площадей, то для значений радиусов — векторов спирали вводится поправка, определяемая уравнением той или иной аппроксимирующей кривой. В качестве последней возьмем кардиоиду

$$\rho_2 = -a\cos\varphi + a.$$

Тогда уравнение второй направляющей будет иметь вид

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = \rho_0 q^{\frac{\varphi}{2\pi}} + a(1 - \cos\varphi).$$

Диаметры образующей окружности определятся из выражения

$$d = \rho - r =$$

$$= \rho_0 q^{\frac{\varphi}{2\pi}} + a(1 - \cos\varphi) - r.$$

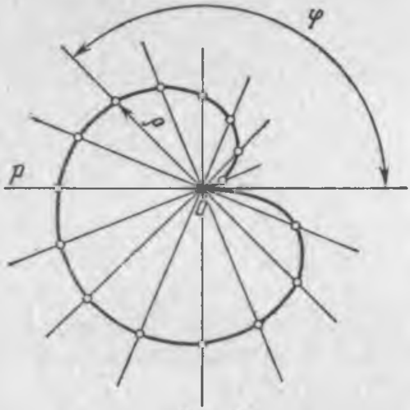

Рис. 3

Управлять графиком площадей можно с помощью параметров аппроксимирующих кривых. У кардиоиды — это диаметр основной окружности a, у кохлеоиды — радиус-вектор a_1, совпадающий с полярной осью. На рис. 2, *а* изображены графики площадей *1*, *2*, *3*, когда за аппроксимирующую кривую выбрана кардиоида. Параметр a равен *3*, *4*, *5* соответственно. Этим графиком соответствуют направляющие кривые *1*, *2*, *3*, которые представлены на рис. 2, *б*. Как видно из рисунка, они обеспечивают плавный переход от одного сечения к другому.

Кривая кохлеоида определяет более плавный график площадей. Если разность радиусов-векторов логарифмической спирали и направляющей кривой будет иметь вид кривой, изображенной на рис. 3, то за аппроксимирующую кривую можно выбрать деформированную кардиоиду.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломакин А. А. Центробежные и пропеллерные насосы. М.—Л., 1950.
2. Бермант А. Ф. Графический справочник по математике (атлас кривых). Ч. I, М.—Л., 1937.
3. Ефремова Р. И. Проекции с угловыми отметками.— Тезисы Республиканской конференции по прикладной геометрии и инженерной графике. К., 1976.

УДК 515

И. Г. Ленчук, А. В. Павлов
(Киевский политехнический институт)
Ю. С. Павленко
(Киевский технологический институт легкой промышленности)

О ПОДОБИИ КРИВЫХ 2-ГО ПОРЯДКА В ИНЖЕНЕРНОМ ВАРИАНТЕ ЗАДАНИЯ

Рассмотрим дугу кривой 2-го порядка, заданную координатами вершин базисного треугольника ABC и дискриминантом f (рис. 1). Пусть каждая из точек A и C, перемещаясь равномерно и прямолинейно в плоскости чертежа, занимает в конечном счете положение A' и C' соответственно. Требуется построить дугу кривой 2-го порядка, подобную заданной, конечными точками которой будут точки A' и C'.

Для решения поставленной задачи воспользуемся простейшим преобразованием подобия, так называемым равномерным растяжением, или гомотетическим преобразованием.

Известно, что две геометрические фигуры подобны, если существует преобразование подобия, преобразующее одну фигуру в другую. Преобразованием подобия называется произведение прямой гомотетии на движение (параллельный перенос, поворот).

Аксиома. Если дана бесконечная последовательность углов α, α_1, α_2, ..., α_i

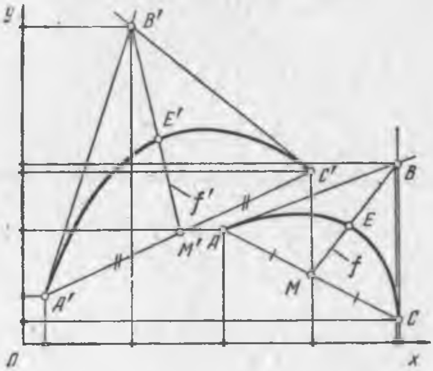

Рис. 1

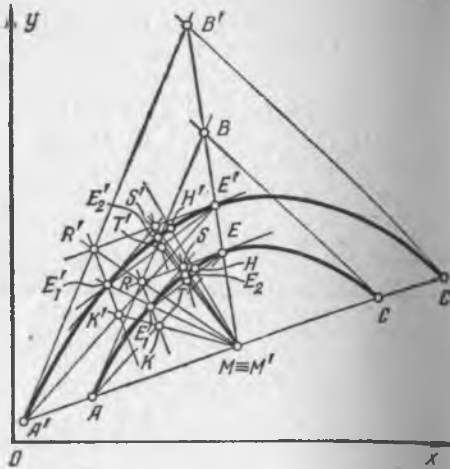

Рис. 2

с общей вершиной, из которых каждый последующий принадлежит предыдущему, и если не существует угла, принадлежащего всем углам данной последовательности, то существует один и только один луч внутри угла α, принадлежащий всем углам данной последовательности.

Лемма. В гомотетии касательных к заданной кривой преобразуется в касательную к кривой, подобной заданной.

Доказательство (от противного) очевидно.

Теорема (прямая). Если произвольной точке L дуги AC кривой 2-го порядка можно поставить в соответствие единственную точку L' дуги кривой 2-го порядка $A'C'$ и $M'L' = k \cdot ML$, то базисные треугольники заданных дуг подобны, а дискриминанты равны.

Доказательство теоремы вытекает из свойств гомотетии и леммы.

Теорема (обратная). Если базисные треугольники двух дуг кривых 2-го порядка в инженерном варианте задания подобны, а их дискриминанты равны, то такие кривые подобны.

Доказательство. Выполним движение в плоскости чертежа так, чтобы отрезок $A'C'$ наложился на отрезок AC, а точка M' совпала с точкой M (рис. 2).

Выбираем точку $M = M'$ за центр гомотетии.

Так как $f = f'$, то $\dfrac{ME}{MB} = \dfrac{ME'}{MB'}$, или $\dfrac{ME'}{ME} = \dfrac{MB'}{MB}$. Из подобия треугольников ABC и $A'B'C'$ имеем $MB' = k \cdot MB$ (где k — коэффициент гомотетии), а значит $ME' = k \cdot ME$, т. е. точка $E' \subset \overset{\frown}{A'C'}$ гомотетична точке $E \subset \overset{\frown}{AC}$.

Назовем точку пересечения медианы базисного треугольника с кривой 2-го порядка «условно средней точкой», а луч гомотетии, пересекающий заданные дуги AC и $A'C'$ соответственно в условно средних точках, «условно средним лучом гомотетии».

Проведём из центра подобия произвольный луч преобразования MH. Докажем, что точка $H \subset AC$ гомотетична точке $H' \subset A'C'$.

Если луч MH не совпадает с лучом ME, то, очевидно, он пересекает заданные дуги кривых 2-го порядка либо в пределах угла $AMБ$, либо — CMB. Предположим, первое. Около дуги AE опишем базисный треугольник ARE, а около дуги $A'E'$ — $\Delta A'R'E'$. Так как $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$, то $AR \parallel A'R'$. Кроме того, известно, что касательные к кривой 2-го порядка в точках, являющихся концами диаметра кривой, параллельны сопряженным ему хордам: $RE \parallel AC$ и $R'E' \parallel A'C'$, а, следовательно, $RE \parallel R'E'$. Точка A и A', E и E' гомотетичны по построению, поэтому $AE \parallel A'E'$. Значит $\triangle ARE \backsim \triangle A'R'E'$ и их медианы гомотетичны $K'R' = \tilde{K} \cdot KR$.

Если через точку E_1 пересечения медианы KR треугольника ARE с дугой кривой 2-го порядка AE провести прямую, то в пересечении её с медианой $K'R'$ базисного треугольника $A'R'E'$ получим точку E_1', гомотетичную точке E_1, $ME_1' = \tilde{k} \cdot ME_1$. Но, согласно построению, каждой точке дуги AC соответствует единственная точка дуги $A'C'$. Поэтому $E_1' = K'R' \cap A'\overset{\frown}{E'}$, т. е. точка E_1' принадлежит дуге $A'E'$.

Луч MH либо совпадает с лучом ME_1 ($MH \equiv ME_1$), тогда теорема доказана, либо принадлежит одному из двух углов $\sphericalangle AME$, либо $\sphericalangle E_1ME$. Предположим последнее. Аналогично предыдущему доказываем гомотетичность условно средних точек E_2 и E_2 и т. д.

Согласно аксиоме, пределом, к которому стремится последовательность условно средних лучей гомотетии, является произвольно проведенный луч MH (MH'). Последовательность условно средних точек E, E_1, E_2, ..., E_i дуги AC стремится при этом к точке H, а последовательность условно средних точек E', E_1', E_2', ..., E_i', дуги $A'C'$ — к точке H'. Поэтому

$$\frac{MH'}{MH} = \lim_{i \to \infty} \frac{ME_i'}{ME_i} = \lim \tilde{k} = \tilde{k}, \quad \text{или} \quad MH' = \tilde{k} \cdot MH,$$

что и требовалось доказать.

Материал настоящей статьи послужил теоретическим обоснованием для машинного решения одной из основных задач швейной промышленности — технического размножения швейных деталей. Графический и аналитический алгоритмы технического размножения деталей [2] значительно проще алгоритмов, разработанных ранее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аргунов Б. И., Балк М. Б. Элементарная геометрия. М., Просвещение, 1966.

2. Ленчук И. Г., Павленко Ю. С., Павлов А. В. Об одном алгоритме технического размножения деталей швейных изделий.— Известия вузов, сер. «Технология легкой промышленности», 1977, № 3.

УДК 621.91—52

Ю. И. Бадаев

(Киевский политехнический институт)

МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПЛОСКИХ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРИ МАЛОМ ДОПУСКЕ

Нелинейная аппроксимация плоских кривых и поверхностей вызвана необходимостью перезадания линий и поверхностей более простыми геометрическими формами для нелинейных систем интерполирования при программной обработке.

Если при достаточно малом допуске δ пренебречь отклонением соприкасающегося параболоида m-ой степени в достаточно малой окрестности, то можно предложить следующий метод исследования:

полагая соприкасающийся параболоид m-ой степени лежащим на поверхности, выполним анализ отклонения соприкасающихся параболоидов m-ой и $(m$-1)-ой степени.