При $\rho = 2$ (эвклидова метрика) медиатриса – прямая $\frac{a}{b}x + y = 0$; при $\rho = \frac{1}{2}$ (рис. 2) каждая из трех непересекающихся ветвей медиатрисы состоит из дуг кривых четвертого порядка; при $\rho = -1$ компонентами медиатрисы являются две дуги квадратичной гиперболы $\frac{x^2}{a(a-b)} - \frac{y^2}{b(a-b)} = (|x|>a, |y|>b)$ и пять дуг пяти кривых третьего порядка .

$$\frac{x}{a^2-x^2} - \frac{y}{b^2-y^2} = 0 \quad (-2 < x < 2 \ ; \ -1 < y < 1) \ ;$$

$$\frac{a}{x^2-a^2} \pm \frac{y}{y^2-b^2} = 0 \quad \left(\frac{x<-a; \ 0<y<b}{x>a; \ -b<y<0} \right) ;$$

$$\frac{b}{b^2-y^2} \mp \frac{x}{a^2-x^2} = 0 \quad \left(\frac{-a < x < 0 \ ; \ \ y>b}{0 < x < a \ ; \ \ y<-b} \right) .$$

Если $\rho \to 0$, медиатриса неограниченно приближается к линиям $y = -\left(\frac{x}{\sup|a,b|}\right)^{\pm 1}$, т.е. к прямой и равносторонней гиперболе.

Литература

I. Г.Б у з е м а н. Геометрия геодезических. М., ИЛ,1962.

2. Г.Б у з е м а н, П.К е л л и. Проективная геометрия и проективные метрики. М., ИЛ, 1957.

3. В.Ф.К а г а н. Основания геометрии. Т.П. М., 1956.

4. Ф.К л е й н. Неэвклидова геометрия. М.-Л.,ОГИЗ,1935.

5. Б.А.Р о з е н ф е л ь д. Неэвклидовы геометрии.М.,"Наука", 1955.

6. В.В.Г л о г о в с к и й. Биссекторы в необобщенном пространстве Минковского. В сб.:Прикладная геометрия и инженерная графика, вып.УП. Киев, "Будiвельник", 1968.

И.Г.Ленчук

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА, ОДНА СТОРОНА КОТОРОГО ЕСТЬ ДУГА КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Работы [I , 2] посвящены вопросу определения площадей,ограниченных кривыми второго порядка. При этом кривая задается в инженерном варианте и выводятся формулы для определения площади ее сегмента в функциональной зависимости от ее дискриминанта.

Способ, предлагаемый в настоящей статье, дает аналитически точные формулы, позволяющие определить площадь произвольного треугольника, одна сторона которого есть дуга кривой второго порядка.

Известно, что каноническое уравнение любой невырожденной кривой второго порядка может быть при помощи подходящего преобразования начала приведено к виду [3]

$$y^2 = 2px - (1-\varepsilon^2)\cdot x^2, \tag{I}$$

где $p > 0$ - фокальный параметр кривой. В этом случае она проходит через начало координатной плоскости XOY. Ось OX является осью симметрии кривой, которая обращена вершиной влево. Уравнение (I) выражает тот факт, что невырожденная кривая второго порядка - это геометрическое место точек, отношение расстояний которых $\varepsilon \geqslant 0$ (эксцентриситет) от данной точки (фокуса) и от данной прямой (директрисы) постоянно. Кривая второго порядка есть эллипс при $\varepsilon < 1$ и, в частности, окружность при $\varepsilon = 0$, гипербола при $\varepsilon > 1$ и парабола при $\varepsilon = 1$.

Сместим вершину кривой относительно начала координат вправо на величину K и вверх на величину l, а также повернем кривую вершиной вправо. При этом уравнение (I) примет вид

$$(y-l)^2 = -2p(x-k) - (1-\varepsilon^2)(x-k)^2. \tag{2}$$

В уравнении (2) промодулируем независимую переменную x и зависимую переменную y:

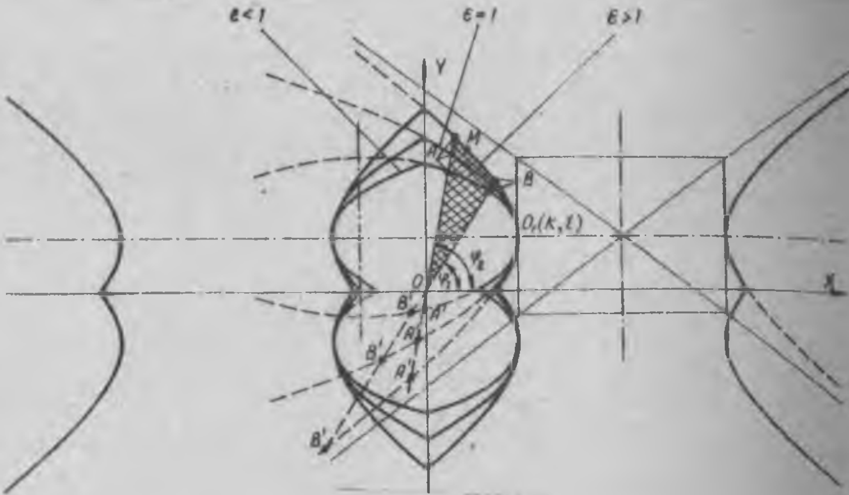
$$(|y|-l)^2 = -2p(|x|-k) - (1-\varepsilon^2)(|x|-k)^2. \tag{3}$$

График функции, которую представляет уравнение (3), симметричен относительно координатных осей, так как $|-y| = |y|$ и $|-x| = |x|$. Поэтому сначала строим график функции в первой четверти, где $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, согласно равенству (2), а затем достраиваем его во второй, третьей и четвертой четвертях (см. рисунок).

Площадь сектора OAB, ограниченного дугой AB и лучами OA и OB, выражается формулой (в полярной системе координат)

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\,d\varphi, \tag{4}$$

где r - полярный радиус переменной точки M дуги AB; φ - ее полярный угол. r находим из (3), осуществив предварительно переход от декартовой системы координат XOY к полярной. При этом OX принимаем за полярную ось, а точку O - за полюс:



$$r = \frac{l\,|\sin\varphi| + [k(1-\varepsilon^2)-p]\,|\cos\varphi|}{\sin^2\varphi + (1-\varepsilon^2)\cos^2\varphi} \pm$$

$$\pm \frac{\sqrt{\{l\,|\sin\varphi| + [k(1-\varepsilon^2)-p]\,|\cos\varphi|\}^2 - [\sin^2\varphi + (1-\varepsilon^2)\cos^2\varphi][l^2 - 2kp + k^2(1-\varepsilon^2)]}}{\sin^2\varphi + (1-\varepsilon^2)\cos\varphi}; \qquad (5)$$

тогда

$$r^2 = 2\left\{\frac{l\,|\sin\varphi| + [k(1-\varepsilon^2)-p]\,|\cos\varphi|}{\sin^2\varphi + (1-\varepsilon^2)\cos^2\varphi}\right\}^2 - \frac{l^2 - 2kp + k^2(1-\varepsilon^2)}{\sin^2\varphi + (1-\varepsilon^2)\cos^2\varphi} \pm$$

$$\pm 2\,\frac{l\,|\sin\varphi| + [k(1-\varepsilon^2)-p]\,|\cos\varphi|}{[\sin^2\varphi + (1-\varepsilon^2)\cos^2\varphi]^2}\sqrt{\cos^2\varphi\{[2kp - k^2(1-\varepsilon^2)]\,tg^2\varphi + 2l[k(1-\varepsilon^2)-p]\,|tg\,\varphi| + [p^2 - l^2(1-\varepsilon^2)]\}}.$$

Последнее подставляем в (4) и находим значения S для разных ε:

$$1)\ \varepsilon < 1.\quad S = \left\{\frac{\{[k(1-\varepsilon^2)-p]^2 - (1-\varepsilon^2)\cdot l^2\}\,|tg\,\varphi|}{2(1-\varepsilon^2)[(1-\varepsilon^2) + tg^2\varphi]} - \frac{l[k(1-\varepsilon^2)-p]}{(1-\varepsilon^2) + tg^2\varphi} + \frac{p^2}{2(1-\varepsilon^2)\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,\times\right.$$

$$\left.\times\, arctg\,\frac{|tg\,\varphi|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right\}\cdot\frac{|tg\,\varphi|}{tg\,\varphi} \pm \left\{\frac{[k(1-\varepsilon^2)-p]\,|tg\,\varphi| - (1-\varepsilon^2)\cdot l}{2(1-\varepsilon^2)[(1-\varepsilon^2) + tg^2\varphi]}\cdot\sqrt{A\,tg^2\varphi + B\,|tg\,\varphi| + C} \,+\right.$$

$$\left.+\,\frac{p^2}{2(1-\varepsilon^2)\sqrt{1-\varepsilon^2}}\cdot arctg\,\frac{[k(1-\varepsilon^2)-p]\,|tg\,\varphi| - (1-\varepsilon^2)\cdot l}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\sqrt{A\,tg^2\varphi + B\,|tg\,\varphi| + C}}\right\}\cdot\frac{|tg\,\varphi|}{tg\,\varphi}\,\Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2}. \qquad (6)$$

где

$$A=2kp-k^2(1-\varepsilon^2);\quad B=2l[k(1-\varepsilon^2)-p];\quad C=p^2-l^2(1-\varepsilon^2).$$

$$2)\ \varepsilon>1.\ S=\left\{\frac{\{[k(\varepsilon^2-1)+p]^2-(\varepsilon^2-1)\cdot l^2\}|tg\varphi|}{2(\varepsilon^2-1)[(\varepsilon^2-1)-tg^2\varphi]}-\frac{l[k(\varepsilon^2-1)+p]}{(\varepsilon^2-1)-tg^2\varphi}+\frac{p^2}{4(\varepsilon^2-1)\sqrt{\varepsilon^2-1}}\times\right.$$

$$\left.\times\ln\left|\frac{|tg\varphi|+\sqrt{\varepsilon^2-1}}{|tg\varphi|-\sqrt{\varepsilon^2-1}}\right|\right\}\cdot\frac{|tg\varphi|}{tg\varphi}\pm\left\{\frac{[k(\varepsilon^2-1)+p]|tg\varphi|-(\varepsilon^2-1)\cdot l}{2(\varepsilon^2-1)[(\varepsilon^2-1)-tg^2\varphi]}\cdot\sqrt{A\,tg^2\varphi-B|tg\varphi|+C}+\frac{p^2}{4(\varepsilon^2-1)\sqrt{\varepsilon^2-1}}\times\right.$$

$$\left.\times\ln\left|\frac{\sqrt{\varepsilon^2-1}\cdot\sqrt{A\,tg^2\varphi-B|tg\varphi|+C}+\{[k(\varepsilon^2-1)+p]|tg\varphi|-(\varepsilon^2-1)\cdot l\}}{\sqrt{\varepsilon^2-1}\cdot\sqrt{A\,tg^2\varphi-B|tg\varphi|+C}-\{[k(\varepsilon^2-1)+p]|tg\varphi|-(\varepsilon^2-1)\cdot l\}}\right|\right\}\cdot\frac{|tg\varphi|}{tg\varphi}\Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2},\tag{7}$$

где

$$A=2kp+k^2(\varepsilon^2-1);\quad B=2l[k(\varepsilon^2-1)+p];\quad C=p^2+(\varepsilon^2-1)\cdot l^2.$$

$$3)\ \varepsilon=1.\ S=\left\{\frac{(l-p|ctg\varphi|)^3}{3p}+\frac{l^2-2kp}{2}|ctg\varphi|\pm\frac{\sqrt{[(l-p|ctg\varphi|)^2-(l^2-2kp)]^3}}{3p}\right\}\cdot\frac{|ctg\varphi|}{ctg\varphi}\Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2}.\tag{8}$$

Если вершина кривой второго порядка лежит в первой или третьей четверти плоскости XOY, то в формулах (6), (7) необходимо принять $tg\,\varphi>0$, а в формуле (8) – $ctg\,\varphi>0$. Если же вершина кривой располагается во второй или четвертой четверти, то $tg\,\varphi<0$ и $ctg\,\varphi<0$ соответственно. Знак перед последним слагаемым (+ или –) следует брать в зависимости от того, площадь какого треугольника из двух возможных требуется найти: OAB или $OA'B'$. φ_1 и φ_2 одновременно могут принимать произвольные значения из интервала $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$, за исключением $\varphi=arc\,tg\sqrt{\varepsilon^2-1}$ для $\varepsilon>1$, так как при этом $(\varepsilon^2-1)-tg^2\varphi=0$, что для (7) недопустимо.

Формулы (6) – (8) дают возможность определить площадь произвольного треугольника, одна сторона которого есть дуга кривой второго порядка. Для определения площади замкнутого плоского обвода, составленного из дуг кривых второго порядка, необходимо:

а) осуществить разбиение обвода на q произвольных треугольников, у которых три стороны есть прямые, и таких, у которых только одна сторона есть дуга кривой второго порядка;

б) по ранее известным формулам, а также по формулам, предложенным в настоящей статье, вычислить площади каждого из треугольников и найти их сумму.

Если центральная кривая (эллипс или гипербола) задается своими полуосями m и n, то при этом следует воспользоваться следующими формулами перехода:

$$\rho = \frac{n^2}{m}; \quad (1-\mathcal{E}^2) - \frac{n^2}{m^2}; \quad l = b; \; k = a+m \qquad \text{для} \qquad \mathcal{E} < 1;$$

$$\rho = \frac{n^2}{m}; (\mathcal{E}^2 - 1) = \frac{n^2}{m^2}; \quad l = b; \; k = a-m \qquad \text{для} \qquad \mathcal{E} > 1,$$

где a и b - координаты центра кривой. При этом формулы (6), (7) значительно упрощаются.

Литература

1. А.В.Блиок, А.В.Павлов. Зависимость площадей от дискриминанта кривой второго порядка. В сб.: Прикладная геометрия и инженерная графика, вып.8. Киев, "Будівельник", 1969.

2. А.В.Блиок, А.В.Павлов. Зависимость координат центра тяжести площади сегмента кривой второго порядка от дискриминанта. В сб.: Прикладная геометрия и инженерная графика, вып.16. Киев, "Будівельник", 1973.

3. Г.Корн, Т.Корн. Справочник по математике. М., "Наука", 1968.

Ю.Д.Бачурин

ОБ "УСЛОВНОЙ ВЫПУКЛОСТИ" ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Так как линейчатые поверхности имеют неположительную гауссову кривизну, то они являются седловыми [I]. Определенный интерес вызывают линейчатые поверхности, исходные направляющие которых направлены вогнутостью в одну сторону от какой-либо плоскости.

Теорема. Если касательные векторы к исходным направляющим линейчатой поверхности $r = \bar{a}(u) + v\bar{b}(u)$ в интервале $u_0 \le u \le u_k$ при увеличении u осуществляют поворот в одном направлении относительно единичного вектора $\bar{b}(u)$, то касательные векторы к линии на поверхности, соответствующей $v = const$, в области $u_0 \le u \le u_k$ и $0 \le v \le 1$ осуществляют поворот в том же направлении.

Пусть векторы $\bar{V}_{A_i}$ и $\bar{V}_{B_i}$ (см. рисунок) осуществляют поворот по часовой стрелке, если смотреть в направлении вектора $\bar{b}(u)$,