вершини *C* прямокутника на його діагональ.

Властивості дотичних до астроїди. Рівняння (7) виражає пряму *ND*, тобто дотичну до астроїди в деякій точці М, причому параметр *a* являє собою кут, утворений цією дотичною з віссю абсцис. Рівняння другої дотичної, перпендикулярної до першої, буде мати вигляд

$$x\cos a + y\sin a + R\sin a\cos a = 0. \qquad (8)$$

Виключаючи з рівнянь (7) і (8) параметр a, одержимо рівняння $R^2(x^2-y^2)^2=2(x^2+y^2)^2$, або в полярній системі $\rho=\frac{R}{\sqrt{2}}\cos 2\varphi$, яке виражає чотирьохпелюсткову троянду. Отже, геометричним місцем вершин прямого кута, сторони якого дотикаються до астроїди, є чотирипелюсткова троянда.

Інша властивість дотичних до астроїди така: кожна дотична перетинає астроїду в двох точках, дотичні в яких перетинаються в точці, що лежить на колі описаному навколо астроїди.

2.8. Лемніската Бернуллі

Властивості.

Лемніската являє собою геометричне місце точок M, похідна відстаней кожної з яких від двох фіксованих точок F і F_1 є сталою величиною. Ця стала може виражатися будь-яким додатнім числом, задання якого визначає квадрат половини відстані між фіксованими точками.

Маючи в своєму розпорядженні фіксовані точки F і F_1 – фокуси лемніскати на осі абсцис і позначаючи їх абсциси через a і - a , матимемо $MF \cdot MF_1 = a^2$, або $\sqrt{(x-a)^2+y^2}\,\sqrt{(x+a)^2+y^2}=a^2$, або

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0. \qquad (1)$$

Переходячи до полярних координат, отримаємо:

$$\rho^2=2a^2\cos 2\varphi. \qquad (2)$$

Лемніската складається з двох пелюсток і початок буде для неї подвійною точкою з дотичними $y = \pm x$. За виглядом цих рівнянь можна сказати, що дотичні в подвійній точці взаємно перпендикулярні. З рівняння (2) випливає також, що при $\varphi = 0$ $\rho=a\sqrt{2}$, тобто вісь абсцис перетинається лемніскатою в точках A $(a\sqrt{2}, 0)$ і A_1 $(-a\sqrt{2}, 0)$.

Властивості лемніскати:

1 . Кут μ, утворений дотичною в довільній точці лемніскати з радіусом

- вектором точки дотику дорівнює $2\varphi + \frac{\pi}{2}$.

2. Кут γ між двома дотичними, проведеними в кінцях хорди, що проходить через полюс системи, є для кожної

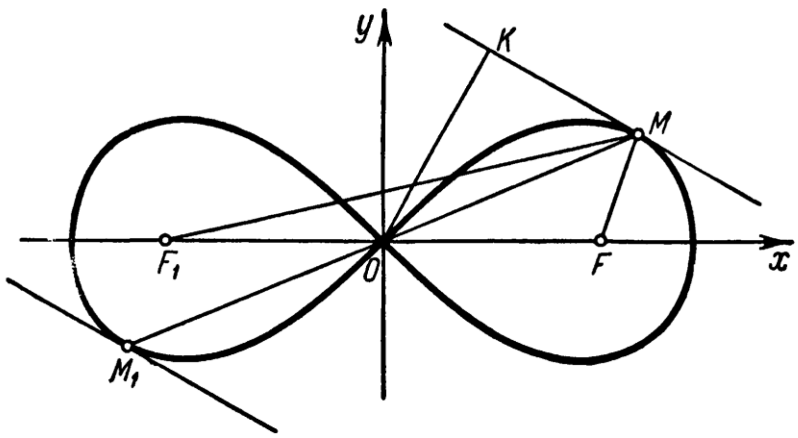


Рис. 2.18

синусоїдальної спіралі величиною сталою, рівною $-m\pi$, отже, для лемніскати він дорівнює -2π, звідки випливає, що дотичні до лемніскати, проведені в кінцях хорди , що проходить через полюс системи, паралельні між собою.

З рис. 2.18 видно, що кут, утворений перпендикуляром, опущеним на дотичну з початку координат, з полярною віссю, в три рази більший полярного кута точки дотику. Отже, лемніската може бути використана для трисекции кута .

3. Радіус кривизни для лемніскати він знаходиться за формулою $R = \frac{\rho}{3\cos 2\varphi}$, і так як полярна нормаль лемніскати знаходиться за рівністю $N = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \frac{\rho}{\cos 2\varphi}$, то $R = \frac{1}{3}N$, тобто радіус кривизни лемніскати в довільній її точці в три рази менший за полярну нормаль в цій точці. Звідси випливає простий спосіб побудови центру кривизни в довільній точці лемніскати.

Зауважимо, що геометричне місце проекцій центрів кривизни лемніскати на відповідні радіуси - вектори є також лемніскатоюз рівнянням

$\rho^2 = \frac{4a^2}{9}\cos 2\varphi$.

4 . Натуральне рівняння лемніскати має вигляд

$$S = 3\int \frac{dR}{\sqrt{(\frac{3}{a}R)^4 - 1}}.$$

5. Інверсія лемніскати $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ дає рівносторонню гіперболу.

6 . Подерой лемніскати є синусоїдальна спіраль $\rho^{\frac{2}{3}} = (\sqrt{2}a)^{\frac{2}{3}}\cos\frac{2}{3}\varphi$. Лемніската в свою чергу є подерою рівносторонньої гіперболи .

7. Лемніската є геометричним місцем точок, симетричних з центром рівносторонньої гіперболи відносно її дотичних.

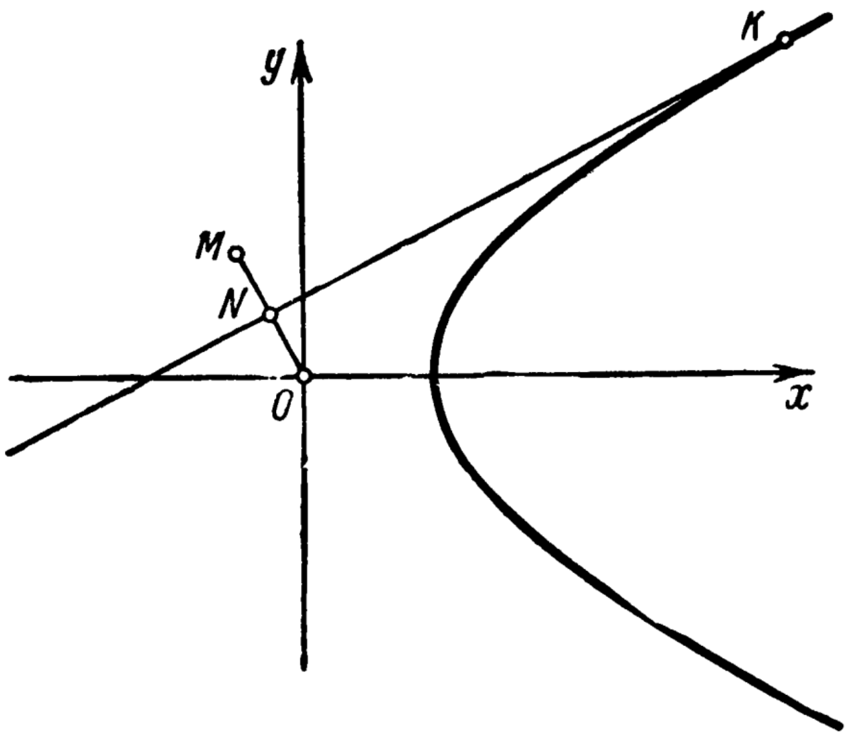


Рис. 2.19

Справді, нехай $\rho^{-2} = a^{-2}\cos 2\varphi$— рівняння гіперболи, K (x_1, y_2) — точка дотику, M (x_0, y_0)— точка шуканого геометричного місця, а N $(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2})$— точка перетину дотичної з прямою MO (рис. 2.19). Рівняння дотичної запишеться у вигляді $xx_1 — yy_1 = a^2$, а рівняння прямої MO — у вигляді $yx_1 + xy_1 = 0$. Так як точка N лежить і на дотичній і на прямій MO, то її координати повинні задовольняти як перше, так і друге рівняння. Отже, будуть справедливі рівності $x_0x_1—y_0y_1= a^2$, $y_0x_1 +x_0y_1= 0$. Крім того, $x^2 – y^2= a^2$ точка *К* лежить на гіперболі. Виключаючи з цих трьох рівностей параметри x_1 і y_1 одержимо рівняння $(x_0^2 + y_0^2)^2 == a^2(x_0^2 - y_0^2)^2$, що виражає лемніскату.

8 . Кінематично лемніската може бути отримана як траєкторія середини великої ланки шарнірного антипаралелограма, протилежна ланка якого закріплена. Дійсно, нехай довжина меншої ланки дорівнює 2*a* , а більшої 2a У2 (рис. 2.20). Так як при русі антипаралелограма різниця відстаней точки *E* від точок *A* і *B* буде залишатися сталою, то точка *E* буде переміщатися по гіперболі, яка при обраній нами довжині великої і малої ланок виявиться рівносторонньою. Пряма *EF* – вісь симетрії антипаралелограма – ділить кут між фокальними радіусами - векторами *EB* і *EA* навпіл і, отже, за відомою властивістю гіперболи, буде відігравати роль дотичної до гіперболи.

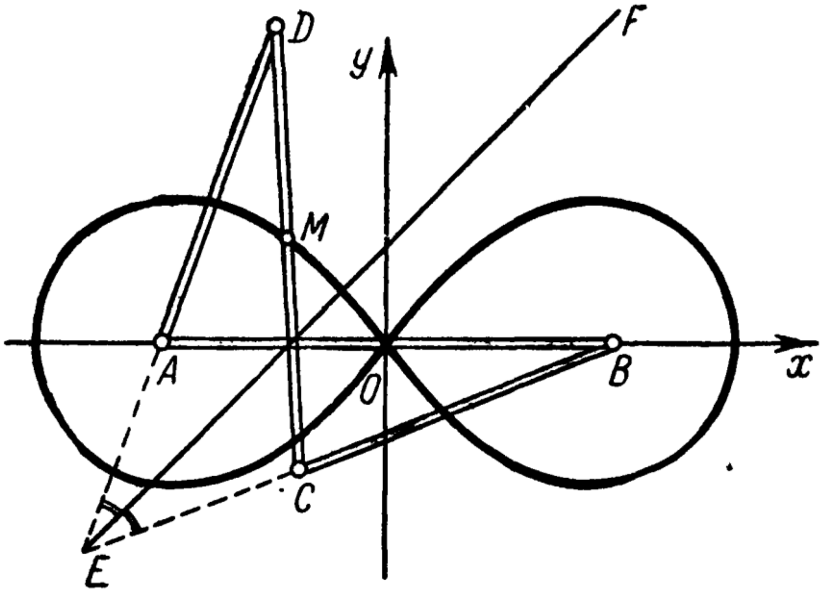


Рис. 2.20

Середина *M* ланки *DC* є точкою, симетричною точці *O* відносно *EF*, тобто дотичній до гіперболи. Тому на основі властивості 7 точка М описує лемніскату.

9. Відрізок бісектриси кута між фокальними радіусами-векторами точки лемніскати дорівнює відрізку від центру лемніскати до перетину її осі з цією биссектрисою. Цю властивість легко довести, користуючись біполярним рівнянням лемніскати.

10. Ряд цікавих властивостей лемніскати пов'язується з її квадратурою.

Знайдемо площу сектора між її віссю і радіусом-вектором, що відповідає куту φ:

$$U_{\varphi} = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} \rho^2 d\varphi = \int_0^{\varphi} \cos 2\varphi \, d\varphi = \frac{a^2}{2}\sin 2\varphi. \qquad (3)$$

При $\varphi = \frac{\pi}{4}$ отримаємо:

$$U_{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4} = \frac{1}{4}\left(a\sqrt{2}\right)^2. \qquad (4)$$

тобто площа, обмежена лемніскатою, дорівнює площі квадрата зі стороною $a\sqrt{2}$.

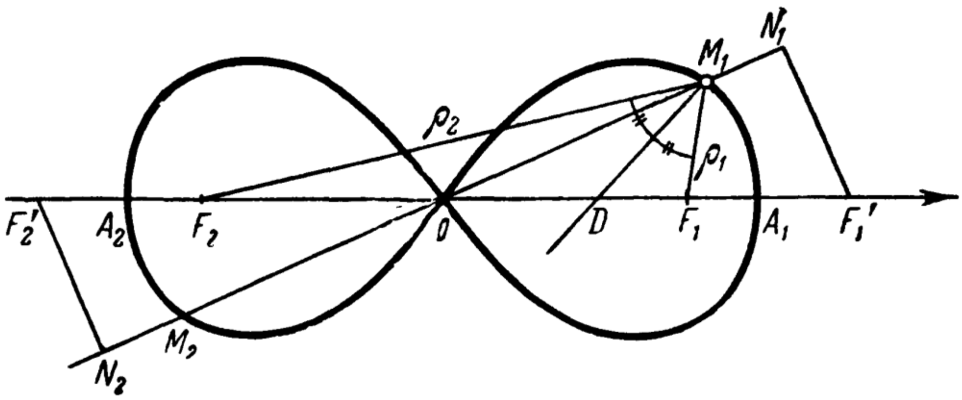


Рис. 2.21

На підставі елементарних міркувань можна показати, що перпендикуляр, опущений з фокуса лемніскати на радіус-вектор будь-якої її точки, ділить площу відповідного сектора навпіл.

Цікаву властивість лемніскати було виявлено в 1835 р. Штейнером. Нехай точки F'_1 і F'_2 є точками, гармонійно спряженими з точками F_1 і F_2 відносно точок A_1 і A_2 (рис. 2.21). Маємо $OF_1 = OF_2 = a$ і $OA_1 = OA_2 = a\sqrt{2}$. З іншого боку, як відомо з проективної геометрії, $OF_1 \bullet OF'_1 = OA^2_1$ і $OF_2 \bullet OF'_2 = OA^2_2$, звідки $OF'_1 = OF'_2 = 2a$. Проведемо тепер через точку O пряму, що утворює з віссю абсцис кут $\varphi (\varphi < \frac{\pi}{4})$ і нехай M_1 і M_2 - точки перетину її з лемніскатою. Основи перпендикулярів, опущених на цю пряму з точок F'_1 і F'_2 позначимо через N_1 і N_2. Тоді

$$N_1M_1 = ON_1 — OM_1 = 2a \cos \varphi — a\sqrt{2\cos 2\varphi},$$

$$N_1M_2 = ON_1 + OM_2 = 2a\cos\varphi + a\sqrt{2\cos 2\varphi},$$

звідки $N_1M_1 \cdot N_1M_2 = 4a^2\cos^2\varphi - 2a^2\cos\varphi = 2a^2$ і, отже, площа прямокутника, побудованого на відрізках N_1M_1 і N_2M_2 є величиною сталою, і рівною площі, обмеженої лемніскатою.

11. Знаходячи довжину дуги лемніскати між точками, для яких $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \varphi$, будемо мати:

$$S=\int_0^{\varphi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi = a\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = a\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}. \qquad (5)$$

Приведемо цей інтеграл до нормального вигляду

$$S=\frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}} = \frac{a}{\sqrt{2}}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\theta\right).$$

Для визначення довжини всієї лемніскати вважаємо $\varphi = \frac{\pi}{4}$; тоді $2\sin^2\varphi = 1$ і, отже, відповідне значення θ дорівнює y. Тоді довжина чверті лемніскати виразиться повним еліптичних інтегралом 1-го роду

$$S=\frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}} = \frac{a}{\sqrt{2}}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Застосування лемніскати. Історична довідка. У техніці лемніската використовується, зокрема, в якості перехідної кривої на заокругленні малого радіуса, як це має місце на залізничних лініях в гірській місцевості і на трамвайних шляхах.

Як приклад застосування лемніскати в галузі фізики можна вказати, що еквіпотенціальні лінії поля, створюваного двома паралельними струмами по нескінченно довгим провідникам, в площині, до них перпендикулярної, в окремому випадку є лемніската.

Як показав Бонат, лемніската є криво , що володіє тією властивістю, що й важка матеріальна точка, виходячи зі стану спокою, пробігає під дією сили тяжіння дугу цієї кривої за такий же час, як і відповідну хорду . Центр лемніскати при цьому збігається з вихідним положенням точки, що рухається, а вісь її утворює з вертикаллю кут в 45 °.

Рівняння лемніскати зустрічається вперше в математичній літературі в статті Я. Бернуллі в « Acta eruditorum » в 1694 р.

Особлива увага математиків до вивчення властивостей лемніскати була привернена у зв'язку з дослідженнями Фаньяно, який, як уже згадувалося, вперше виконав квадратуру лемніскати і, займаючись її випрямленням, поклав початок теорії еліптичних функцій.

2.9. Троянди

Порядок, особливості форми і властивості. Трояндами, або кривими Гвідо Гранді, називають сімейство кривих, полярне рівняння яких записується у вигляді

$$\rho = a \sin k\varphi \quad (1)$$

або у вигляді $\rho = a\cos k\varphi$, де a і k - сталі; надалі ми будемо вважати їх додатніми числами.

Якщо модуль $k = \frac{m}{n}$, тобто число раціональне, то троянди будуть алгебраїчними лініями, причому завжди парного порядку. Для доведення перейдемо до декартової системи. Застосуємо відому тригонометричну формулу

$$\sin A\varphi = \binom{A}{1}\cos^{A-1}\varphi\sin\varphi - \binom{A}{3}\cos^{A-3}\varphi\sin^3\varphi + \binom{A}{5}\cos^{A-5}\varphi\sin^5\varphi - \cdots,$$

де A - будь-яке додатнє число. Застосовуючи цю формулу до лівої і правої частин тотожності $\sin m\varphi = \sin n\,\frac{m}{n}\varphi$, отримаємо:

$$\binom{m}{1}\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi - \binom{m}{3}\cos^{m-3}\varphi\sin^3\varphi + \binom{m}{5}\cos^{m-5}\varphi\sin^5\varphi - \cdots = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\frac{m}{n}\varphi\sin\frac{m}{n}\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\frac{m}{n}\varphi\sin^3\frac{m}{n}\varphi + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\frac{m}{n}\varphi\sin^5\frac{m}{n}\varphi - \cdots \quad (2)$$

Зауважимо, що, за формулами переходу,

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2},\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,$$

крім того, з рівняння троянд випливає, що

$$\sin\frac{m}{n}\varphi = \frac{p}{a} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}, \quad \cos\frac{m}{n}\varphi = \frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{a} = \frac{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}{a}.$$

Підставляючи ці значення в тотожність (2), ми і знайдемо рівняння троянд у декартовій системі:

$$a^n\left[\binom{m}{1}x^{m-1}y - \binom{m}{3}x^{m-3}y + \binom{m}{5}x^{m-5}y - \cdots\right]$$
$$= \binom{n}{1}(x^2+y^2)^{\frac{m-1}{2}}[a^2-(x^2+y^2)]^{\frac{n-1}{2}}$$
$$- \binom{n}{3}(x^2+y^2)^{\frac{m-1}{2}}[a^2-(x^2+y^2)]^{\frac{n-3}{2}} + \cdots$$

Отримане рівняння буде раціональним, якщо m і n є числами непарними. Якщо ж одне з них буде парним, то рівняння може бути раціональним тільки після піднесення обох його частин до квадрату. У першому випадку його степінь виявиться рівним $m + n$, а в другому - $2(m+n)$. Таким чином, якщо числа m і n є непарними, то порядок троянди дорівнює $m+n$, якщо одне з цих чисел парне, то троянда буде алгебраїчною лінією порядку $2(m+n)$.

Звернемося до дослідження форми троянд.

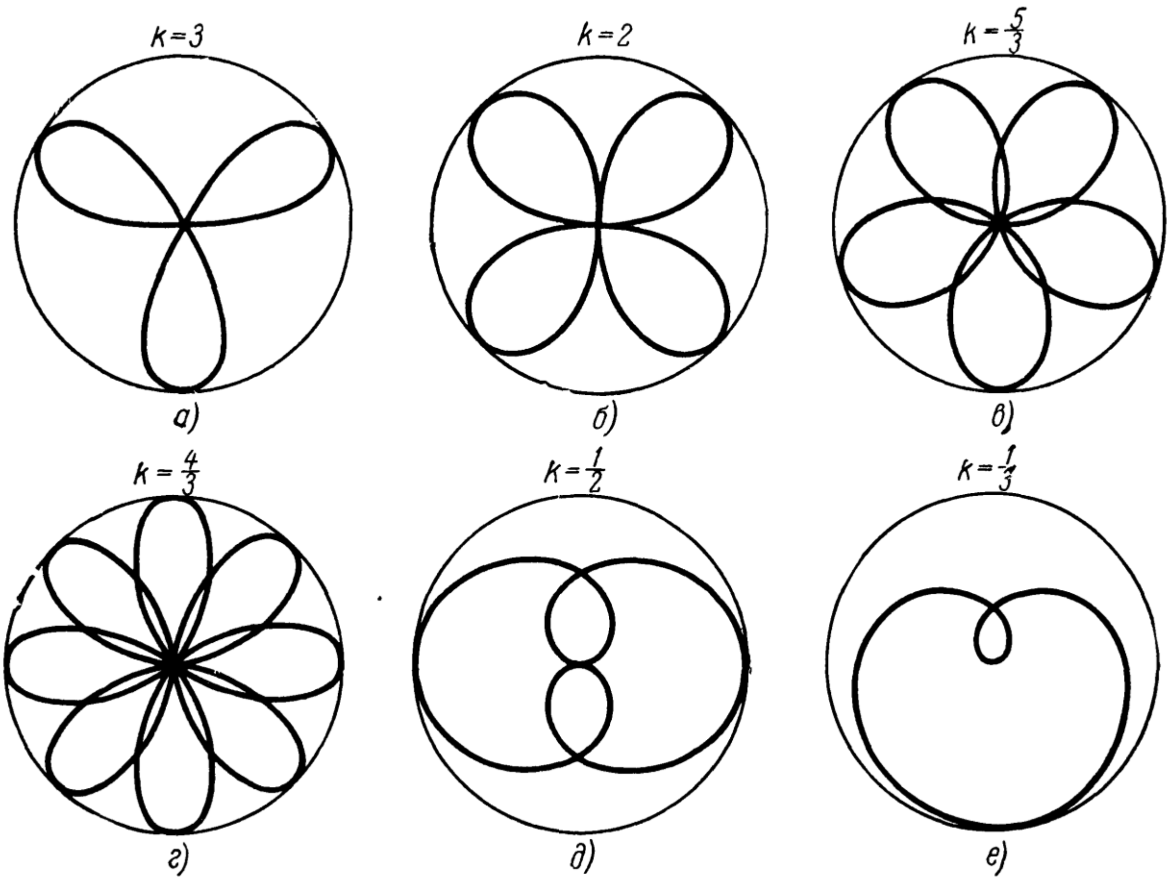


Рис. 2.22

На підставі того, що права частина рівняння не може перевищувати величини a, то вся крива уміщається всередині кола з радіусом, рівним a. Так як $\sin k\varphi$ є функцією періодичної, то троянда складається з конгруентних пелюсток, симетричних відносно найбільших радіусів, кожен з яких, рівний a. Кількість цих пелюсток залежить від величини модуля k.

Прості міркування приводять до наступних висновків:

1) якщо модуль k - ціле число, то троянда складається з k пелюсток при k непарному і з $2k$ пелюсток при k парному (рис. 2.22, а , б);

2) якщо модуль k - раціональне число, що дорівнює $\frac{m}{n}$ ($n > 1$), то троянда складається з m пелюсток у випадку, коли обидва числа m і n непарні, і з $2m$ пелюсток, якщо одне з цих чисел є парним; при цьому, на відміну від першого випадку, кожна наступна пелюстка буде частково покривати попередню (рис. 2.22 , я , г , д , е).

3) якщо модуль k - число ірраціональне, то троянда складається з незліченної безлічі пелюсток, що частково накладаються одна на одну.

Додамо ще, що кількість різних троянд одного і того ж порядку p у випадку, якщо p є числом, кратним 4, дорівнює значенню відомої функції $\pi(p)$, що виражає число простих чисел, менших p. Якщо ж p не ділиться на 4, а тільки на 2, то кількість троянд одного і того ж порядку p дорівнює $\pi(\rho) + \pi(\frac{p}{2})$.

Рози відносяться до сімейства циклоїдальних кривих. Вони є трохоїдами, точніше, гіпотрохоїдами, якщо $k < 1$, і епітрохоїдами , якщо $k > 1$.

З сімейством циклоїдальних кривих троянди пов'язані і тим , що вони є подерамі епі-і гіпоциклоїд відносно центру їх нерухомого кола .

Площа однієї пелюстки троянди знаходиться за формулою

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{k}} \rho^2 \, d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{k}} \sin k\varphi \, d\varphi = \frac{\pi a^2}{4k}.$$

Довжина дуги троянди виражається еліптичним інтегралом 2 -го роду.

Чотирьохпелюсткова і трьохпелюсткова троянди. Чотирьохпелюсткова троянда виражається рівнянням $\rho = a\sin 2\varphi$, або, в декартовій системі, $(x^2 + y^2)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0$.

Трьохпелюсткова троянда має рівняння $\rho = a\sin 3\varphi$, або, в декартовій системі, $(x^2 + y^2)^2 = a(3x^2y - y^3)$.

Перша з них є алгебраїчною лінією 6 -го порядку; початок координат служить для неї чотирикратної точкою з дотичними, що збігаються з осями координат (рис. 2.22, б).

Чотирьохпелюсткова троянда є подерою астроїди, а трипелюсткова є подерою кривої Штейнера.

Відзначимо ще такі властивості чотирипелюсткова троянди.

1. Чотирьохпелюсткова троянда є геометричним місцем основ перпендикулярів, опущених з початку координат на відрізок сталої довжини, кінці якого ковзають по координатних осях.

Дійсно, з рис. 2.23 маємо $PD = \frac{y^2}{x}$, звідки $MD = \sqrt{y^2 + \frac{y^4}{x^2}}$; крім того, $\frac{CD}{MD} = \frac{OD}{PD}$. Замінюючи члени пропорції відповідними виразами, одержимо рівняння $(x^2 + y^2)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0$, що виражає троянду.

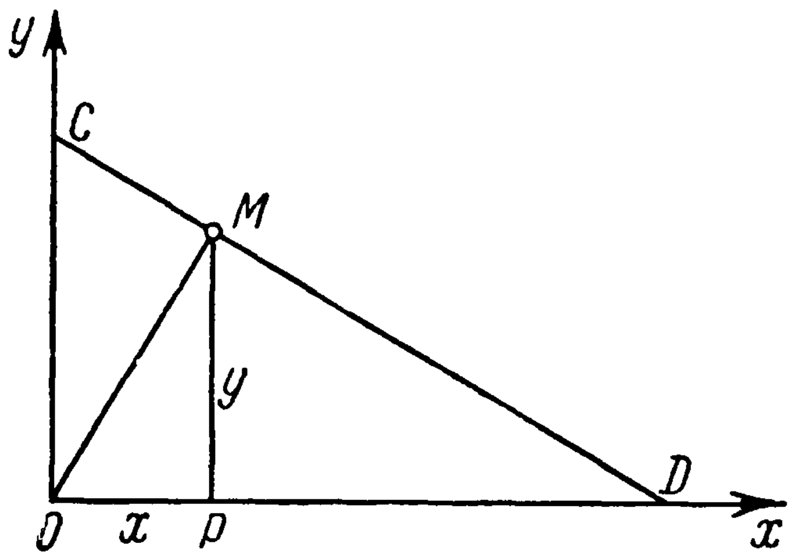


Рис. 2.23

2 . Чотирьохпелюсткова троянда є геометричним місцем вершин прямих кутів , сторони яких дотикаються до астроїди.

3 . Чотирьохпелюсткова троянда утворюється в результаті інверсії відносно початку координат, так званої хрестоподібної кривої, що має рівняння $\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^2}{y^2}=1$, або в полярній системі координат, $\rho=\frac{2a}{\sin 2\varphi}$ (рис. 2.24).

Площа , яку обмежує чотирьохпелюсткова троянда , дорівнює $\frac{1}{2}\pi a^2$; площа, яку обмежує трипелюсткова троянда $\frac{1}{4}\pi a^2$.

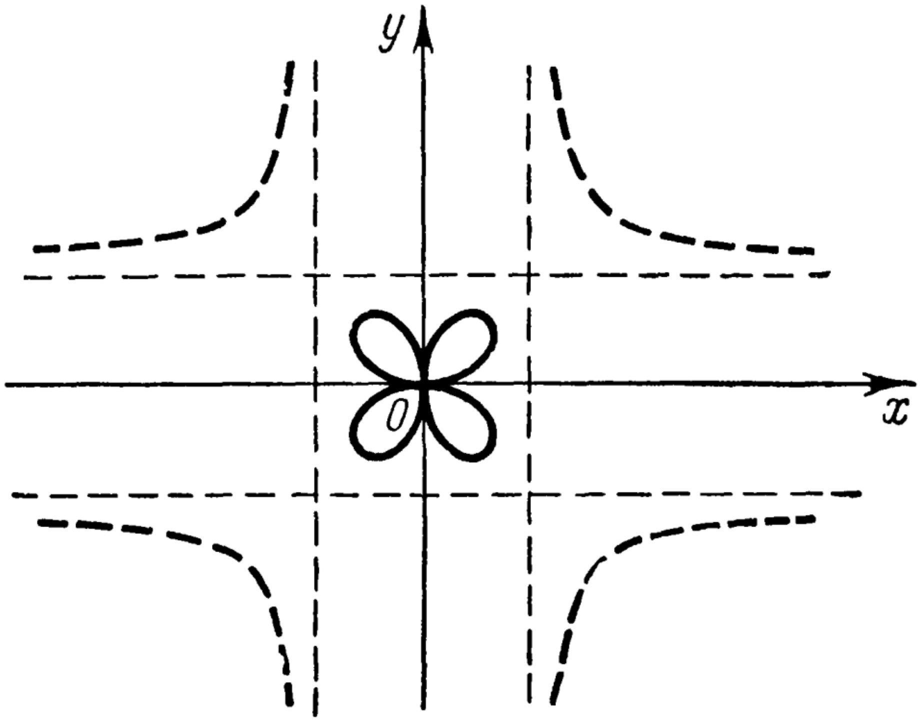


Рис. 2.24

Історична довідка. Дослідженням троянд займався першим італійський геометр Гвідо Гранді. Повна теорія цих кривих була викладена ним у творі «Flores geometrici ex rhodanearum et claelarum descriptione resultantes», виданому в 1728 р. Математичним дослідженням форми квітів і листя займався також Хабенніхт – геометр 19 ст., результати якого були викладені ним у творі «Die analitische Form der Blatter», виданому в 1896 р. Свої судження він засновував на тому, що в переважній більшості випадків обрис листа або пелюстки являє собою криву, симетричну відносно осі, і так як відстань між двома будь-якими точками її буде величиною кінцевою, то в полярній системі рівняння такої кривої можна записати у вигляді $p = F(\varphi)$, де права частина є функцією однозначною, безперервною і періодичною функцією з періодом 2π. Характеристика цієї функції доповнюється ще й тим міркуванням, що рівним за абсолютною величиною значенням φ повинні відповідати рівні значення p і, отже, шукану функцію можна виразити, наприклад, як $F(\varphi) = f(\cos\varphi)$. У першому наближенні її можна представити рівністю

$$\rho = a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + \cdots + a_n \cos n\varphi.$$

Виражаючи тут $\cos^k \varphi$ за відомою формулою через $\cos\varphi$, $\cos 2\varphi$, ... , $\cos\ k\varphi$, можна записати шукане рівняння обрису листа або квіткової пелюстки у вигляді $\rho = b_0 + b_1 \cos\varphi + b_2 \cos 2\varphi + \cdots + b_n \cos n\varphi$, де коефіцієнти визначаються в конкретному випадку на основі відповідних вимірювань. Хабенніхт отримав цілий ряд рівнянь , які з досить гарним наближенням виражали аналітично форми листя клена, щавлю, верби і т. д . Ось деякі з цих рівнянь:

$\rho = 4(1 + \cos 3\varphi) + 4\sin^2 3\varphi$ – лист щавлю;

$\rho = 4(1 + \cos 3\varphi) - 4\sin^2 3\varphi$ –лист трилисника;

$\rho = 3(1 + \cos^2\varphi) + 2\cos\varphi + \sin^2\varphi - 2\sin^2 3\varphi \cos^4 \frac{\varphi}{2}$ – лист плюща.

Розділ 3. Графічні етюди в техніці ейдографіки

Ейдографіка (гр. еігіоз - образ, §гарЬіке - живопис) - особливий різновид комп'ютерного малювання за допомогою графіків явно і неявно заданих залежностей між змінними.

Ейдографіка за своєю сутністю є творчою діяльністю, яка не тільки підсилює гуманітарну складову математичної освіти, але й утверджує погляд на математику як мистецтво. З іншого боку, у своєму досконалому вигляді вона неможлива без широкого використання сучасних ІКТ, зокрема ми віддаємо перевагу ПМК GRAN (розробники авторський колектив під керівництвом М. І. Жалдака). Наведемо основні аргументи на користь останнього:

- простий і доступний у застосуванні;
- не обмежується кількість одночасно побудованих графіків;
- забезпечена можливість працювати з лініями, заданими як у декартовій системі координат (явно, неявно, параметрично), так і в полярній системі координат;
- забезпечено достатній вибір кольорової гами та стилю ліній. Щоб підтвердити наведені аргументи наочно, подамо кілька рисунків, виконаних у техніці ейдографіки в програмному середовищі.

Під графічним етюдом розуміємо рисунок, який утворюється за допомогою графіків різноманітних залежностей.

З огляду на це, графічний етюд можна розглядати як своєрідний симбіоз математики і мистецтва. Поєднання достатньо рідкісне у нашій буденній педагогічній практиці, а тому й цікаве.

Проведене дослідження переконує, що найдоцільніше моделювати процес опанування ейдографікою, як творчою діяльністю, за наступною схемою.

1. Ознайомитися з рівняннями кривих (за необхідністю у випереджальному режимі). На цьому етапі доцільно створити абетку

ейдографіки за схемою: графічний образ, аналітичне задання, назва, тобто: візуальний код, знаково-символьний код, вербальний код.

2. Паралельно із створенням абетки має відбуватися ознайомлення з ПМК GRAN. Зазначимо, що для початку достатньо опанувати хоча б програмний засіб GRAN-1 на рівні користувача. Не треба забувати про посильність завдань, тому на етапі ознайомлення недоцільно переобтяжувати учнів зайвими деталями і тонкощами. Дуже важливо намагатися підтримувати їхній інтерес, заохочувати до найменших проявів творчості та нешаблонності.

Для самостійної роботи можна запропонувати такі завдання:

- за переліком аналітичних завдань певних ліній побудувати зображення у програмному середовищі GRAN-1;
- задати готове графічне зображення аналітично (клас використаних кривих задається).

Безумовно, і перше, і друге завдання мають бути цікавими як з точки зору математики (набір аналітичних виразів), так і з точки зору естетики (нестандартність, естетичність рисунків).

3. Після опанування абетки та відпрацювання навичок побудови графіків функцій у програмному середовищі GRAN-1 можна перейти до складніших завдань. Наприклад, домалювати рисунок (узор, орнамент), використовуючи певний вид симетрії, або створити власний графічний етюд, взявши за основу однакове для всіх ядро-стимул (готове зображення, що є необхідним елементом майбутнього власного рисунка), яке можна доповнювати, повторювати у різних напрямках, обрамляти і т.д. Вимога певного виду симетрії рисунка на перших етапах є обов’язковою.

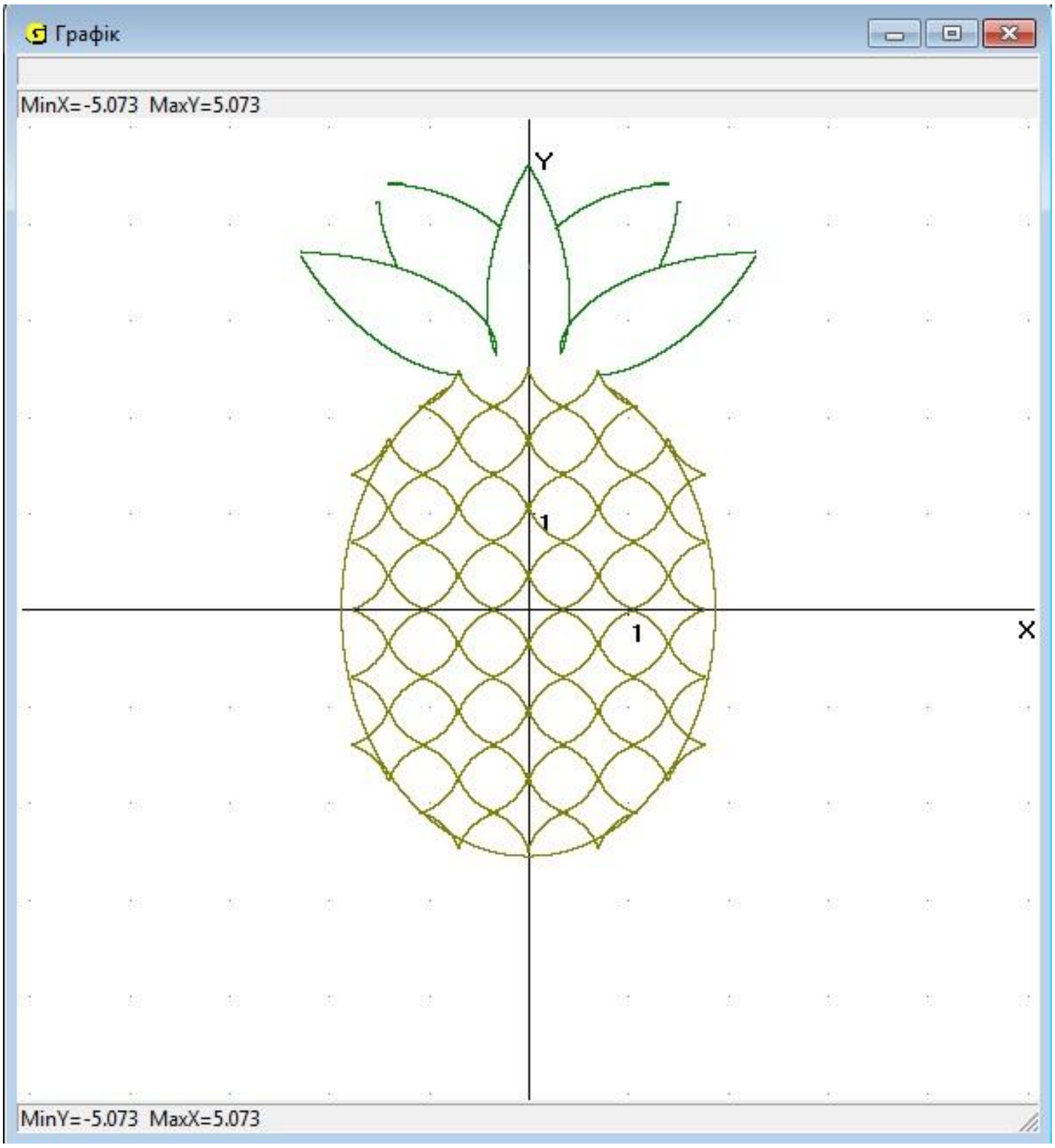
Оскільки, як вихідне положення прийнята органічна єдність наочно-образного, знаково-символьного та вербального, то доцільно пропонувати авторам графічних етюдів дібрати їм влучну назву, презентувати їх лаконічним поясненням творчого задуму.

4. Цей етап реалізації запропонованої схеми є найбільш нерегламентованим і зорієнтованим на індивідуальні особливості учня (студента). Тут немає готових рецептів, алгоритмів, приписів. Він спрямований на здатність створити таку графічну конструкцію, яка б стала максимальним дієвим подразником емоційної сфери глядача, спонукала його до фантазування, розгортання власних ідей-візій, бажання до втілення задуму. Якщо перші три етапи пов'язані з наслідуванням, копіюванням, набуттям досвіду, то цей етап пов’язаний з власне творчою діяльністю, спрямованою на створення чогось нового, самобутнього, в певному розумінні неповторного.

Під час створення графічних етюдів у техніці ейдографіки так потужно «спрацьовують» усі геометричні перетворення, що свідомо запам’ятовуються без особливих зусиль.

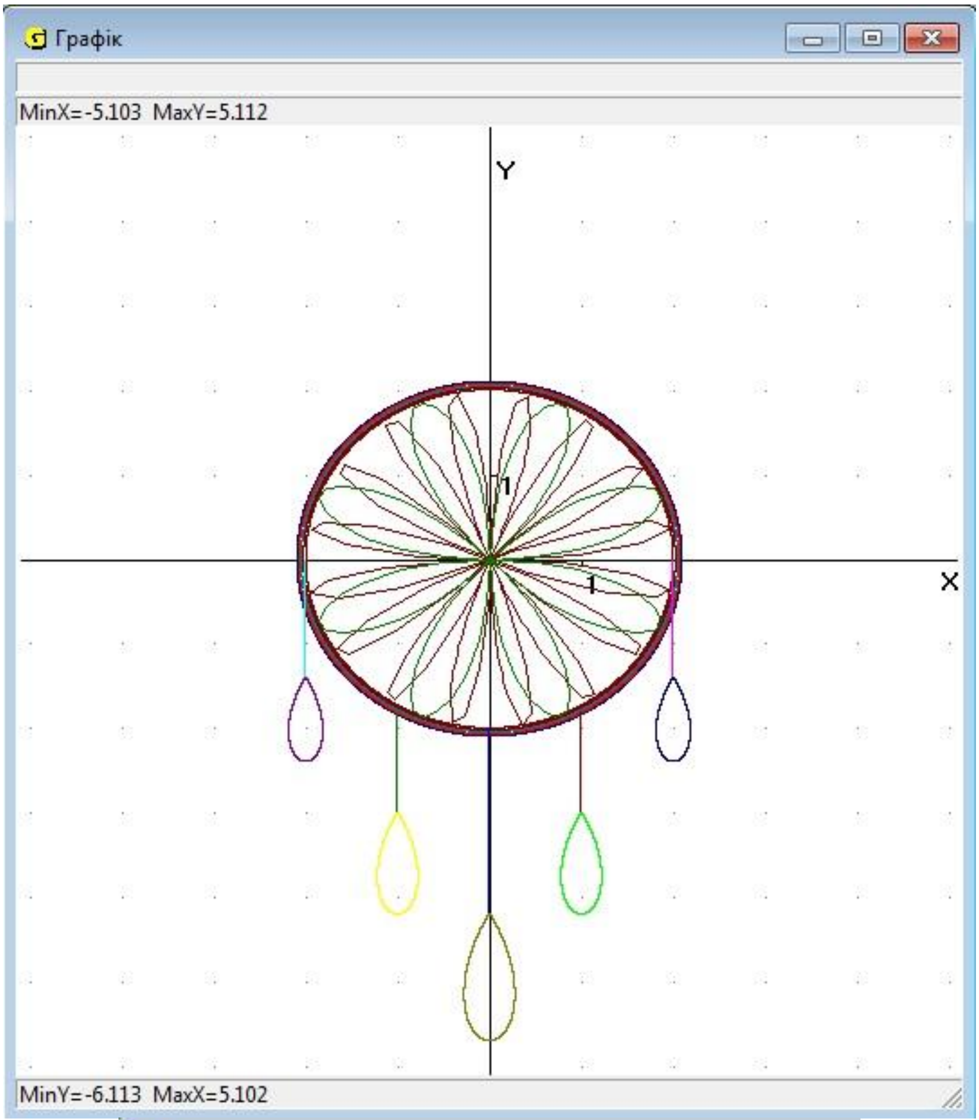
Нижче наведемо приклади графічних етюдів, створених за допомогою визначних алгебраїчних кривих у програмному середовищі GRAN-1.

Приклад 1.

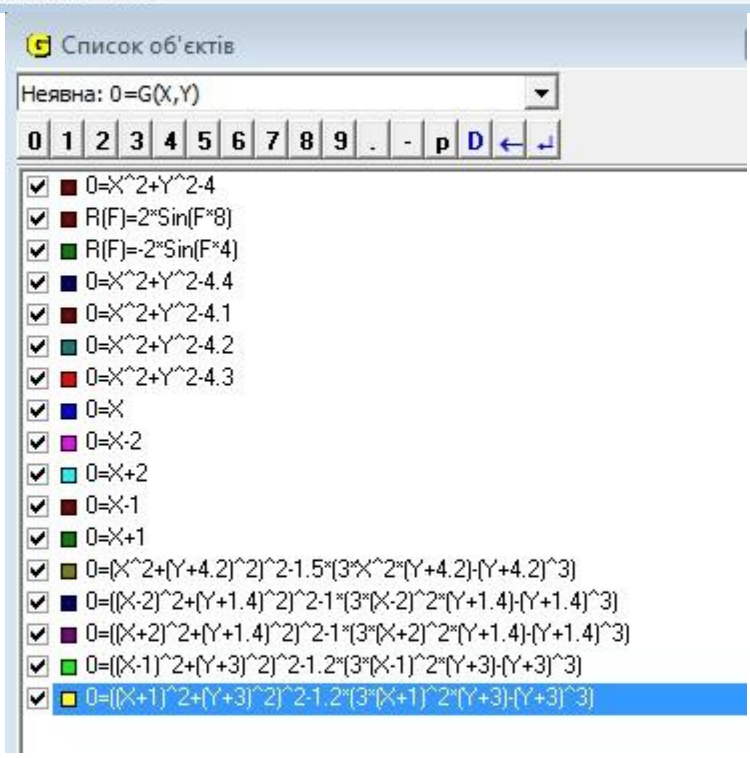


Список об'єктів
Неявна: 0=G(X,Y)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 . - p D
0=((X)^2+(Y)^2-0.16)^3+27*0.16*((X)^2)*((Y)^2)
0=(X^2)/3.5+(Y^2)/6.5-1
0=((X)^2+(Y-0.7)^2-0.16)^3+27*0.16*((X)^2)*((Y-0.7)^2)
0=((X)^2+(Y-1.4)^2-0.16)^3+27*0.16*((X)^2)*((Y-1.4)^2)
0=((X)^2+(Y-2.1)^2-0.16)^3+27*0.16*((X)^2)*((Y-2.1)^2)
0=((X)^2+(Y+2.1)^2-0.16)^3+27*0.16*((X)^2)*((Y+2.1)^2)
0=((X)^2+(Y+1.4)^2-0.16)^3+27*0.16*((X)^2)*((Y+1.4)^2)
0=((X)^2+(Y+0.7)^2-0.16)^3+27*0.16*((X)^2)*((Y+0.7)^2)
0=((X-0.7)^2+(Y)^2-0.16)^3+27*0.16*((X-0.7)^2)*((Y)^2)
0=((X+0.7)^2+(Y)^2-0.16)^3+27*0.16*((X+0.7)^2)*((Y)^2)
0=((X-1.4)^2+(Y)^2-0.16)^3+27*0.16*((X-1.4)^2)*((Y)^2)
0=((X+1.4)^2+(Y)^2-0.16)^3+27*0.16*((X+1.4)^2)*((Y)^2)
0=((X+0.7)^2+(Y-0.7)^2-0.16)^3+27*0.16*((X+0.7)^2)*((Y-0.7)^2)
0=((X+0.7)^2+(Y-1.4)^2-0.16)^3+27*0.16*((X+0.7)^2)*((Y-1.4)^2)
0=((X+0.7)^2+(Y-2.1)^2-0.16)^3+27*0.16*((X+0.7)^2)*((Y-2.1)^2)
0=((X+1.4)^2+(Y-0.7)^2-0.16)^3+27*0.16*((X+1.4)^2)*((Y-0.7)^2)
0=((X+1.4)^2+(Y-1.4)^2-0.16)^3+27*0.16*((X+1.4)^2)*((Y-1.4)^2)
0=((X+1.4)^2+(Y+1.4)^2-0.16)^3+27*0.16*((X+1.4)^2)*((Y+1.4)^2)
0=((X-1.4)^2+(Y-1.4)^2-0.16)^3+27*0.16*((X-1.4)^2)*((Y-1.4)^2)
0=((X-1.4)^2+(Y+1.4)^2-0.16)^3+27*0.16*((X-1.4)^2)*((Y+1.4)^2)
0=((X-0.7)^2+(Y-2.1)^2-0.16)^3+27*0.16*((X-0.7)^2)*((Y-2.1)^2)
0=((X-0.7)^2+(Y+2.1)^2-0.16)^3+27*0.16*((X-0.7)^2)*((Y+2.1)^2)
0=((X+0.7)^2+(Y+2.1)^2-0.16)^3+27*0.16*((X+0.7)^2)*((Y+2.1)^2)
0=((X-0.7)^2+(Y-0.7)^2-0.16)^3+27*0.16*((X-0.7)^2)*((Y-0.7)^2)
0=((X+0.7)^2+(Y+0.7)^2-0.16)^3+27*0.16*((X+0.7)^2)*((Y+0.7)^2)
0=((X-0.7)^2+(Y+0.7)^2-0.16)^3+27*0.16*((X-0.7)^2)*((Y+0.7)^2)
0=((X-0.7)^2+(Y-1.4)^2-0.16)^3+27*0.16*((X-0.7)^2)*((Y-1.4)^2)
0=((X+0.7)^2+(Y+1.4)^2-0.16)^3+27*0.16*((X+0.7)^2)*((Y+1.4)^2)
0=((X-0.7)^2+(Y+1.4)^2-0.16)^3+27*0.16*((X-0.7)^2)*((Y+1.4)^2)
0=((X-1.4)^2+(Y-0.7)^2-0.16)^3+27*0.16*((X-1.4)^2)*((Y-0.7)^2)
0=((X+1.4)^2+(Y+0.7)^2-0.16)^3+27*0.16*((X+1.4)^2)*((Y+0.7)^2)
0=((X-1.4)^2+(Y+0.7)^2-0.16)^3+27*0.16*((X-1.4)^2)*((Y+0.7)^2)
0=((X-1.5)^2+(Y-4.4)^2)^3-4*4*((X-1.5)^2)*((Y-4.4)^2)
0=(X^2+(Y-4.6)^2)^2-2.25*(3*(X^2)*(Y-4.6)-(Y-4.6)^3)
0=((X-2.3)^2+(-(Y-3.7))^2)^2-2.25*(3*((X-2.3)^2)*(-(Y-3.7))-(-(Y-3.7))^3)
Y(X)=X+3
0=((X+1.5)^2+(Y-4.4)^2)^3-4*4*((X+1.5)^2)*((Y-4.4)^2)
0=((X+2.3)^2+(-(Y-3.7))^2)^2-2.25*(3*((X+2.3)^2)*(-(Y-3.7))-(-(Y-3.7))^3)

Приклад 2.

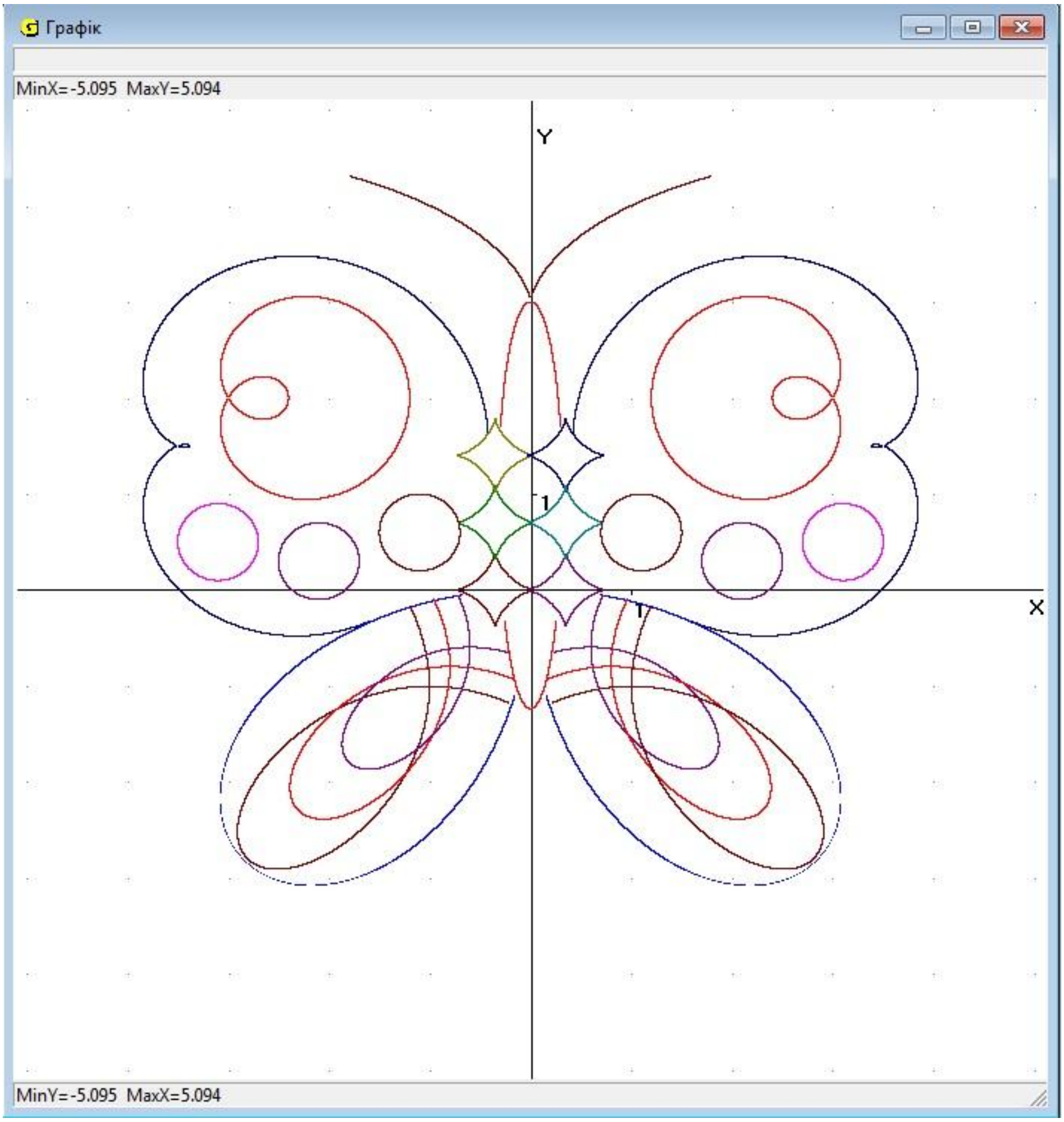


Графік
MinX=-5.103 MaxY=5.112
Y
1
1
X
MinY=-6.113 MaxX=5.102



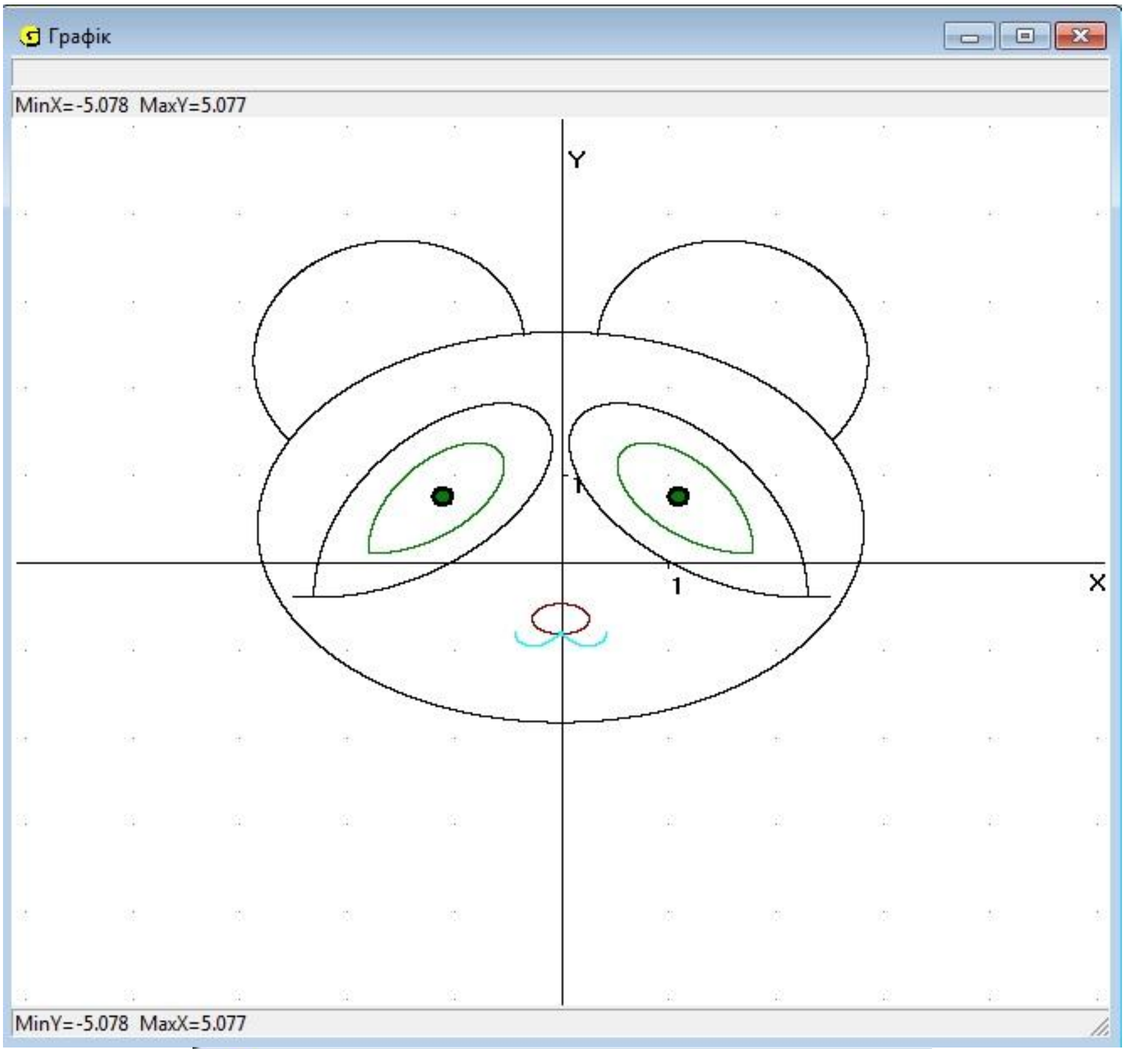
Список об'єктів
Неявна: 0=G(X,Y)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 . - p D
0=X^2+Y^2-4
R(F)=2*Sin(F*8)
R(F)=-2*Sin(F*4)
0=X^2+Y^2-4.4
0=X^2+Y^2-4.1
0=X^2+Y^2-4.2
0=X^2+Y^2-4.3
0=X
0=X-2
0=X+2
0=X-1
0=X+1
0=(X^2+(Y+4.2)^2)^2-1.5*(3*X^2*(Y+4.2)-(Y+4.2)^3)
0=((X-2)^2+(Y+1.4)^2)^2-1*(3*(X-2)^2*(Y+1.4)-(Y+1.4)^3)
0=((X+2)^2+(Y+1.4)^2)^2-1*(3*(X+2)^2*(Y+1.4)-(Y+1.4)^3)
0=((X-1)^2+(Y+3)^2)^2-1.2*(3*(X-1)^2*(Y+3)-(Y+3)^3)
0=((X+1)^2+(Y+3)^2)^2-1.2*(3*(X+1)^2*(Y+3)-(Y+3)^3)

Приклад 3.

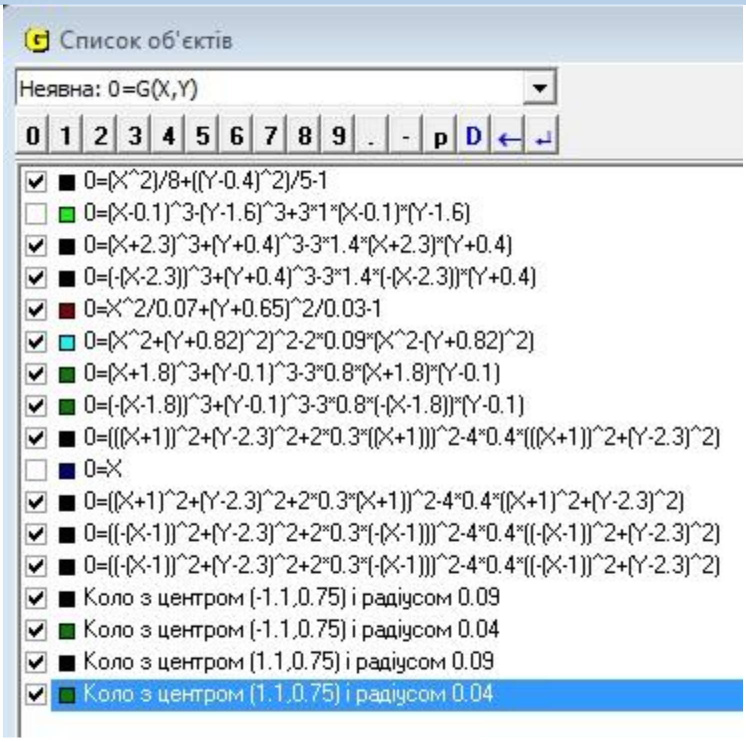



Список об'єктів
Неявна: 0=G(X,Y)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 . - p D
0=((X+0.35)^2+(Y)^2-0.16)^3+27*0.16*((X+0.35)^2)*((Y)^2)
0=((X+0.35)^2+(Y-0.7)^2-0.16)^3+27*0.16*((X+0.35)^2)*((Y-0.7)^2)
0=((X+0.35)^2+(Y-1.4)^2-0.16)^3+27*0.16*((X+0.35)^2)*((Y-1.4)^2)
0=((X-0.35)^2+(Y-1.4)^2-0.16)^3+27*0.16*((X-0.35)^2)*((Y-1.4)^2)
0=((X-0.35)^2+(Y)^2-0.16)^3+27*0.16*((X-0.35)^2)*((Y)^2)
0=((X-0.35)^2+(Y-0.7)^2-0.16)^3+27*0.16*((X-0.35)^2)*((Y-0.7)^2)
0=X^2/0.1+(Y-1)^2/5-1
0=X^2/0.1+(Y-1)^2/4-1
0=(X^2+(Y)^2)^3-4*16*X^2*(Y)^2
0=((X+3.5)^2+(Y-1.5)^2-2*0.8*(X+3.5))^2-2.2*((X+3.5)^2+(Y-1.5)^2)
0=((-(X-3.5))^2+(Y-1.5)^2-2*0.8*(-(X-3.5)))^2-2.2*((-(X-3.5))^2+(Y-1.5)^2
0=((Y-3)^3)/(2*1-(Y-3))-X^2
0=((X+3.5)^2+(Y-1.5)^2-2*0.8*(X+3.5))^2-2.2*((X+3.5)^2+(Y-1.5)^2)
0=((-(X-3.5))^2+(Y-1.5)^2-2*0.8*(-(X-3.5)))^2-2.2*((-(X-3.5))^2+(Y-1.5)^2
0=(X^2+(Y)^2)^3-4*16*X^2*(Y)^2
0=(X^2+(Y)^2)^3-4*16*X^2*(Y)^2
0=((X+3)^2+((Y-2))^2-2*0.6*(X+3))^2-0.36*((X+3)^2+(Y-2)^2)
0=((-(X-3))^2+((Y-2))^2-2*0.6*(-(X-3)))^2-0.36*((-(X-3))^2+(Y-2)^2)
0=(X+2.1)^2+(Y-0.3)^2-0.16
0=(X-2.1)^2+(Y-0.3)^2-0.16
0=(X+3.1)^2+(Y-0.5)^2-0.16
0=(X-3.1)^2+(Y-0.5)^2-0.16
0=(X+1.1)^2+(Y-0.6)^2-0.16
0=(X-1.1)^2+(Y-0.6)^2-0.16
0=(-(Y+1))^3+(-(X+1))^3-3*1.2*(Y+1)*(X+1)
0=(-(Y+0.8))^3+(-(X+0.8))^3-3*1*(Y+0.8)*(X+0.8)
0=(-(Y+0.6))^3+(-(X+0.6))^3-3*0.8*(Y+0.6)*(X+0.6)
0=(-(Y+0.6))^3+((X-0.6))^3+3*0.8*(Y+0.6)*(X-0.6)
0=(-(Y+0.8))^3+((X-0.8))^3+3*1*(Y+0.8)*(X-0.8)
0=(-(Y+1))^3+((X-1))^3+3*1.2*(Y+1)*(X-1)

Приклад 4.

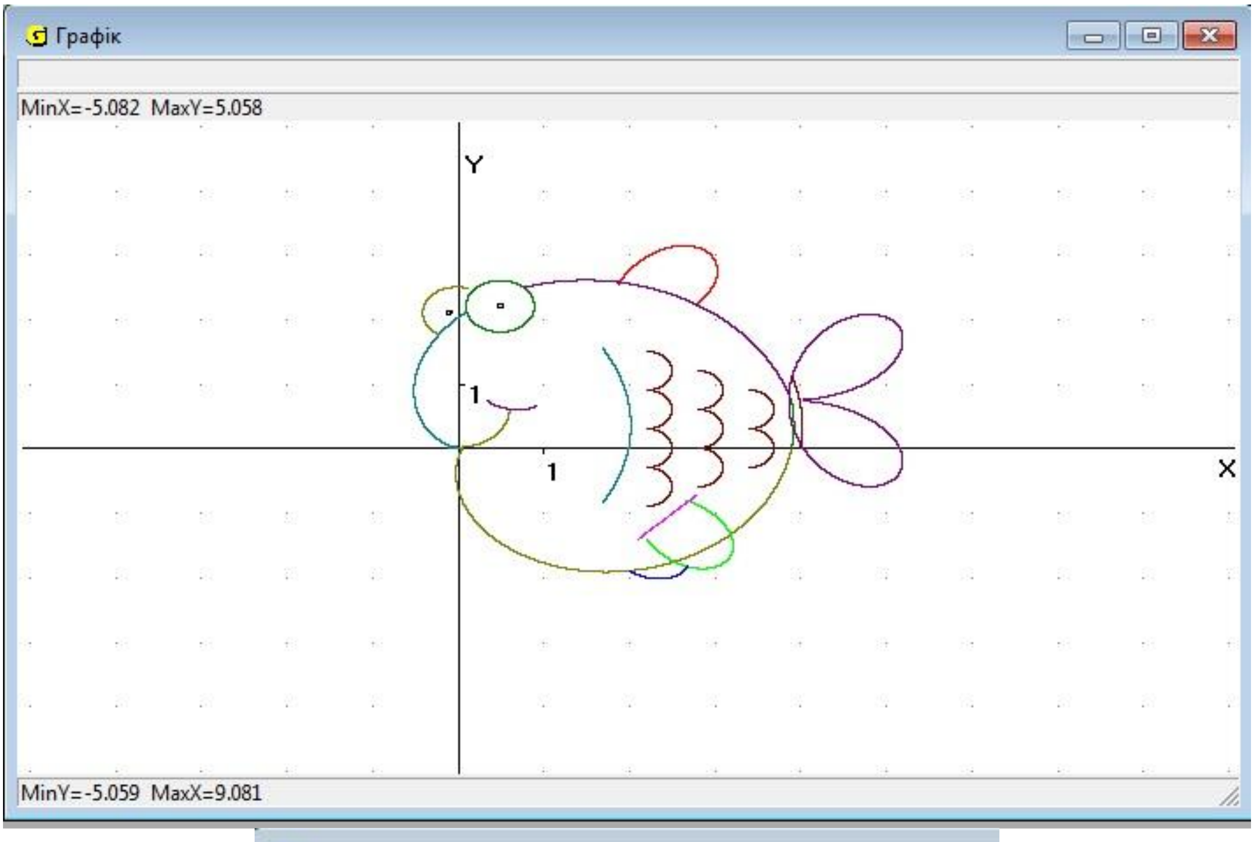


Графік
MinX=-5.078 MaxY=5.077
Y
1
1
X
MinY=-5.078 MaxX=5.077



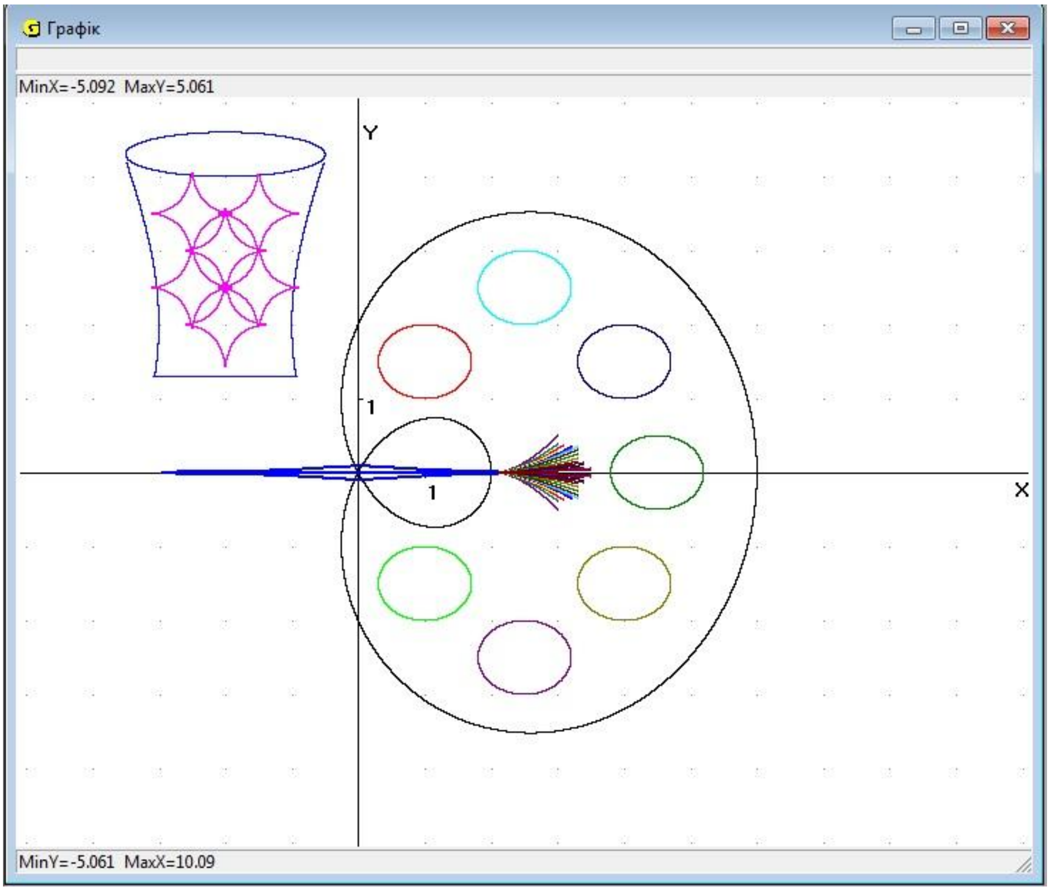
Список об'єктів
Неявна: 0=G(X,Y)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 . - p D
0=(X^2)/8+((Y-0.4)^2)/5-1
0=(X-0.1)^3-(Y-1.6)^3+3*1*(X-0.1)*(Y-1.6)
0=(X+2.3)^3+(Y+0.4)^3-3*1.4*(X+2.3)*(Y+0.4)
0=(-(X-2.3))^3+(Y+0.4)^3-3*1.4*(-(X-2.3))*(Y+0.4)
0=X^2/0.07+(Y+0.65)^2/0.03-1
0=(X^2+(Y+0.82)^2)^2-2*0.09*(X^2-(Y+0.82)^2)
0=(X+1.8)^3+(Y-0.1)^3-3*0.8*(X+1.8)*(Y-0.1)
0=(-(X-1.8))^3+(Y-0.1)^3-3*0.8*(-(X-1.8))*(Y-0.1)
0=(((X+1))^2+(Y-2.3)^2+2*0.3*((X+1)))^2-4*0.4*(((X+1))^2+(Y-2.3)^2)
0=X
0=((X+1)^2+(Y-2.3)^2+2*0.3*(X+1))^2-4*0.4*((X+1)^2+(Y-2.3)^2)
0=((-(X-1))^2+(Y-2.3)^2+2*0.3*(-(X-1)))^2-4*0.4*((-(X-1))^2+(Y-2.3)^2)
0=((-(X-1))^2+(Y-2.3)^2+2*0.3*(-(X-1)))^2-4*0.4*((-(X-1))^2+(Y-2.3)^2)
Коло з центром (-1.1,0.75) і радіусом 0.09
Коло з центром (-1.1,0.75) і радіусом 0.04
Коло з центром (1.1,0.75) і радіусом 0.09
Коло з центром (1.1,0.75) і радіусом 0.04

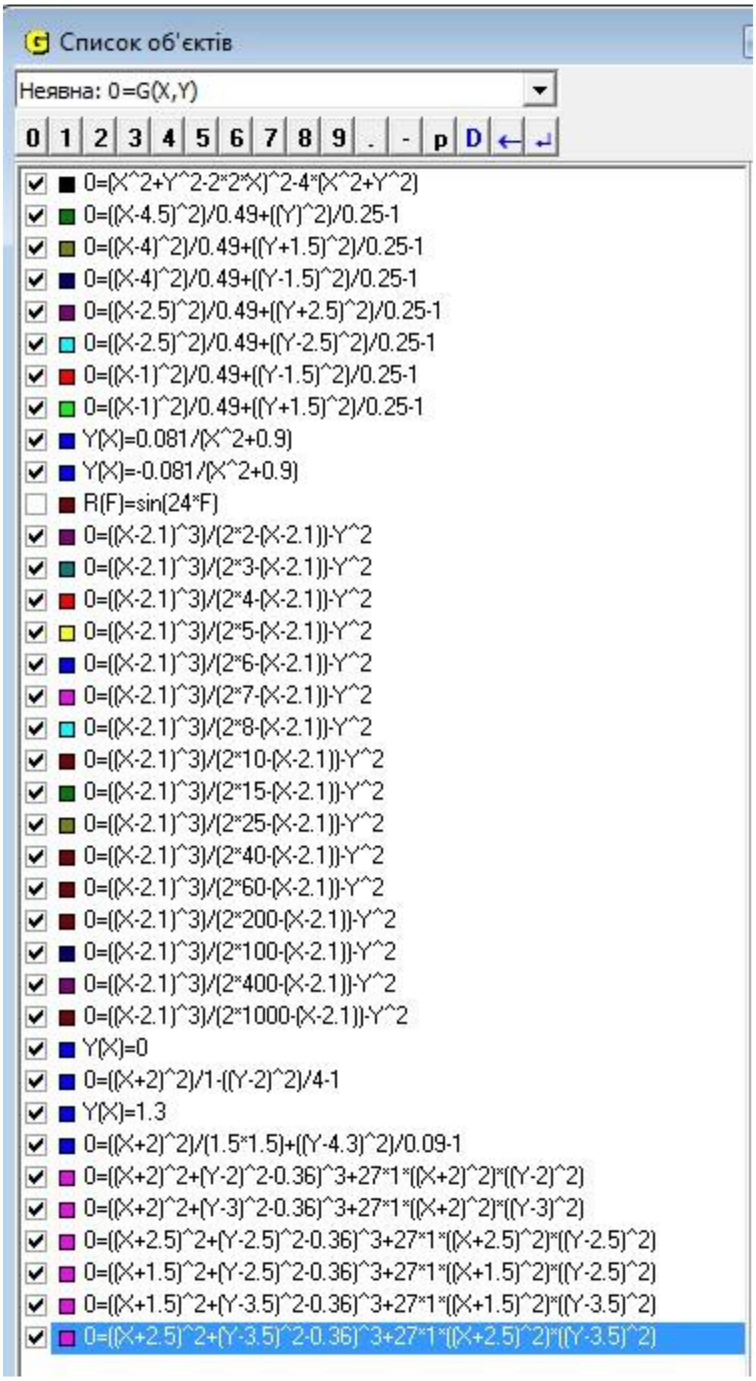
Приклад 5.


Графік
MinX=-5.082 MaxY=5.058
Y
1
1
X
MinY=-5.059 MaxX=9.081

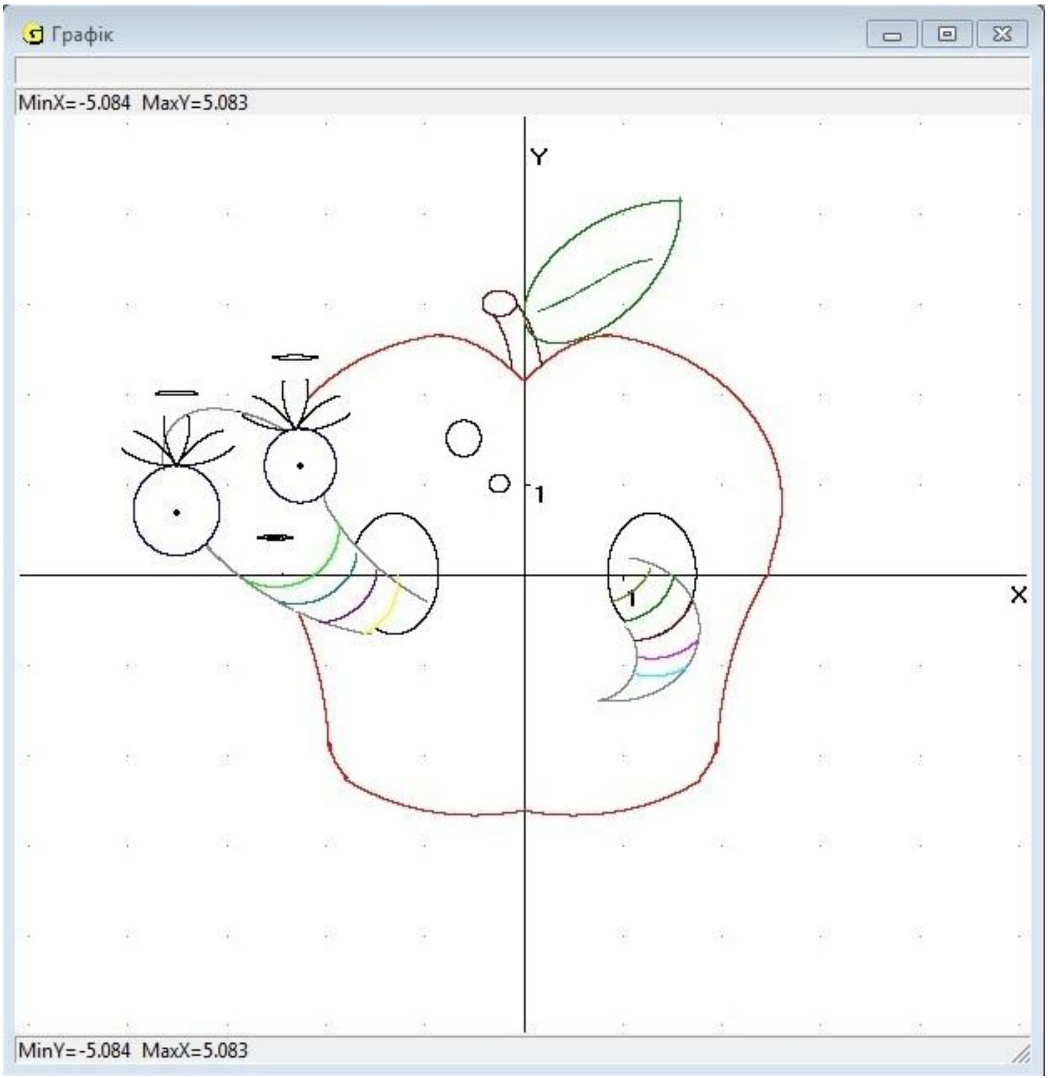

Список об'єктів
Неявна: 0=G(X,Y)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 . - p D
0=(X^2+Y^2-2*1*X)^2-4*(X^2+Y^2)
0=((X-0.4)^2+(Y-0.35)^2-2*0.9*(X-0.4))^2-3*((X-0.4)^2+(Y-0.35)^2)
0=((X-3.87)^2+(Y-0.74)^2)^3-4*3*(X-3.87)^2*(Y-0.74)^2
0=((X+1.5)^2+(Y-0.35)^2-2*0.9*(X+1.5))^2-3*((X+1.5)^2+(Y-0.35)^2)
0=((X-1.7)^2+(Y-1.8)^2)^3-4*3*(X-1.7)^2*(Y-1.8)^2
0=((X-2)^2+(Y+0.65)^2)^3-4*2.5*(X-2)^2*(Y+0.65)^2
0=((X-1.5)^2+(Y+0.8)^2)^3-4*2.5*(X-1.5)^2*(Y+0.8)^2
Y(X)=X-3.5
0=((X-0.5)^2+(Y-0.35)^2-2*0.9*(X-0.5))^2-3*((X-0.5)^2+(Y-0.35)^2)
0=(X-0.5)^2+(Y-2.2)^2-0.16
0=(X-0)^2+(Y-2.1)^2-0.16
0=(X^2+Y^2-2*1*X)^2-4*(X^2+Y^2)
0=((X-0.4)^2+(Y-0.35)^2-2*0.9*(X-0.4))^2-3*((X-0.4)^2+(Y-0.35)^2)
0=(X-0)^2+(Y-0.6)^2-0.36
0=(X-0.7)^2+(Y-1.1)^2-0.25
0=(X-0.5)^2+(Y-2.2)^2-0.001
0=(X+0.1)^2+(Y-2.1)^2-0.001
0=(X-3.4)^2+(Y-0.6)^2-0.09
0=(X-3.4)^2+(Y-0)^2-0.09
0=(X-2.8)^2+(Y-0.3)^2-0.09
0=(X-2.2)^2+(Y-0.6)^2-0.09
0=(X-2.2)^2+(Y-0)^2-0.09
0=(X-2.2)^2+(Y+0.6)^2-0.09
0=(X-2.2)^2+(Y-1.2)^2-0.09
0=(X-2.8)^2+(Y-0.9)^2-0.09
0=(X-2.8)^2+(Y+0.3)^2-0.09

Приклад 6.



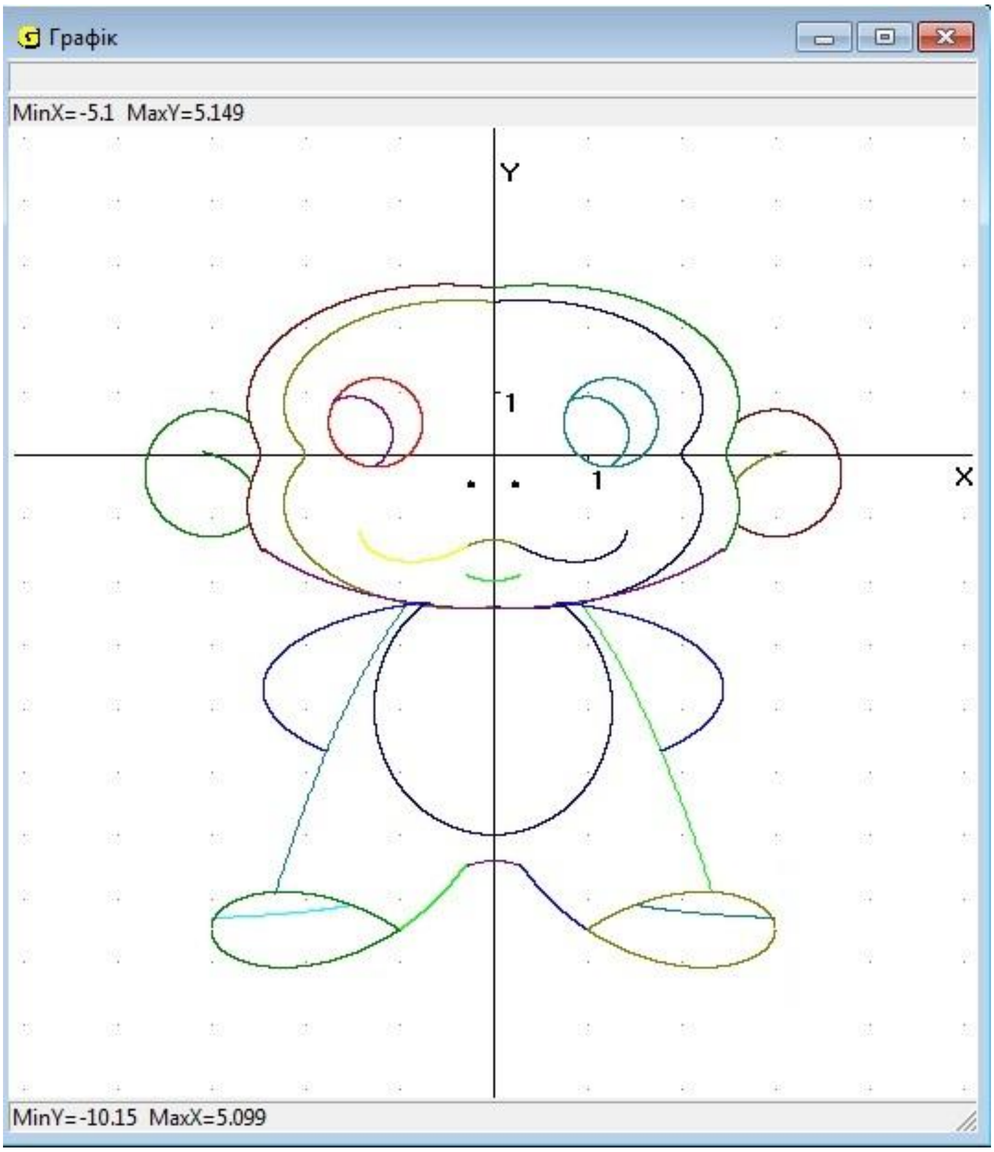

Список об'єктів
Неявна: 0=G(X,Y)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 . - p D
0=(X^2+Y^2-2*2*X)^2-4*(X^2+Y^2)
0=((X-4.5)^2)/0.49+((Y)^2)/0.25-1
0=((X-4)^2)/0.49+((Y+1.5)^2)/0.25-1
0=((X-4)^2)/0.49+((Y-1.5)^2)/0.25-1
0=((X-2.5)^2)/0.49+((Y+2.5)^2)/0.25-1
0=((X-2.5)^2)/0.49+((Y-2.5)^2)/0.25-1
0=((X-1)^2)/0.49+((Y-1.5)^2)/0.25-1
0=((X-1)^2)/0.49+((Y+1.5)^2)/0.25-1
Y(X)=0.081/(X^2+0.9)
Y(X)=-0.081/(X^2+0.9)
R(F)=sin(24*F)
0=((X-2.1)^3)/(2*2-(X-2.1))-Y^2
0=((X-2.1)^3)/(2*3-(X-2.1))-Y^2
0=((X-2.1)^3)/(2*4-(X-2.1))-Y^2
0=((X-2.1)^3)/(2*5-(X-2.1))-Y^2
0=((X-2.1)^3)/(2*6-(X-2.1))-Y^2
0=((X-2.1)^3)/(2*7-(X-2.1))-Y^2
0=((X-2.1)^3)/(2*8-(X-2.1))-Y^2
0=((X-2.1)^3)/(2*10-(X-2.1))-Y^2
0=((X-2.1)^3)/(2*15-(X-2.1))-Y^2
0=((X-2.1)^3)/(2*25-(X-2.1))-Y^2
0=((X-2.1)^3)/(2*40-(X-2.1))-Y^2
0=((X-2.1)^3)/(2*60-(X-2.1))-Y^2
0=((X-2.1)^3)/(2*200-(X-2.1))-Y^2
0=((X-2.1)^3)/(2*100-(X-2.1))-Y^2
0=((X-2.1)^3)/(2*400-(X-2.1))-Y^2
0=((X-2.1)^3)/(2*1000-(X-2.1))-Y^2
Y(X)=0
0=((X+2)^2)/1-((Y-2)^2)/4-1
Y(X)=1.3
0=((X+2)^2)/(1.5*1.5)+((Y-4.3)^2)/0.09-1
0=((X+2)^2+(Y-2)^2-0.36)^3+27*1*((X+2)^2)*((Y-2)^2)
0=((X+2)^2+(Y-3)^2-0.36)^3+27*1*((X+2)^2)*((Y-3)^2)
0=((X+2.5)^2+(Y-2.5)^2-0.36)^3+27*1*((X+2.5)^2)*((Y-2.5)^2)
0=((X+1.5)^2+(Y-2.5)^2-0.36)^3+27*1*((X+1.5)^2)*((Y-2.5)^2)
0=((X+1.5)^2+(Y-3.5)^2-0.36)^3+27*1*((X+1.5)^2)*((Y-3.5)^2)
0=((X+2.5)^2+(Y-3.5)^2-0.36)^3+27*1*((X+2.5)^2)*((Y-3.5)^2)

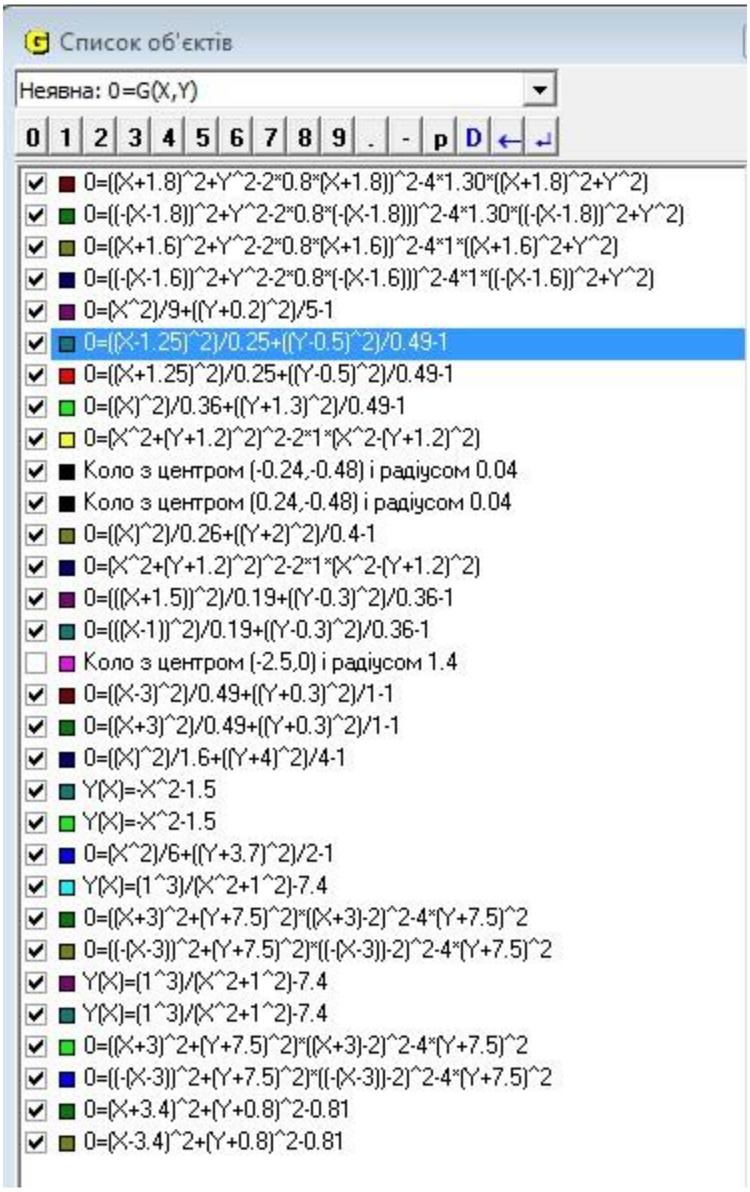
Приклад 7.




Список об'єктів
Неявна: 0=G(X,Y)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 . - p D
0=((-(X-1.8))^2+Y^2-2*0.8*(-(X-1.8)))^2-4*1.30*((-(X-1.8))^2+Y^2)
0=(((X+1.8))^2+Y^2-2*0.8*((X+1.8)))^2-4*1.30*(((X+1.8))^2+Y^2)
0=((X+4.43)^2)/6.1+((Y+2.1)^2)/12-1
0=(((X+1.8))^2+Y^2-2*0.8*((X+1.8)))^2-4*1.30*(((X+1.8))^2+Y^2)
0=((-(X-1.8))^2+Y^2-2*0.8*(-(X-1.8)))^2-4*1.30*((-(X-1.8))^2+Y^2)
0=((X-4.43)^2)/6.1+((Y+2.1)^2)/12-1
0=(X^2+(Y-2.15)^2)^2-2*1*(X^2-(Y-2.15)^2)
0=((X+1.1)^2)/1+((Y-2.1)^2)/1.8-1
0=((X+0.8)^2)/1+((Y-2.1)^2)/1.8-1
0=((X+0.24)^2)/0.03+((Y-3)^2)/0.02-1
0=(-(X-1.6))^3+(-(Y-4.15))^3-3*1*(X-1.6)*(Y-4.15)
0=(-(X-1.7))^3+(-(Y-3.6))^3-3*1*(X-1.7)*(Y-3.6)
0=((X+1.3)^2)/0.2+((Y+0)^2)/0.45-1
0=((X-1.3)^2)/0.2+((Y+0)^2)/0.45-1
0=((X+0.24)^2)/0.01+((Y-1)^2)/0.01-1
0=((X+0.6)^2)/0.03+((Y-1.5)^2)/0.04-1
0=((X+0)^2)/3.8+((Y+1.85)^2)/1-1
0=((X+1.1))^3+(-(Y+0.7))^3-3*1.6*(X+1.1)*(Y+0.7)
0=((X-0.4))^3+(-(Y+0.7))^3-3*1.6*(X-0.4)*(Y+0.7)
0=((X+3)^2)/1+((Y-0.7)^2)/1.2-1
0=((X+1.1))^3+(-(Y+0.7))^3-3*1.6*(X+1.1)*(Y+0.7)
0=((X+3.5)^2)/0.19+((Y-0.7)^2)/0.25-1
0=((X+2.25)^2)/0.13+((Y-1.2)^2)/0.17-1
0=((X+2.5)^2)/0.03+((Y-0.4)^2)/0.0005-1
0=((X+0.5)^2+(Y+0.6)^2)^2-2*2.6*((X+0.5)^2-(Y+0.6)^2)
0=((X-0.7)^2)/0.2+((Y+0.9)^2)/0.25-1
Y(X)=1/((X-1.3)^2+1)+2.5
0=((X+3.5)^2+(Y-1.2)^2)^3-4*0.5*((X+3.5)^2)*((Y-1.2)^2)
0=((X+2.3)^2+(Y-1.6)^2)^3-4*0.5*((X+2.3)^2)*((Y-1.6)^2)
0=((X+3.5)^2+(Y-1.2)^2)^2-0.7*(3*((X+3.5)^2)*(Y-1.2)-(Y-1.2)^3)
0=((X+3.5)^2+(-(Y-1.2))^2)^2-0.7*(3*((X+3.5)^2)*(-(Y-1.2))-(-(Y-1.2))^3)
0=((X+2.3)^2+(Y-1.6)^2)^2-0.7*(3*((X+2.3)^2)*(Y-1.6)-(Y-1.6)^3)
0=((X+2.3)^2+(-(Y-1.6))^2)^2-0.7*(3*((X+2.3)^2)*(-(Y-1.6))-(-(Y-1.6))^3)
0=((X+2.3)^2)/0.05+((Y-2.4)^2)/0.0005-1
0=((X+3.5)^2)/0.05+((Y-2)^2)/0.0005-1
0=((X+2.1)^2)/0.4+((Y-0.1)^2)/0.4-1
0=((X+2.3)^2)/0.4+((Y-0.3)^2)/0.4-1
0=((X+2.5)^2)/0.4+((Y-0.5)^2)/0.4-1
0=((X+1.9)^2)/0.4+((Y+0.1)^2)/0.4-1
0=((X-1.3)^2)/0.4+((Y+0.3)^2)/0.4-1
0=((X-1.3)^2)/0.4+((Y+0.5)^2)/0.4-1
0=((X-1.1)^2)/0.4+((Y+0.1)^2)/0.4-1
0=((X-0.9)^2)/0.4+((Y-0.1)^2)/0.4-1
0=((X-0.7)^2)/0.4+((Y-0.3)^2)/0.4-1

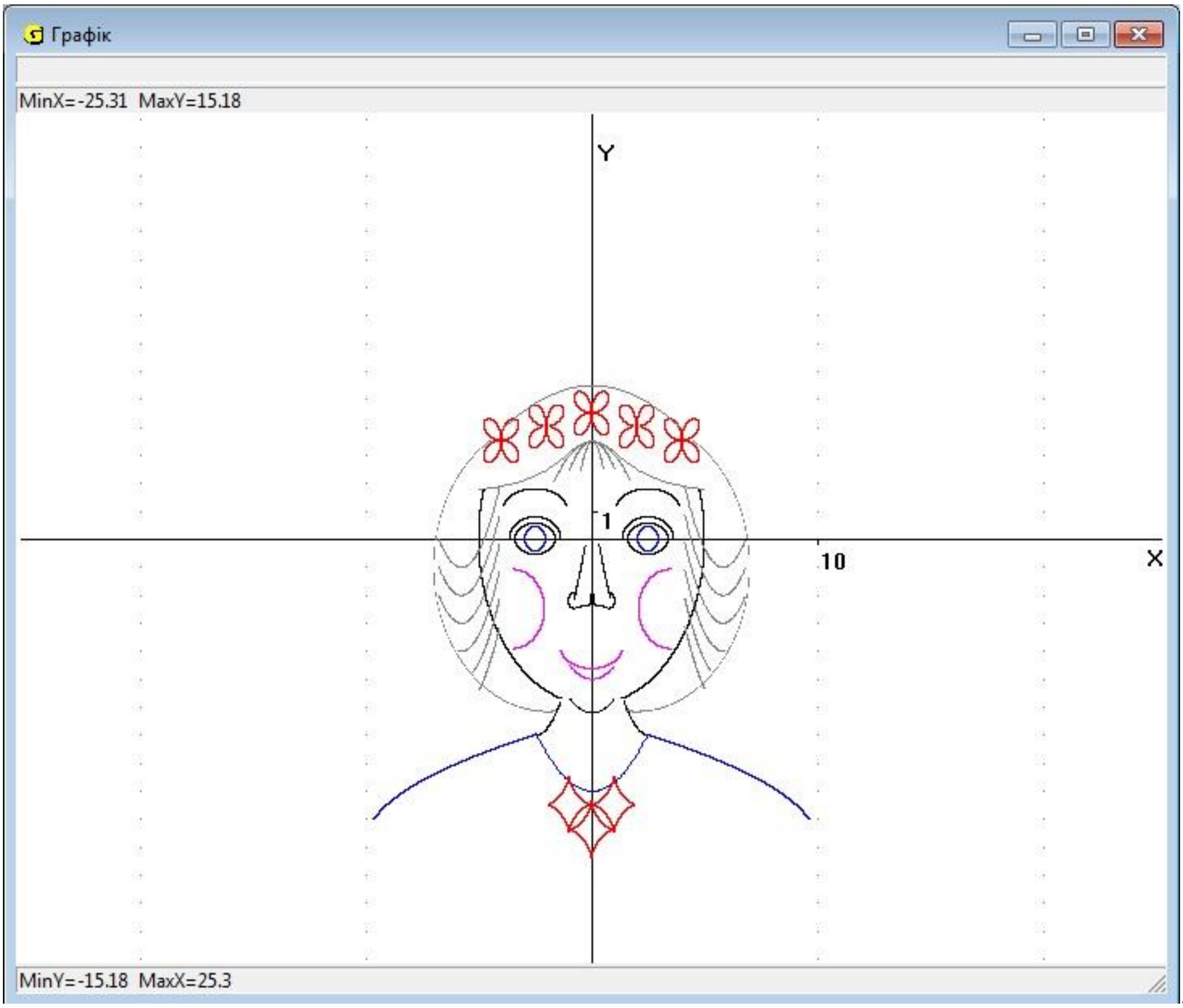
Приклад 8.





Список об'єктів
Неявна: 0=G(X,Y)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 . - p D
0=((X+1.8)^2+Y^2-2*0.8*(X+1.8))^2-4*1.30*((X+1.8)^2+Y^2)
0=((-(X-1.8))^2+Y^2-2*0.8*(-(X-1.8)))^2-4*1.30*((-(X-1.8))^2+Y^2)
0=((X+1.6)^2+Y^2-2*0.8*(X+1.6))^2-4*1*((X+1.6)^2+Y^2)
0=((-(X-1.6))^2+Y^2-2*0.8*(-(X-1.6)))^2-4*1*((-(X-1.6))^2+Y^2)
0=(X^2)/9+((Y+0.2)^2)/5-1
0=((X-1.25)^2)/0.25+((Y-0.5)^2)/0.49-1
0=((X+1.25)^2)/0.25+((Y-0.5)^2)/0.49-1
0=((X)^2)/0.36+((Y+1.3)^2)/0.49-1
0=(X^2+(Y+1.2)^2)^2-2*1*(X^2-(Y+1.2)^2)
Коло з центром (-0.24,-0.48) і радіусом 0.04
Коло з центром (0.24,-0.48) і радіусом 0.04
0=((X)^2)/0.26+((Y+2)^2)/0.4-1
0=(X^2+(Y+1.2)^2)^2-2*1*(X^2-(Y+1.2)^2)
0=(((X+1.5))^2)/0.19+((Y-0.3)^2)/0.36-1
0=(((X-1))^2)/0.19+((Y-0.3)^2)/0.36-1
Коло з центром (-2.5,0) і радіусом 1.4
0=((X-3)^2)/0.49+((Y+0.3)^2)/1-1
0=((X+3)^2)/0.49+((Y+0.3)^2)/1-1
0=((X)^2)/1.6+((Y+4)^2)/4-1
Y(X)=-X^2-1.5
Y(X)=-X^2-1.5
0=(X^2)/6+((Y+3.7)^2)/2-1
Y(X)=(1^3)/(X^2+1^2)-7.4
0=((X+3)^2+(Y+7.5)^2)*((X+3)-2)^2-4*(Y+7.5)^2
0=((-(X-3))^2+(Y+7.5)^2)*((-(X-3))-2)^2-4*(Y+7.5)^2
Y(X)=(1^3)/(X^2+1^2)-7.4
Y(X)=(1^3)/(X^2+1^2)-7.4
0=((X+3)^2+(Y+7.5)^2)*((X+3)-2)^2-4*(Y+7.5)^2
0=((-(X-3))^2+(Y+7.5)^2)*((-(X-3))-2)^2-4*(Y+7.5)^2
0=(X+3.4)^2+(Y+0.8)^2-0.81
0=(X-3.4)^2+(Y+0.8)^2-0.81

Приклад 9.



.

Список об'єктів
Неявна: 0=G(X,Y)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 . - p D
0=((X-4)^2+(Y-3.5)^2)^3-4*((X-4)^2)*((Y-3.5)^2)
0=((X)^2+(Y-4.5)^2)^3-4*((X)^2)*((Y-4.5)^2)
0=((X-2)^2+(Y-4)^2)^3-4*((X-2)^2)*((Y-4)^2)
0=((X+4)^2+(Y-3.5)^2)^3-4*((X+4)^2)*((Y-3.5)^2)
0=((X+2)^2+(Y-4)^2)^3-4*((X+2)^2)*((Y-4)^2)
Y(X)=8/(X^2+4)+1.5
0=(X^2)/25+(Y^2)/35-1
Y(X)=(1/2)*X^2-6.2
Y(X)=(X-2.5)^2-7
Y(X)=(X+2.5)^2-7
Y(X)=(1/3)*X^2-9
Y(X)=(1/2)*X^2-5
0=((X-2.5)^2)/1.3+(Y^2)/0.6-1
0=((X+2.5)^2)/1.3+(Y^2)/0.6-1
0=((X)^2)/2+((Y+3.8)^2)/0.7-1
0=((X-3.5)^2)/2+((Y+2.5)^2)/2-1
0=((X+3.5)^2)/2+((Y+2.5)^2)/2-1
Y(X)=(X+2.5)^2-5
0=((X+2.5)^2)/0.8+(Y^2)/0.3-1
0=((X-2.5)^2)/0.8+(Y^2)/0.3-1
0=((X-2.5)^2)/0.2+(Y^2)/0.2-1
0=((X+2.5)^2)/0.2+(Y^2)/0.2-1
0=2*(X+10)-(Y+10.9)^2
0=-2*(X-10)-(Y+10.9)^2
0=((X-2.5)^2)/2+((Y-1)^2)/0.6-1
0=((X+2.5)^2)/2+((Y-1)^2)/0.6-1
Y(X)=(X+5.8)^2-1
0=(X^2+(Y+10.4)^2-1)^3+27*1*(X^2)*((Y+10.4)^2)
0=((X+1)^2+(Y+9.5)^2-1)^3+27*1*((X+1)^2)*((Y+9.5)^2)
0=((X-1)^2+(Y+9.5)^2-1)^3+27*1*((X-1)^2)*((Y+9.5)^2)
Y(X)=(X-2.5)^2-5
Y(X)=(0.001)/(X^2+0.001)-2.4
Коло з центром (-0.7401,-2.2) і радіусом 0.3
0=(X+0.71)^2+(Y+2.2)^2-0.09
0=(X-0.71)^2+(Y+2.2)^2-0.09
Y(X)=-(X)^2+3.5
Y(X)=-(2*X)^2+3.5
Y(X)=-(0.7*X)^2+3.5
Y(X)=(X+5.8)^2-2
Y(X)=(X+5.8)^2-3
Y(X)=(X+5.8)^2-4
Y(X)=(X+5.8)^2-5
Y(X)=(X+5.8)^2-6
Y(X)=-0.1*X^2+5.5
0=((X-1)^2+(Y+1)^2+2*2*(X-1))^2-4*4*((X-1)^2+(Y+1)^2)
0=((X+1)^2+(Y+1)^2-2*2*(X+1))^2-4*4*((X+1)^2+(Y+1)^2)
Y(X)=(X-5.8)^2-6
Y(X)=(X-5.8)^2-5
Y(X)=(X-5.8)^2-4
Y(X)=(X-5.8)^2-3
Y(X)=(X-5.8)^2-2
Y(X)=(X-5.8)^2-1

Висновки

У дипломній роботі здійснено огляд науково-методичної, психолого-педагогічної і навчальної літератури, в якій розкриваються основні погляди на структуру комп’ютерно-орієнтованої методичної системи навчання математики, розглянуто основні засади використання ІКТ у математиці; подано теоретичний матеріал щодо деякий алгебраїчних кривих: особливості їх форми, основні властивості, спосіб побудови, історична довідка; зосереджена увага на практичному застосуванні графічних образів алгебраїчний кривих до створення графічних етюдів за допомогою ІКТ.

У роботі розглядається особливий різновид комп’ютерного моделювання (ейдографіка), що являє собою особливу техніку малювання графіками явно і неявно заданих залежностей між змінними у певному програмному середовищі. Для написання дипломної роботи була використана достатня кількість наукової методичної літератури та матеріали періодичних видань, було проведене ознайомлення з теоретичними відомостями та оволодіння практичними навичками роботи з ППЗ GRAN-1.

Матеріали дипломної роботи мають практичне застосування для роботи у процесі навчання математики на факультативних заняттях з учнями і під час фахової підготовки майбутніх учителів математики. Подані зразки використання ейдографіки до алгебраїчних кривих не тільки підсилюють гуманітарну складову математичної освіти, але й утверджують погляд на математику як мистецтво. Ейдографіка дозволяє ефективно організовувати увагу, оптимізувати пам'ять у процесі активного мислення, розвинути образну увагу.

Список використаних джерел та літератури

1. Андреев В. И. Диалектика воспитания и самовоспитания творческой личности / В. И. Андреев. - Казань : Изд-во Казанского ун-та, 1988. – 238 с.
2. Белоусова В.П. Аналітична геометрія / В.П. Белоусова, І.Г Ільїн., О.П. Сергунова, В.М. Котлова. – «Вища школа», 1973. – 328с.
3. Вембер В. П. Навчально-методичні вимоги до електронного підручника / В. П. Вембер // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання : зб. наукових праць / Редрада. - К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2006. -№4 (11).- С. 50-56.
4. Вінниченко Є. Ф. Розв'язування задач на ГМТ з використанням моделюючих програмних засобів / Вінниченко Є. Ф. // Математика в школі. – 2003. - № 4. – С. 13-16.
5. Гриньов Б.В. Аналітична геометрія: підруч. для вищих техн. навч. закладів / Б.В. Гриньов, І.К. Кириченко.–Харків, 2008. – 340с.
6. Дементієвська Н. П. Як можна комп'ютерні технології використати для розвитку учнів та вчителів? / Н. П. Дементієвська, Н. В. Морзе // Актуальні проблеми психології : Психологічна теорія і технологія навчання / За ред. С. Д. Максименка, М. Л. Смульсон. - К. : Мілені-ум, 2005. - Т. 8, вип. 1. – С. 23-38.
7. Ермаков Д.С. Создание элективных учебных курсов для профильного обучения / Д.С. Ермаков, Г.Д. Петрова . – Школьные технологии.– 2003.– № 6.– С. 22-29.
8. Жалдак М. І. Комп'ютерно-орієнтовані засоби навчання математики, фізики, інформатики : [посібник для вчителів] / М. І. Жалдак, В. В. Латиський, М. І. Шут. - К. : Дініт, 2004. - 110 с.
9. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики : посібник для вчителів / М. І. Жалдак. - К. : Техніка, 1997. - 304 с.
10. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках геометрії : посібник [для вчителів] / М. І. Жалдак, О. В. Вітюк. - К. : Дініт, 2003. - 168 с.

11. Жалдак М. И. Математика с компьютером : пособие [для учителей] / М. И. Жалдак, Ю. В. Горошко, Е. Ф. Винниченко. - К. : Динит, 2004.-251 с.

12. Капіносов А. М. Тематичне поетапне рівневе вивчення математики в основній школі / А. М. Капіносов. - Кривий Ріг : Видавничий дім, 2005.-112 с.

13. Клетенник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980. –240 с.

14. Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп'ютером: навч. посіб. / Т. Г. Крамаренко; за ред. М. І. Жалдака. - Кривий Ріг : Видавн. дім, 2008. - 272 с.

15. Маркушевич А.И. Замечательные кривые / А.И. Маркушевич.– М.: Наука, 1978. – 32 с.

16. Морзе Н. В. Intel. Навчання для майбутнього [адаптація до укр. видання] / Н. В. Морзе, Н. П. Дементієвська. - К. : Видавнича група BHV,2004.-416с.

17. Морзе Н. В. Методика навчання інформатики. Ч. 2. Методика навчання інформаційних технологій / Н. В. Морзе. — К. : Навчальна книга, 2003.-288с.

18. Параскевнч С. П. Ейдографіка як засіб розвитку креативності май-бутніх учителів математики / С. П. Параскевнч // Кривий Ріг: Видави. відділ НМетАУ, 2008. - Т. 1: Теорія та методика навчання математики. - С. 67-71.

19. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика / М-во освіти і науки України, управл. змісту освіти, науково-метод. центр середи, освіти [Електронний ресурс] / [2008]. - Режим доступу:

20. http://www.mon.gov.ua/main.php?query=education/average/progl2

21. Програма спеціального курсу «Навчальні дослідження та їх підтримка засобами ІКТ у курсі математики загальноосвітніх навчальних закладів» / [М. І. Жалдак, В. Ю. Биков, Ю. О. Жук та ін.] // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : зб. наук. праць. -

Винуск VI: в 3-х томах. - Кривий Ріг: Видавн. відділ Нме-тАУ, 2006. — Т. 1: Теорія та методика навчання математики. - С. 4-20.
22. Раков С. А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій : дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.02 / С.А. Раков. - К., 2005. - 503 с.
23. Савелов А.А. Плоские кривые.- М.: Физматгиз, 1960- 294 с.
24. Смирнова-Трибульська Є. М. Інформаційно-комунікаційні технології в професійній діяльності вчителя : посібник [для вчителів] / Є. М. Смирнова-Трибульска. - Херсон: Айлант, 2007. - 560 с.
25. Степанов О. М. Основи психології і педагогіки : посібник / О. М. Степанов, М. М. Фіцула. - К. : Академвидав, 2003. - 504 с.
26. Тополя Л. В. Математичні відкриття у процесі дидактичних ігор з комп'ютерною підтримкою / Л. В. Тополя // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання : зб. наук, праць, вип. 5. - 2002. — С. 110-118.
27. Трнус Ю. В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математики : [монографія] / Ю. В. Трнус. - Черкаси: Брама-Україна, 2005.- 400с.