

ходной подготовленности первокурсников по черчению и элементарной геометрии в последние годы приобрело характер устойчивой тенденции. В этом свете представляется необходимым внимательно проанализировать вопрос об улучшении их подготовки в этом направлении, о развитии у них мышления, творческих задатков и навыков самостоятельной учебной работы. Одновременно уместно внести коррективы в цели и задачи вузовского курса «Начертательная геометрия и черчение», обратив особое внимание на восполнение имеющихся у студентов пробелов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Карточки-задания по черчению для 8-го класса: Пособие для учителя / Е. А. Василенко, Е. Т. Жукова, Ю. П. Козлова, А. Л. Терещенко. М.: Просвещение, 1985. 224 с.
2. Клопский В. М., Скопец З. А., Ягодовский М. И. Геометрия / Учеб. пособие для 9-го и 10-го кл. средн. шк. М.: Просвещение, 1979. 256 с.
3. Лагерев В. В. Методические указания к контролю КЗ. О исходной подготовленности по черчению и геометрии студентов дневной и вечерней форм обучения всех специальностей. Брянск: БИТМ, 1988. 42 с.
4. Платонов К. К. Психологический практикум // Учеб. пособие для индустриально-педагогич. техн. М.: Высш. школа, 1980. 165 с.
5. Погорелов А. В. Геометрия // Учеб. пособие для 6—10 кл. средн. шк. М.: Просвещение, 1985. 288 с.
6. Программы восьмилетней школы: Черчение. М.: Просвещение, 1983. 15 с.
7. Программы средней общеобразовательной школы: Математика. М.: Просвещение, 1986. 45 с.
8. Черчение // Учеб. пособие для средн. общеобр. шк. / Под ред. В. Н. Виноградова. М.: Просвещение, 1985. 224 с.
9. Якиманская И. С. Развитие пространственного мышления школьников. М.: Педагогика, 1980. 240 с.

И. Г. ЛЕНЧУК, А. Ф. БОРАВЛЕВ

*Житомирский  
педагогический институт*

#### Построение опорных точек конических сечений на проекционно-полном чертеже Четверухина

Систематическое формирование и развитие пространственных представлений и умений производить операции над пространственными объектами — одно из важных условий становления инженера. Поэтому с самого начала эти моменты должны занять достойное место в работе с будущими специалистами.

- © Ленчук И. Г., 1990.  
© Боравлев А. Ф., 1990.

При изучении методов изображения пространственных фигур учащимся нередко приходится иметь дело с конусами, цилиндрами и их комбинациями, что связано с пересечениями их плоскостями, а значит, с коническими сечениями [6].

Обычно, руководствуясь лишь узко практическими соображениями, для построения упомянутых сечений находят с помощью алгоритма внутреннего проецирования ([4], § 4, 5; [5], § 14) некоторое число в основном случайных точек, которые затем соединяют лекальными кривыми. Однако воспитание специалистов достаточно высокой квалификации требует более глубокой графико-математической культуры.

В рассматриваемом случае вопрос сводится к установлению типа и отысканию на проекционном чертеже так называемых опорных точек конического сечения, которое нам необходимо построить. Перечислим эти точки.

Пусть на проекционном чертеже (рис. 1, 2) заданы прямой круговой конус с основанием в горизонтальной плоскости  $\Pi$  и секущая плоскость  $\Sigma$ , проходящая через некоторые (случайные) точки  $K, L, M$  на его поверхности. Для определенности зададим эти точки между вершиной  $S$  конуса и плоскостью его основания. Итак, плоскость  $\Sigma$  определяет на конусе сечение, часть которого между  $S$  и  $\Pi$  мы и будем рассматривать.

Опорными точками сечения-оригинала являются самая высокая и самая низкая его точки по отношению к плоскости основания  $\Pi$ . Рассмотрим далее вспомогательную секущую плоскость  $\Omega$  (плоскость-посредник), проходящую через ось конуса и перпендикулярную плоскости  $\Sigma$ . Очевидно  $\Omega$  — плоскость симметрии сечения. Точки сечения, наиболее удаленные от плоскости  $\Omega$ , являются его самой левой и самой правой точками. Это вторая пара опорных точек сечения-оригинала. Заметим, что на изображении эти точки не обязаны быть самой верхней (нижней) и соответственно самой левой (правой) точками. В связи с этим рассматриваются еще самая верхняя (нижняя) и самая левая (правая) опорные точки сечения-изображения. Наконец, на сечении-изображении есть еще пара опорных точек — точки видимости. Они лежат на очерковых образующих (точки касания). Всеми этими точками мы и займемся. Построение каждой из них (в отличие от случайных точек) требует своего подхода.

Сформулированная задача достаточно подробно решена на эюре Монжа в курсах начертательной геометрии [1, 7], в некоторой степени — в теории аксонометрических проекций [2] и в уже упомянутых книгах [4; 5] на проекционном чертеже Четверухина. Так как метод Четверухина является основополагающим в стереометрических изображениях, то из него мы и будем исходить.

Как на изображении построить опорные точки сечения-оригинала?

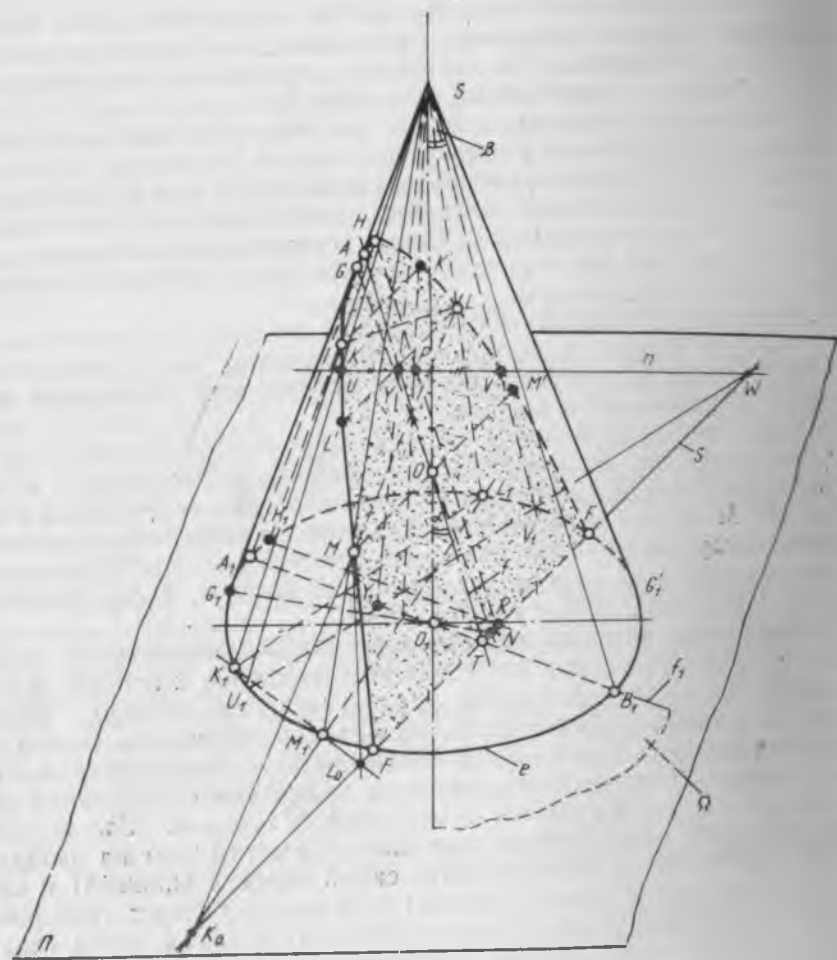


Рис. 1

Точка  $S$  — центр внутреннего проецирования, образующие — проецирующие линии. Точки  $K_1, L_1, M_1$  — основания (проекции) вышеупомянутых точек  $K, L, M$  соответственно, треугольник  $K_1L_1M_1$  — основание треугольника  $KLM$ . По первой теореме Дезарга [3] соответственные стороны этих треугольников пересекаются в трех точках  $K_0 = LM \cap L_1M_1, L_0 = KM \cap K_1M_1, M_0 = KL \cap K_1L_1$ , принадлежащих одной прямой  $s$  — оси перспективной коллинеации плоских полей  $\Pi$  и  $\Sigma$  (следа плоскости  $\Sigma$  на плоскости  $\Pi$ ; на чертеже эта прямая определяется любой парой из трех точек  $K_0, L_0, M_0$ ).

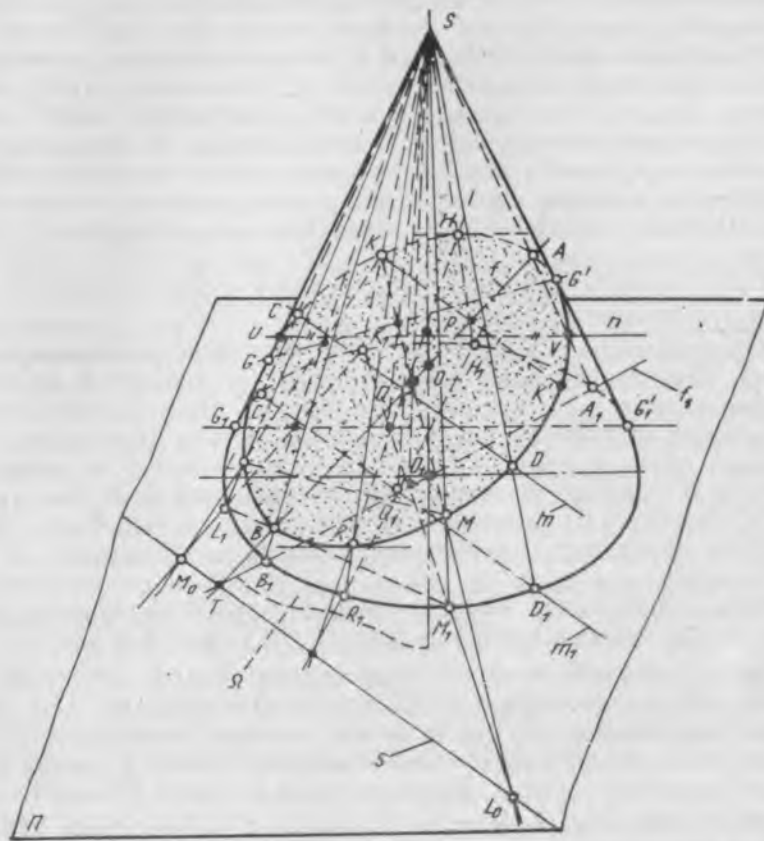


Рис. 2

Пусть  $\alpha$  — угол между осью конуса и плоскостью  $\Sigma$ , не проходящей через его вершину,  $\beta$  — угол между осью и образующей. Если  $\alpha > \beta$ , то в сечении получается эллипс (в частности, — окружность); если  $\alpha = \beta$ , то сечение будет параболой; если  $\alpha < \beta$ , то сечение является гиперболой [6]. Заметим, что с типом конического сечения в определенной степени связан набор обязательных в построении опорных точек.

Рассмотрим взаимное расположение следа  $s$  и окружности основания конуса (эллипса  $e$  на проекционном чертеже). Если  $s$  лежит вне эллипса  $e$  или касается его, то плоскость  $\Sigma$  пересекает все образующие конуса, и мы имеем в сечении эллипс (причем полный). Если  $s$  пересекает  $e$  (в точках  $E$  и  $F$ ), то для установле-

ния типа сечения следует построить его фокальную ось, которая в пересечении с осью конуса образует угол  $\alpha$ . Для этого воспользуемся введённой выше плоскостью  $\Omega$ , которая очевидно перпендикулярна любой горизонтали плоскости  $\Sigma$ , в частности следу  $s$ . На чертеже плоскость  $\Omega$  задана осью  $SO_1$  и диаметром  $A_1B_1$  основания, сопряженным с хордой  $EF$  (направлением  $s$ ). Фокальная ось  $f$  сечения определится как линия наибольшего ската плоскости  $\Sigma$ , построенная методом внутреннего проецирования с помощью прямой  $ML(KM):f=(AB)=\Sigma\cap\Omega$ . Для наглядного сравнения углов  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\angle O_1OT=\alpha$ ,  $\angle O_1SB_1=\beta$ ) достаточно через точку  $O=SO_1\cap f$  провести прямую, параллельную образующей  $SB_1$  (на рис. 1 эта прямая не показана).

Одновременно с выяснением типа конического сечения мы получаем пару его опорных точек  $A=SA_1\cap f$  и  $B=SB_1\cap f$  (в случае полного эллипса). Из предыдущего следует, что эти точки являются концами фокальной оси эллипса, а потому определяют наибольший диаметр кривой-оригинала. Кроме того,  $A$  — самая высокая, а  $B$  — самая низкая точки сечения-оригинала по отношению к плоскости  $\Pi$  основания конуса (заметим, что точки  $A$  и  $B$  могут не определять наибольший диаметр изображения). В случае неполного эллипса, гиперболы или параболы на изображении остается только самая высокая точка  $A$  кривой (вершина); самыми низкими точками кривой-оригинала будут точки  $E$  и  $F$ .

Теперь о самой левой и самой правой точках. В случае полного эллипса ими являются концы  $C$  и  $D$  его малой оси. Если эллипс неполный и его центр лежит не ниже плоскости  $\Pi$ , то упомянутыми опорными точками остаются  $C$  и  $D$ . Если же центр лежит ниже плоскости  $\Pi$ , то самой левой и самой правой точками являются точки  $E$  и  $F$ . Ими же являются  $E$  и  $F$  в случае гиперболы или параболы. Заметим, что в соответствующих случаях  $CD$  либо  $EF$  выражают наибольшую величину хорды, перпендикулярной фокальной оси сечения. Построение точек  $C$  и  $D$  выполняется следующим образом. Находим центр  $Q$  эллипса (середина отрезка  $AB$ ) и его основание  $Q_1$ . Так как малая ось  $m$  эллипса ( $Q\in m$ ) является горизонтальной плоскости  $\Sigma$ , то и она сама, и ее основание  $m_1$  ( $Q_1\in m_1$ ) параллельны следу  $s$ , поэтому их можно построить. Определенная ими плоскость пересекает усеченный конус по треугольнику  $C_1SD_1$ . Отсюда ясно, что  $C=SC_1\cap m$ ,  $D=SD_1\cap m$ .

Число точек видимости сечения очевидно не превышает двух (это умоглядно легко установить после построения рассмотренных выше опорных точек). Способы построения точек видимости удобно связать с их числом. Пусть сначала их две (рис. 2). Рассмотрим плоскость-посредник  $\Lambda(G_1SG_1')$  и внутренним проецированием найдем ее линию пересечения с плоскостью  $\Sigma$ . Построенная прямая в пересечении с очерковыми образующими  $SG_1$  и

$SG_1'$  конуса дает искомые точки видимости  $G$  и  $G'$  соответственно. Если же точка видимости всего одна (рис. 1), то удобнее воспользоваться осевым сечением конуса  $\Delta(SG_1O_1)$ , поскольку одна общая точка плоскостей  $\Delta$  и  $\Sigma$  (точка  $O$ ) ранее уже получена, а вторая точка ( $N$ ) находится на пересечении прямых  $G_1O_1$  и  $s$ . Теперь очевидно, что  $G = SG_1 \cap ON$ . Отметим наконец, что в случаях, когда изображаемая часть сечения либо вся видима, либо целиком невидима, то необходимость строить точки видимости отпадает, так как последних на изображении нет.

Перейдем к самой высокой и самой низкой точкам на изображении сечения. Рассмотрим полный эллипс (рис. 2). Очевидно касательные к сечению в искомых точках  $H$  и  $R$  должны располагаться горизонтально, следовательно, эти точки должны быть концами диаметра, сопряженного горизонтальному направлению. Поэтому для их построения достаточно провести в плоскости  $\Sigma$  какую-нибудь горизонтальную прямую  $n$  и внутренним проецированием определить на конусе ее точки входа  $U$  и выхода  $V$ . Искомым диаметром будет  $QP$ , где  $P$  — середина хорды  $UV$ . После этого получение точек  $H$  и  $R$  внутренним проецированием ясно из рисунка. Если эллипс неполный, то самой высокой или самой низкой точкой на изображении может оказаться одна из рассмотренных ранее точек  $E$  и  $F$  (или обе). В случае параболы (рис. 1) нужным нам сопряженным диаметром будет  $PR \parallel f$ . В случае гиперболы надо найти середину  $P'$  еще одной горизонтальной хорды  $U'V'$  и провести диаметр  $PP'$ . Построение самой высокой (или самой низкой) точки в этих случаях проводится аналогично предыдущему. При этом в рассматриваемые опорные точки обязательно входят  $E$  или  $F$  (или обе вместе).

Для аналогичного построения самой левой и самой правой точек на изображении сечения надо учесть, что касательные в них к изображению проходят вертикально.

Для построения необходимого числа случайных точек следует воспользоваться соответствующими симметриями конических сечений, учтя при этом, что хорды, сопряженные фокальной оси  $f$ , являются горизонтальными плоскости  $\Sigma$ . Если использование этих свойств окажется недостаточным, то промежуточные точки целесообразно искать на прямых плоскости  $\Sigma$ , проходящих через точку  $Q$  в случае эллипса и через точку  $O$  в случае параболы или гиперболы (основания таких прямых будут определяться соответственно точками  $Q_1$  и  $O_1$ , а также двойными точками оси  $s$ ).

Все сказанное можно подытожить в форме алгоритма.

1. Определяем тип конического сечения:

а) строим след  $s$  секущей плоскости  $\Sigma$  на плоскости основания  $\Pi$  конуса;

б) если  $s$  лежит вне контура основания или касается его, то коническое сечение — полный эллипс; в противном случае вводим точки  $E$  и  $F$  пересечения  $s$  с контуром основания;

в) строим диаметр  $A_1B_1$  основания конуса, сопряженный направлению  $s$ ; треугольник  $SA_1B_1$  определит плоскость-посредник  $\Omega$ ;

г) ищем фокальную ось  $f$  конического сечения как линию пересечения плоскостей  $\Omega$  и  $\Sigma$ ;

д) фиксируем угол  $\alpha$  между осью поверхности вращения и фокальной осью  $f$  и угол  $\beta$  между той же осью конуса и его образующей, принадлежащей  $\Omega$ ;

е) сравниваем величины углов  $\alpha$  и  $\beta$ : если  $\alpha > \beta$ , то в сечении будет неполный эллипс;  $\alpha = \beta$  — парабола и  $\alpha < \beta$  — гипербола.

2. Строим опорные точки конического сечения:

а) самую высокую  $A$  и самую низкую  $B$  (концы большой оси) в случае полного и неполного эллипса; делим отрезок  $AB$  пополам, чем определяем точку  $Q$  — центр эллипса; устанавливаем расположение точки  $Q$  относительно  $\Pi$ . Если  $Q$  лежит не ниже  $\Pi$ , то строим точки  $C$  и  $D$  — концы малой оси эллипса. Если же  $Q$  лежит ниже  $\Pi$ , то переходим к пункту б. В случае параболы или гиперболы строим точку  $A$ , здесь самыми низкими (на оригинале) будут точки  $E$  и  $F$ ;

б) точки видимости искомой кривой на изображении  $G$  и  $G'$  (либо только  $G$ ). Возможны случаи, когда это действие исключается;

в) самую высокую  $H$  и самую низкую  $R$  на изображении в случае полного эллипса. Во всех остальных случаях — только точку  $H$ .

3. Строим нужное число случайных точек, умозрительно располагая их равномерно между построенными опорными точками кривой.

4. С помощью лекал обводим коническое сечение.

Этот алгоритм в несколько упрощенном виде пригоден также для решения аналогичной задачи в случае прямого кругового цилиндра. Здесь тип линии сечения плоскостью, не параллельной оси поверхности, определяется однозначно. Ею всегда будет эллипс.

В заключение заметим, что систематические упражнения по выполнению подобных построений в курсе стереометрии не только способствуют развитию пространственных представлений, но и вырабатывают навыки и умения мыслить алгоритмически, вызывают у учащихся желание использовать современные электронно-вычислительные машины для решения задач, исходные данные которых представлены в графической форме. Научно обоснованный подход к каждому этапу учит четкости и строгости в выполнении

операций с пространственными объектами, убеждает в больших возможностях графических методов. Процесс квалифицированно выполнения проекционных рисунков прививает навыки аккуратности и вырабатывает чувство эстетической гармонии и красоты.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Начертательная геометрия / Четверухин Н. Ф., Левицкий В. С. и др. М.: Высш. школа, 1963. 458 с.
2. Глазунов Е. А., Четверухин Н. Ф., Аксонометрия. М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1953. 360 с.
3. Четверухин Н. Ф. Проективная геометрия. М.: Просвещение, 1969. 290 с.
4. Четверухин Н. Ф. Стереометрические задачи на проекционном чертеже. М.: Учпедгиз, 1952. 180 с.
5. Четверухин Н. Ф. Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии. Киев: Рад. школа, 1953. 194 с.
6. Погорелов А. В. Геометрия. М.: Наука, 1983. 283 с.
7. Фролов С. А. Начертательная геометрия: М.: Машиностроение, 1978. 90 с.

И. В. ГАЛЯСОВСКИЙ

*Днепропетровский  
инженерно-строительный институт*

#### О систематизации каркасов топографической поверхности

В инженерной практике строительного, горного и дорожного проектирования на чертежах изображают каркасы топографической поверхности [1, 2], точки которых получают экспериментальным путем. Для построения модели непрерывного каркаса топографической поверхности на исходной модели дискретного каркаса применяют его интерполяцию [2]. Топографическая поверхность рельефа или недр земли подчинена сложному закону образования и не может быть представлена математической формулой. Такая поверхность на чертеже обычно задается графически, и ее исходной величиной служит модель точечного каркаса, задание которого не является определенным, так как через заданные точки каркаса можно провести бесчисленное множество поверхностей. В этом случае путем сглаживания переходят к линейному каркасу семейства горизонталей. Все это допустимо только для небольших участков поверхности в пределах  $20 \times 20$  км. При этом допускается, что топографическая поверхность каркаса является оп-