Міжнародний збірник наукових робіт
Международный сборник научных работ

ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ: проблеми і дослідження

ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ: проблемы и исследования

Випуск 40

Засновники:

Донецький національний університет

Інститут педагогіки Національної академії педагогічних наук України

Національний педагогічний університет ім. М.П.Драгоманова

Донецьк: ДонНУ, 2013

УДК 51(07)+53(07)
ББК В1 р
Д44

Збірник заснований професором Юрієм Олександровичем Палантом у 1993 році.

Постановою Президії ВАК України від 10.11.99 № 3-05/11 затверджено перелік № 3 наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук. До розділу «Педагогічні науки» включено наш збірник наукових робіт «Дидактика математики: проблеми і дослідження» (Бюлетень ВАК України, 1999, № 6), який є продовженням видання «Евристика та дидактика точних наук» міжнародного збірника наукових робіт. Нумерація випусків продовжується.

Рекомендовано до друку Вченою радою Донецького національного університету 22.11.2013 (протокол № 2)

Д44 **Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнародний збірник наукових робіт** / редкол.: О. І. Скафа (наук. ред.) та ін.; Донецький нац. ун-т; Інститут педагогіки Акад. пед. наук України; Національний пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. – Донецьк, 2013. – Вип. 40. – 288 с.

ISSN 2079-9152

Викладено нові підходи до деяких питань методики навчання математики. Роботи присвячено використанню евристичних методів навчання, стимулюванню творчої діяльності учнів та студентів.

Изложены новые подходы к некоторым вопросам методики обучения математике. Работы посвящены использованию эвристических методов обучения, стимулированию творческой деятельности учащихся и студентов.

Свідоцтво про державну реєстрацію
КВ № 15209-3781Р від 30.04.2009

УДК 51(07)+53(07)
ББК В1 р

International Collection of Scientific Works

DIDACTICS of MATHEMATICS: Problems and Investigations

Issue # 40

Founders:

Donetsk National University, Ukraine

Pedagogical Institute of the National Academy of Pedagogical Sciences of Ukraine

Dragomanov National Pedagogical University, Kiev, Ukraine

Donetsk, DonNU, 2013

UDK 51(07)+53(07)
BBK B1 p
Д44

A periodic semiannual edition founded by Professor Yurii Palant in 1993.

Recommended for publication by Scientific Council of Donetsk National University on 22.11.2013 (minutes # 2)

Д44 **Didactics of mathematics: Problems and Investigations: International Collection of Scientific Works.** – Issue # 40. – Donetsk: DonNU, 2013. – 288 p.

ISSN 2079-9152

New approaches to some methods of training mathematics problems are described. The publications concern the use of heuristic methods in teaching sciences, stimulation of creative activity of students in the field of constructing and solving problems.

State registration
КВ № 15209-3781P dated 30.04.2009

UDK 51(07)+53(07)
BBK B1 p

ЗМІСТ

НАУКОВІ ЗАСАДИ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНЬОГО ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИЧНА НАУКА – ВЧИТЕЛЮ МАТЕМАТИКИ

Редакція зберігає за собою право на редагування і скорочення статей. Думки авторів не завжди збігаються з точкою зору редакції. За достовірність фактів, цитат, імен, назв та інших відомостей відповідають автори.

ПРИХОВАНИЙ КОНСТРУКТИВІЗМ ПІДРУЧНИКА «ГЕОМЕТРІЯ»

І.Г. Ленчук,
доктор педагог. наук, професор,
Житомирський державний університет ім. Івана Франка,
м. Житомир, УКРАЇНА,
e-mail: lench456@gmail.com

Обґрунтовується нагальна потреба навчання геометрії на основі конструктивного підходу. Конструктивно-генетичний метод «підсилює» геометричний зміст пропозицій. Продемонстровано прикладами наявність у підручниках прихованих проявів конструктивізму. Наголошується на варіативності можливих методів розв'язання геометричних задач.

***Ключові слова**: конструктивізм, наочне представлення, діяльнісна візуалізація, графічний (графоаналітичний) методи.*

Постановка проблеми. Щоразу, спілкуючись з учителями й оцінюючи якість підготовки учнів із першопредмету, пригадуються напутні слова, сказані немовби вчора (1982 р.) відомим українським геометром, автором одного з найбільш примітних, класичних підручників для ЗОШ «Геометрія» [3] академіком О.В.Погорєловим: «*Ця книга є лише стислим конспектом. Учитель математики зобов'язаний читати її між рядками*»[1].

Насправді ми вимушені констатувати, що в основу викладання (й учіння) евклідової геометрії традиційно покладено формально-логічний підхід. Учитель «не помічає» **конструктивної** складової підручника. Як наслідок, середньостатистичний випускник ЗОНЗ слабо розуміє структуру дисципліни, не у змозі чітко класифікувати фігури, плутає поняттями і фактами, не вміє належним чином користуватися ними в пошуках розв'язків задач середнього ступеня складності на обчислення. Мова не йде про задачі на доведення і, тим паче, на побудову. Матеріал, викладений у підручнику, не засвоюється свідомо і в повному об'ємі. З іншого боку, в університетах елементарній геометрії теж не приділяється достатня увага, хоч вона за своєю природою є категоріально-понятійною і змістовою основою всіх предметів геометричного циклу. Виникають запитання: «Чому студент-математик, навчаючись, не у змозі грамотно осилити початки диво-науки? Чи не є це свідоцтвом *кризових* тенденцій на освітянській ниві вчителя?».

Аналіз актуальних досліджень. Геометрії належить особливе місце серед природничо-математичних наук, вона вирізняється своєю *винятковою естетичною привабливістю, візуально підкресленою красою*. **Найпершу з наук** древні вважали **неперевершеною школою мудрості.** Належне опанування дисципліни «Геометрія» розвиває і шліфує мислення. У XVII столітті Б.Паскаль із цього приводу писав: «Серед рівних розумом – при однакових інших умовах – *має перевагу той, хто знає геометрію*» [2, С. 115]. Йому вторує Ф.Прокопович: «А якщо хтось ґрунтовніше бажає пізнати *переваги, які має* геометрія, нехай знає, що *жодна з наук про полегшення й покращення людського життя без неї не змогла б виникнути, ні вдосконалюватись*. І відомо з досвіду, що народи, які опанували цю науку, в будь-якому мистецтві переважають інші, бо й інші народи також мають засоби, але не досконалі й не прикрашені, тоді як у тих народів, які знають геометрію, *навіть найпростіші речі мають якусь особливу красу*» [2, С. 105]. Ще більш вражає, що не байдужим до ди-

[1] Цитата записана з пам'яті автора статті.

во-науки був великий російський поет О.С.Пушкін: «*Натхнення потрібне в* поезії, *як і в* геометрії» [5, С. 19]. Теза, гідна генія. А для шанувальників геометрії – утішне порівняння! Свідченням цього є також більш ранній історичний факт. Біля входу до Академії, заснованої старогрецьким геометром і філософом Платоном, було викарбовано напис: «Не заходь незнаючий геометрію».

Яскраво, красномовно ідеалізував геометрію акад. О.Д.Александров – учитель О.В.Погорєлова: «Особливість елементарної геометрії серед інших складових математики полягає в тому, що вона *об'єднує в собі сурову* **логіку** *з* **наочним уявленням,** *логічний аналіз – із цілісним синтетичним сприйняттям предмета.* Можна сказати, що за суттю своєю *геометрія і є не що інше, як* органічне поєднання *суворої логіки з наочним уявленням*: наочне уявлення *пронизане і організоване* суворою логікою, і логіка, *пробуджена* наочним уявленням. Там, де немає однієї з цих сторін, немає і справжньої геометрії» [1, С. 282-283].

Відомий математик констатував *нерозривне переплетіння* в геометрії *логіки речей з їх* наочним *уявленням.* Тут одне без іншого не животворне. До того ж, як свідчить досвід, *лише методи* умоглядного **конструктивізму** у змозі ефективно представити такі тісні зв'язки. Без професійного навчання курсу «Конструктивна геометрія», *головним діючим* **об'єктом** *якого* ***геометрична фігура***, *а головним* **засобом** *навчання –* ***візуальний рисунок*** (зображення, модель), неможливо викликати справжній, живий інтерес до науки і досягти **системного** засвоєння суб'єктами навчання такого потужного, самобутнього, специфічного **методу пізнання світу, яким є «Геометрія»**. *Опанування цього методу – одна з найбільш важливих цілей освіти! І, перш за все, для майбутнього педагога-математика.*

Конструктивізм *математичний* – це **напрям** у математиці і побудовані на його основі математичні теорії. За його канонами, основним методом побудови математичних теорій є **конструктивно-генетичний метод**. Згідно з цим методом, любий математичний об'єкт і твердження про нього мають бути результатом **діяльності** мислення з побудови більш складних конструкцій із більш простих, за певними, простими і легко контрольованими правилами (алгоритмами), які дозволяють за допомогою скінченого числа кроків, скінченого числа операцій за скінченний час однозначно одержати результуючу конструкцію.

Коли ж, зокрема, йдеться про **конструктивізм** ***геометричний***, то тут маються на увазі **побудови**, **конструювання**, що в перекладі з латині цілком відповідає суті терміну «*constriktivus*».

Методика навчання математики, як відомо, є педагогічною наукою про **цілі**, **зміст**, **методи**, **форми** і **засоби** передачі учням математичних знань, про виховання дисципліною у процесі навчання. Ми пропонуємо обрати ***геометричний конструктивізм*** стрижневим **методом** професійного *опанування науки «Геометрія»*, яка історично є одним із найдревніших пам'ятників, «... *феноменом загальнолюдської культури*» [6, С. 73].

Формулювання цілей статті. *З огляду на зміст, структуру, функції та особливості евклідової геометрії, в контексті її природного конструктивізму, на переконливих прикладах з'ясувати істинний потенціал підручника для розвитку наочно-образного й логічного мислення студентів, подати зразки геометризації, унаочнення теоретичних фактів і задач, вирізнити графічні та графоаналітичні методи їх закономірних реалізацій.*

Виклад основного матеріалу. Ми певні, не потрібно у ВПНЗ марно повторювати ШКГ. Це нецікаво і згубно, оскільки знайомство студентів с елементарним курсом уже відбулося. Треба **діяльнісно візуалізувати** ще не усталені знання шляхом їх структурування, залучення фактів до **системного** вирішення різнохарактерних пропозицій і, в такому руслі, ґрунтовно, ефективно переосмислити та засвоїти дивовисципліну на рівні вчителя професіонала. Поряд із цим, прискіпливий аналіз підручника на предмет його конструктивізму буде вельми корисним.

Приклад 1 (з області «теорія»).

Змістовною складовою третього пункту § 1 підручника для ЗОШ, із назвою «**Перетин *прямої із площиною***», є *лише теорема про належність прямої площині*. Після її короткого, але строгого доведення зроблено такий висновок: «Із теореми 1.2 випливає, що площина і пряма, яка не лежить на ній, *або не перетинаються, або перетинаються* в одній точці» ([3, с.5], рис. 5). В учня, який звик міркувати, виникають принципово важливі запитання: «Чи відповідає назва пункту його змісту?»; «Чому вербально і на рисунку не реалізована суть піднятого питання?»; «Як побудувати точку перетину прямої із площиною?». Напевно, професіонально підготовлений, грамотний педагог зумів би дати на них відповідь, із честю подолати прикру **недоговореність** у книжковому викладенні.

Як з'ясувалося, перша основна позиційна задача на инциденції (ОПЗ-1) розв'язується дуже просто, якщо в уявленнях і на наочному рисунку-схемі (моделі, див., наприклад, [7]) уміло скористатися одним із найперших відношень у геометрії («належності» точок, прямих і площин) та послатися до загальногеометричного методу посередників. Уявимо собі пряму m і площину $\boldsymbol{\Sigma}$ (рис. 1) загально розташованими одна відносно іншої в евклідовому просторі.

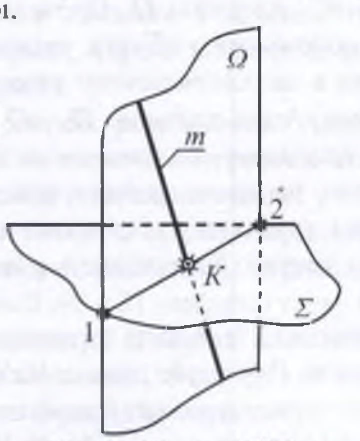

Рис. 1. Перша ОПЗ

Потрібно *знайти точку К, яка належить як заданій прямій т, так і заданій площині* $\boldsymbol{\Sigma}$. У цій ситуації відразу ж постає природне запитання: «Коли точка належить площині?». На нього, як відомо, є чітка, однозначна відповідь: «Тоді, коли вона належить деякій прямій (скажімо, (1–2)) заданої площини». Але шукана точка K належить також і прямій m, тому m і (1–2) перетинаються виключно в точці K. Далі констатуємо факт, що прямі m і (1–2) у власному перетині визначають деяку (єдину) площину $\boldsymbol{\Omega}$.

Звичайні, майже інтуїтивно наведені міркування лежать на поверхні й вони, як з'ясувалося, обґрунтовують невідворотну з'яву деякої площини-посередника $\boldsymbol{\Omega}$. Можна гіпотетично припустити, що в динаміці умоглядних алгоритмічних дій їй відведена не остання роль.

Дійсно, щоб побудувати у площині $\boldsymbol{\Sigma}$ пряму (1–2), якій гарантовано належить точка K заданої прямої m, потрібно, перш за все, ввести в розгляд саме цю площину $\boldsymbol{\Omega}$, яка містить пряму m, і тільки потім визначитися із прямою (1–2) як інциденцією двох площин $\boldsymbol{\Sigma}$ і $\boldsymbol{\Omega}$. На останок, у перетині прямих m и (1–2), зафіксуємо шукану точку K. Як бачимо, для прямої m і площини $\boldsymbol{\Sigma}$ алгоритм побудови їх спільної точки K однозначно описується трьома конкретними, чітко уявлюваними процедурами: **1)** *через дану пряму* ***m*** *проведемо* деяку допоміжну площину $\boldsymbol{\Omega}$; **2)** *побудуємо пряму* **(1–2)** перетину *даної площини* $\boldsymbol{\Sigma}$ *і площини-посередника* $\boldsymbol{\Omega}$; **3)** *знайдемо точку* ***К*** *перетину прямих* ***m*** і **(1–2).**

З методологічної точки зору важливо, що природна реальність і строга послідовність цих кроків безсумнівні, очевидні для тих, хто вчиться, оскільки алгоритм операцій у представленнях індукується і обґрунтовується базовими геометричними поняттями та всім відомими твердженнями, на диво простими і несуперечливими розмірковуваннями.

Заради вичерпного розуміння суті описаного методу особливо важливо бачити, що задача на відшукання точки K перетину прямої m і площини $\boldsymbol{\Sigma}$ включає в себе другу основну позиційну задачу (ОПЗ-2) – на побудову прямої (1–2) перетину двох площин

Σ і ***Ω***. З іншого боку, задача на відшукання спільної прямої двох площин, у решті решт, зводиться до задачі на перетин прямої і площини. Частково, в одній із даних площин можна вибрати дві різні прямі й знайти їх точки перетину із другою площиною. Таким чином, *обидві позиційні задачі тісно внутрішньо переплетені, споріднені між собою.* Більше того, *кожна з них розв'язується через іншу.* Таке обопільне включення вказує не лише на спорідненість, але і на суперечливість алгоритмів розв'язання цих задач.

На перший погляд здавалося б, що це – безвихідь, глухий кут. Усе ж, як ми зараз з'ясуємо, ситуація може залишатися підконтрольною суб'єкту навчання. Справа в тому, що теоретично через пряму *m* проходить пучок площин із віссю *m*. Тому на проекційному кресленні у вказаному пучку площину ***Ω*** потрібно **вибирати** не як завгодно, а ***осмислено, зважено, вдало!*** Так, щоб процес відшукання точок 1 і 2 прямої (1–2) був якомога простішим, зарання запрограмованим у зримих уявленнях, майже очевидним у побудовах. На практиці, в цій реальній ситуації саме у виборі площини ***Ω*** проявляється рівень кваліфікації виконавця конструктивних дій. Тільки вдалий її вибір розриває замкнене коло і ліквідовує суперечливість. До речі, ***вдало обраною*** в більшості випадків вважають площину-посередник ***Ω частинного розташування – проекціювальну*** або ж ***рівня***. В кожному випадку «вдала» проекціювальна площина-посередник просто задається на проекційному кресленні і, дякуючи збиральній властивості її слід-проекції, забезпечує ефективний шлях до візуального представлення розв'язуваної задачі.

Для вичерпної поінформованості зауважимо, що ОПЗ-2 теж не обов'язково розв'язувати «в лоб», безпосередньо через ОПЗ-1. Задачу можна геометрично узагальнити, словесно перефразувати, звівши в конструктивній реалізації до упорядкованого розв'язання двох однотипних пропозицій на перетин площини загального розташування із площиною частинного розташування, щоразу осмислено, вдало ввівши останню за дотепним вибором суб'єкта навчання. Уявимо собі дві різні площини ***Σ*** і ***Λ*** загального розташування, пряму *KL* перетину яких потрібно побудувати (рис. 2): **1)** *перетнемо* задані площини третьою, вдало вибраною площиною $\boldsymbol{\Omega}_1$; **2)** *знайдемо* прямі (1–2) і (3–4) перетину площини-посередника $\boldsymbol{\Omega}_1$ із кожною з даних площин ***Σ*** і ***Λ***; **3)** *зафіксуємо точку **K*** перетину побудованих прямих (1–2) і (3–4). Очевидно, що саме ця точка й буде однією з шуканих. Аналогічно, скориставшись *допоміжною площиною* $\boldsymbol{\Omega}_2$ (з відомих причин $\boldsymbol{\Omega}_2$ зручно обирати паралельною $\boldsymbol{\Omega}_1$), знаходимо ще одну потрібну точку *L*, яка з точкою *K* *визначить спільну пряму **KL*** заданих площин ***Σ*** і ***Λ***.

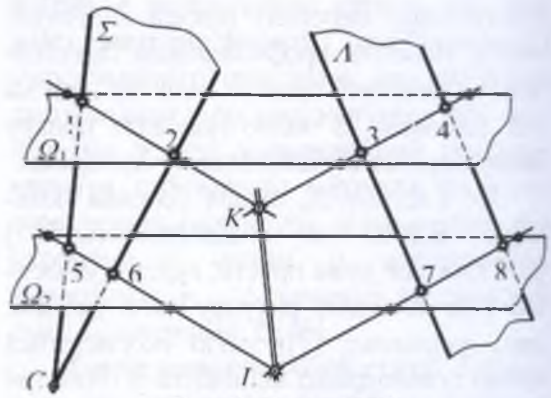

Рис. 2. Друга ОПЗ

Не секрет, що обраний шлях до результату в ОПЗ-2 в жодному разі не виключає складовою з її внутрішнього змісту ОПЗ-1 – точка 1, приміром, є спільною точкою прямої *AC* і площини $\boldsymbol{\Omega}_1$. Проте остання, в якості допоміжного об'єкта, свідомо представлена в запропонованому алгоритмі дій спрощено. Адже площини $\boldsymbol{\Omega}_1$ і $\boldsymbol{\Omega}_2$ вибираються власноруч виконавцем побудови і займають частинне розташування. Саме цей факт гарантує успіх, виключаючи закладену теорією безвихідність у випадку з ОПЗ-2.

Приклад 2 (з області «практика»).

Задача. *Ребро куба рівне а. Найдіть відстань від вершини куба до його діагоналі, яка з'єднує дві інші вершини* ([3], §5, № 36).

Так сформульовану задачу вважати стереометричною можна тільки умовно, оскільки вона відразу ж зводиться до планіметричної. Для цього достатньо вершину

A_1 і діагональ AC_1 куба віднести до прямокутного трикутника AA_1C_1 (рис. 3, $\angle A_1 = 90°$), з вимірами: $AA_1 = a$, $A_1C_1 = a\sqrt{2}$, $AC_1 = a\sqrt{3}$. Залишилося скористатися відомими формулами, щоб знайти відстань A_1O як висоту, проведену з вершини прямого кута A_1 на гіпотенузу AC_1: $A_1O = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Й це все. Де *стереометрія*, її поняття, факти ..., *використані* в роботі? Зараз, на жаль, вони не затребувані!

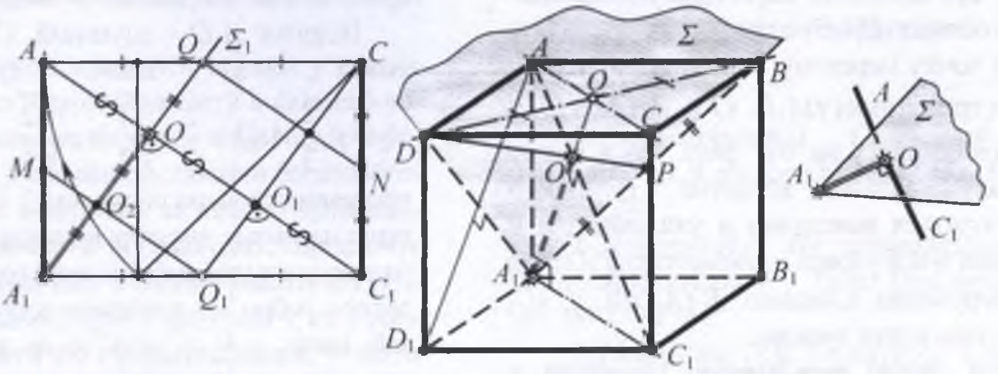

Рис. 3. Графічне моделювання методів розв'язання задачі

Задача, що має характер вправи, не є творчо-розвивальною, в ній *відсутня новизна* **дій**. В 11-му класі таку умову потрібно «**геометрично підсилити**», а саме: «*Ребро куба рівне a.* ***Опустіть*** *перпендикуляр із вершини куба на його діагональ, яка з'єднує дві інші вершини.* ***Знайдіть*** *довжину цього перпендикуляра графічно та обчислювально*».

Більш потужне формулювання умови первинно передбачає певні суто *стереометричні перетворення*, які в уявленнях і конструктивних діях пов'язують шуканий відрізок A_1O з елементами куба, а вже потім – формально-логічне і графічне обчислення його довжини з оцінкою точності закономірних, строго виважених рисункових операцій.

1-й спосіб розв'язання. Акцентуємо увагу на ***загальногеометричній* схемі** пошуку шляху розв'язання задачі у просторі: **1)** через точку A_1 проведемо геометричне місце прямих (площину), перпендикулярних прямій AC_1; **2)** знайдемо точку O перетину проведеної площини із заданою прямою; **3)** з'єднаємо точки A_1 і O відрізком шуканого перпендикуляра.

На зображенні площину $\boldsymbol{\Sigma}$ $(A_1DB) \perp AC_1$ просто побудувати, звернувшись до узагальненої теореми *про три перпендикуляри* і двічі скориставшись в уявленнях (і на рисунку) ***внутрішнім*** *ортогональним проекціюванням*. Дійсно, AC_1 проекціюється на ліву грань куба AA_1D_1D за напрямом $B \to A$ в діагональ AD_1 цієї грані. Але $DA_1 \perp AD_1$, що безсумнівно. Таким чином, пряма DA_1 перпендикулярна прямій AD_1 – проекції похилої AC_1. Тому вона перпендикулярна також самій похилій: $DA_1 \perp AC_1$. Аналогічно обґрунтовується факт перпендикулярності прямих AC_1 і BA_1 (тут ***внутрішнє*** проекціювання матиме напрям $C \to B$).

Точка O перетину діагоналі AC_1 із площиною $\boldsymbol{\Sigma}$ (A_1DB) будується за класичним алгоритмом дій (ОПЗ-1). В якості площини-посередника зручно обрати площину діагонального перерізу куба $\Lambda(AA_1C_1C)$, оскільки $\boldsymbol{\Sigma}$ і Λ уже мають одну спільну точку A_1; другу спільну точку Q знаходимо дякуючи площині-посереднику $\boldsymbol{\Omega}(ABCD)$, яка задана верхньою гранню тіла (ОПЗ-2):

1) $\boldsymbol{\Sigma}(A_1DB) \cap \boldsymbol{\Omega}(ABCD) = DB$;

2) $\Lambda(AA_1C_1C) \cap \boldsymbol{\Omega}(ABCD) = AC$;

3) $AC \cap DB = Q$;

4) A_1Q;

5) $O = A_1Q \cap AC_1$.

2-й спосіб розв'язання. З іншого боку, треба «бачити розумом», що багатогранники ADA_1B и C_1DA_1B (кожний окремо) представляють собою правильні трикутні піраміди зі спільною основою DA_1B. Тому вони співвісні, а їх висоти, проведені з вершин A і C_1, розташовуються в різних півпросторах відносно площини основи і належать одній прямій (діагоналі куба, $AO + OC_1 = AC_1$). Ця діагональ перпендикулярна площині основи (DA_1B) і, природно, проходить через точку перетину медіан рівностороннього трикутника DA_1B: $O = A_1Q \cap DP$. Звертаємо увагу на той факт, що в цьому випадку задача коректно і строго розв'язується виключно в уявленнях, а її кінцівка в побудовах – елементарна! Однак про існування площини $\boldsymbol{\Sigma}$ (A_1DB) $\perp$ AC_1 варто пам'ятати завжди.

3-й спосіб розв'язання. Провівши у прямокутнику AA_1C_1C (на винесеному кресленні діагонального перерізу куба) $CQ_1 \| QA_1$, $QN \| AC_1$ і $Q_1M \| AC_1$, будемо мати: $AQ = QC = A_1Q_1 = Q_1C_1$. Звідси, за теоремою Фалеса, $A_1O_2 = O_2O = OQ$. Тому точка O не лише належить медіані A_1Q рівностороннього трикутника A_1DB, але ще й ділить її у відношенні 2:1, рахуючи від вершини A_1. Це ще один варіант доведення того, що основою висоти правильної трикунної піраміди AA_1DB є точка O, а $AC_1 \perp \boldsymbol{\Sigma}(A_1DB)$. До речі, з цих самих міркувань випливає: $AO = OO_1 = O_1C_1$, тобто точки O і O_1 розділяють діагональ AC_1 на три рівні частини, що на практиці, як факт геометрії куба, варто особливої уваги.

4-й спосіб розв'язання. На винесеному кресленні точка O розділяє відрізок A_1Q у тому ж відношенні, в якому однойменна точка ділить його однойменний відрізок на зображенні куба. Таким чином, маючи винесене креслення діагонального перерізу куба, можна успішно вирішити питання побудови перпендикуляра, опущеного з його вершини A_1 на діагональ AC_1.

5-й спосіб розв'язання. У правильному трикутнику AA_1C_1 точка O, як основа перпендикуляра, опущеного з вершини A_1 прямого кута на гіпотенузу AC_1, просто розраховується, адже:

$$\frac{AA_1^{\,2}}{A_1C_1^{\,2}} = \frac{AO}{OC_1} \Rightarrow \frac{AO}{OC_1} = \frac{1}{2}.$$

Завершення **графоаналітичних** випробувань на зображенні очевидне.

Відрізок A_1O – шуканий. Обчислювальний етап задачі тривіальний: $A_1O = \frac{2}{3}A_1Q = \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{3}{2}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, що чітко продемонстровано рисунком 3. Окрім того, якщо на цьому рисунку відрізок AA_1 обрати оригінальним ребром куба (рухом «покласти» ребро на площину зображень; нехай, напр., $a = \ldots$ *мм*), то на винесеному кресленні можна ретельно заміряти справжню відстань A_1O й ***оцінити точність графічних операцій***. Це додасть віри до диво-науки «Геометрія», переконає учня в її істинності та життєвій придатності.

Неважко побачити, що проста в розумінні формальних виражень задача, переформульована з наголосом на її геометричну сутність, набуває вищого ступеня якості, розв'язується унаочнено у просторі та на проекційному кресленні **п'ятьма** різними способами.

Висновки. Системне, глибоко усвідомлене, помірковане вкраплювання елементів конструктивізму в освітянський процес у сфері науки «Геометрія» стає дійовим фактором індивідуалізації навчання та інтелектуального розвитку студентів, а *вміння шукати і знаходити методологічно несхожі варіанти* розв'язання різнохарактерних пропозицій в обчислювальних, **графічних і графоаналітичних** реалізаціях є ознакою мислячої особистості, проявом творчості у професійному опануванні першопредмета.

До того ж, **уявлення** суб'єкта навчання індукують наочно-образні та логічні **дії**, частково, для виконання операцій внутрішнього проекціювання в умовах, коли особисто ним вибираються напрям і площина проекцій. Доречні поняття і факти стереометрії ***необхідно «вилучаються» із розуму*** *того хто вчиться* й відразу ж **залучаються** до ефективного пошуку *результату*. Зримо візуалізовані схеми просторової діяльності, **естетичні** смаки і **технологічні** навички зображувальних операцій осмислено, акуратно реалізовуються в якісних, поетапно виконуваних бінарних площинних **моделях**, ізоморфних оригінальним об'єктам.

Психологи вважають, що світ у зримих образах, на відміну від світу в формально-символічних, вербальних поняттях, репродукується у свідомості людини багатообразно, у всіх можливих зв'язках і відношеннях. Виключно в образах світ, що оточує нас, сприймається в своєму реальному розмаїтті, динаміці (русі), видимих і, як в науці, в гіпотетично сформульованих, а потім строго обґрунтованих й усвідомлених **змінах**, ***котрі індукують інтелектуальні відкриття, прогрес*** – виявлення нових, ще невідомих зв'язків і відношень. Як з'ясувалося, конструктивний підхід у навчанні дисципліни «Геометрія», не виключаючи формально-аналітичних виражень і обчислень, єдино правильний, істинно ефективний у розвитку динамічних стереотипів мислення майбутніх учителів. *Наочно-образне та логічне мислення в рівній мірі є компонентами просторового мислення*, роз'єднувати їх зле, оскільки штучно створений дефіцит представлень, навичок уявлюваної розумової діяльності, демонстрації наочних операцій із фігурами на проекційних кресленнях робить неможливим розвиток логіки мислення студента (учня) засобами всюдисущої геометрії.

Теорія і практика евклідової геометрії в багатьох її проявах містить зовнішньо «невидимі», приховані прояви конструктивізму. Майбутній учитель зобов'язаний сформувати вміння їх розпізнавати, вирізняти в підручниках і, при нагоді, в розвивальних цілях **створювати штучно, навмисно**, оскільки виключно **метод системної алгоритмізації** операцій, **діяльнісної візуалізації** геометричних істин вельми ефективний в особистісному творчому розвитку, оволодінні суб'єктом навчання ще не до кінця пізнаними закономірностями і фактами.

1. Александров А.Д. Основания геометрии / А.Д.Александров. – М.: Наука, 1987. – 288 с.

2. Зенкевич И.Г. Не интегралом единым / И.Г.Зенкевич. – Тула: Приокское изво, 1971. – 136 с.

3. Погорєлов О.В. Геометрія: Стереометрія: підручник для 10-11 кл. серед. шк. – 4-те вид. – / О.В.Погорєлов. – К.: Освіта, 1998. – 128 с.

4. Прокопович Т. Філософія в Києво-Могилянській академії / Т.Прокопович // Філософська думка. – 1970. – №5. – С. 98-110.

5. Сенкевич А.К. Математика. Воспитание через предмет: В помощь учителю математики / А.К.Сенкевич. – Куйбышев, 1965. – 47 с.

6. Шарыгин И.Ф. Нужна ли школе XXI века Геометрия? / И.Ф.Шарыгин. // Математика в школе. – №4. – 2004. – С. 72-79.

7. Швець В.О. Математичне моделювання як змістова лінія шкільного курсу математики // Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. зб. наук. робіт / редкол.: О.І.Скафа (наук. ред.) та ін.; Донецький нац. ун-т; Інститут педагогіки Акад. пед. наук України; Національний пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. – Донецьк, 2009. – Вип. 32. – С. 16–23.

Резюме. **Ленчук И.Г. СКРЫТЫЙ КОНСТРУКТИВИЗМ УЧЕБНИКА «ГЕОМЕТРИЯ».** *Обосновывается настоятельная необходимость обучения геометрии на основании конструктивного подхода. Конструктивно-генетический метод «усиливает» геометрический смысл предложений. Продемонстрировано примерами наличие в учебниках скрытых проявлений конструктивизма. Ставится ударение на вариативности возможных методов*

решения геометрических задач.

Ключевые слова: *конструктивизм, наглядное представление, деятельная визуализация, графический (графоаналитический) методы.*

Abstract. Lenchuk I. HIDDEN CONSTRUCTIVISM TEXTBOOK «GEOMETRY». *The author emphasizes the importance of understanding geometric concepts, reasoning and sense reasoning, skilled use of technologies already cognized theory to solve it adequate theoretical and practical (applied) problems. The future teacher must realize that the geometry should be admired. Geometry requires the strict logic and illustrates a thorough rethinking of representations and actions. So we are justified the need for engagement constructive genetic method for efficient learning of geometry, because it significantly "enhances" its geometric interpretation.*

No other reception of mastering the discipline, its forms and methods of solving varied and multilevel tasks other than constructive, the basis of which is strongly motivated, turn-based graphical visualization of imaginary operations towards the result is not effective. The teacher who uses a constructive approach to teaching geometry, teaches put forward hypothesis, analyze the claim isolate knowledge that needed to study, build a logical framework reasoning and conclusions, are designed to implement the rules, guidelines actions geometric modeling situations (with variations).

We encourage interest in geometry as a science that promote learning motivation, development of visual-spatial imagery and logical thinking of students' in-depth knowledge and skills fundamental course that will be used by them in various spheres of life and future careers. Author demonstrates the presence of hidden (interlinear) manifestations of constructivism in the textbooks.

Key words: *constructivism, visual representation, active visualization, graphics (semi graphical) methods.*

References

1. *Aleksandrov A.D. Foundations of Geometry / A.D. Alexandrov. – M.: Nauka, 1987. – 288 p.*
2. *Zenkevich I.G. Not a single integral / I.G. Zenkevich. – Tula: Priokskoe iz-vo, 1971. – 136 p.*
3. *Pogorelov O.V. Geometry: stereometry: Textbook for class 10-11 secondary school - 4th edition - / O.V. Pogorelov. – K.: Osvlta, 1998. – 128 p.*
4. *Prokopovych T. Philosophy at the Kyiv Mohyla Academy / T. Prokopovych // Philosophical Thought. – 1970. – №5. – P. 98 – 110.*
5. *Sienkiewicz A.K. Mathematics. Parenting through the object: To help the mathematics teacher / A.K. Sienkiewicz. – Kuybyishev, 1965. – 47 p.*
6. *Sharygin I.F. Do school XXI century geometry? / I.F. Sharygin. // Mathematics at school. – №4. – 2004. – P. 72 – 79.*
7. *Shvets V.A. Mathematical modeling semantic Line School of Mathematics // Didactics of mathematics: Problems and Investigations: International Collection of Scientific Works. – Issue. 32. – Donetsk: Firma TEAN, 2009. P. 16 – 23.*

Стаття надійшла до редакції 18.03.2013 р.