

Зовсім плавний спосіб з тривимірною графікою.

Само по собі без прив'язування до певної системи координат, тривимірне зображення існувати не може. Цими системами можуть бути і криволінійні, і декартові координати (роботи Скидана І. А.), або ж перспективні зображення (роботи Сазонова К. О.).

Одержання зображення такими методами основне на традиційному перенесенні апарата одержання зображень на екрані монітора.

Проте можливості застосування ПК полягають не тільки в досконалії «сумісності» з графічними підходами, тобто відтворенням ручних операцій. Застосування ПК відкриває цілком нові підходи до одержання зображень на екрані монітора.

Пропонується спосіб побудови поверхонь, оснований на «безкоординатному» методі. Суть його полягає ось у чому.

Поверхню, що вивчається, пропонується зобразити з нанесенням ортогональних сіток двох сімейств кривих.

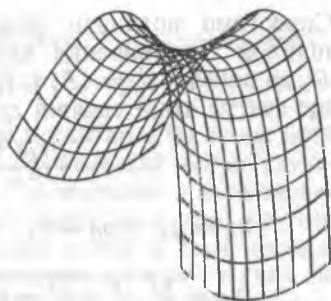
При цьому одна з утворюючих «розмножується» на екрані за рівняннями другого сімейства. Суть «розмноження» полягає в сполученні переміщення з квазіобертанням. Ефект квазіобертання досягається за рахунок переміщення твірних одного сімейства з певним кроком по напрямним.

Після демонстрації твірних першого сімейства відбувається їх стирання і резервування в готовому вигляді (без повторного креслення). Потім здійснюється креслення кривих другого сімейства.

Остаточно провадиться ефект накладання одних кривих на другі.

На рисунку показана *HARDCORY* з екрану монітора поверхні типу  $y = z^2 - x^2$ .

На закінчення слід відмітити, що запропонований апарат ефективний у діалоговому режимі, оскільки перезадання параметра поверхні може бути проведено в лічені хвилини.



Надійшла до редколегії 19.01.90

УДК 515.2

І. Г. Ленчук, канд. техн. наук,  
І. І. Ленчук

#### АПРОКСИМАЦІЯ КРИВИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ХОРДАМИ ІЗ СУВОРО ЗАДАНИМ ДОПУСКОМ

У задачах автоматизованої підготовки геометричної інформації для систем з програмним управлінням знайшов широке застосування метод «4δ» вписання в плоску криву впорядкованої послі-

виократи оптимальну кількість ланок апроксимуючої ламаної і раціональний тільки для як завгодно малих  $\delta$ , значно менших змінного радіуса кривини кривої по її довжині. Іноді використовують алгоритм коректування  $\delta$  по ходу апроксимації. Але при цьому допуск стає вже змінною величиною. Ми пропонуємо інший шлях.

Нехай в ортонормованому репері  $R_0 = \{O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0\}$  (рисунок) дуга  $AC$  кривої другого порядку задана параметричними рівняннями.

$$x = \frac{x_{A_0} \gamma t^2 + x_{B_0} t + x_{C_0}}{\gamma t^2 + t + 1}, \quad y = \frac{y_{A_0} \gamma t^2 + y_{B_0} t + y_{C_0}}{\gamma t^2 + t + 1}. \quad (1)$$

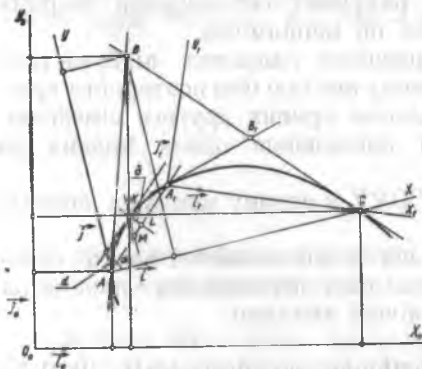
Спростимо подальші формальні перетворення та їх результати шляхом перетворення координат. А саме, перейдемо від репера  $R_0$  до репера  $R = \{A, \vec{i}, \vec{j}\}$ , вісь абсцис якого містить хорду  $AC$ , що стягує кінці заданої дуги кривої. Тут

$$x = \frac{x_B t + x_C}{\gamma t^2 + t + 1}, \quad y = \frac{y_B t}{\gamma t^2 + t + 1}, \quad (2)$$

$$x_A = y_A = y_C = 0, \quad x_C = \sqrt{m_2 + n^2}, \quad y = \frac{|np - mp|}{x_C},$$

$$x_B = \sqrt{p^2 + p^2 - y_B^2}, \quad m = x_C - x_{A_0}, \quad n = y_C - y_{A_0},$$

$$p = x_{B_0} - x_{A_0}, \quad r = y_{B_0} - y_{A_0}.$$



Нехай також хорда  $AA_1$  — перша ланка апроксимуючої ламаної, належить прямій

$$y = kx, \quad (3)$$

де  $k = \tan \alpha$  — її кутовий коефіцієнт.

Оскільки крива (2) неперервна і має дотичну, яка неперервно обертається у проміжку  $AA_1$ , то згідно з теоремою Лагранжа про скінченний приріст, між  $A$  і  $A_1$  існує така точка  $K(\xi, \eta)$  кривої, що дотична в ній описується рівнянням

$$Y = \eta + k(x - \xi). \quad (4)$$

При фіксованому  $x = X$ , віднімаючи від рівняння (4) рівняння (3), одержимо

$$Y - y = \eta - k\xi. \quad (5)$$

Позначимо різницю початкових ординат хорди  $AA_1$  і паралельної їй дотичної через  $d$ . Аналітично  $d$  і допуск на апроксимацію  $\delta$  виражаються одне через друге формулою  $d = \delta \sqrt{1 + k^2}$ , що випливає з прямокутного трикутника  $KLM$ . З урахуванням останньо-

Але

$$\delta \sqrt{1 + k^2} = \eta - k\xi. \quad (6)$$

$$k = \frac{y'}{x'} = \frac{y_B (\gamma^2 - 1)}{x_B (\gamma^2 - 1) + x_C (2\gamma + 1)}. \quad (7)$$

Тому, підставивши значення  $k$  в (6) і прийнявши до уваги, що точка  $K(\xi, \eta)$  задовольняє рівняння кривої (2), нескладними алгоритмічними перетвореннями прийдемо до рівняння 4-го ступеня відносно параметра  $t$  у точці  $K$

$$a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 = 0, \quad (8)$$

де

$$a_4 = \gamma^2 (x_B^2 + y_B^2), \quad a_3 = 4\gamma^2 x_B x_C, \quad a_2 = 2\gamma (2\gamma x_C^2 + x_B x_C - x_B^2 - y_B^2),$$

$$a_1 = 4\gamma (x_C^2 x_B x_C), \quad a_0 = (x_B - x_C^2 + y_B^2 - y_B^2 x_C^2) \delta^2.$$

Алгебраїчне рівняння з дійсними коефіцієнтами (8) може мати кількість дійсних коренів. Рівну або на парне число менше ступені рівняння, що свідчить про можливість проведення в загальному випадку по заданому напрямку  $k$  двох дотичних до кривої другого порядку. Кожна з цих дотичних перетинає криву в двох точках, які збігаються. Однак оскільки ми проводимо дотичну тільки до дуги  $AC$ , то значення параметра  $t$  слід вибирати з умови належності його інтервалу  $0 \leq t \leq \infty$ . Точніше обмежити дійсні додатні корені зверху можна за допомогою нерівності, встановленої Колліном-Маклореном,  $t \leq 1 + \sqrt[S]{A}$ , де  $S$  — порядковий номер першого від'ємного коефіцієнта в ряді  $A_3, A_2, A_1, A_0$ ;  $A_3 = \frac{a_3}{a_4}$ ,  $A_2 = \frac{a_2}{a_4}$ ,  $A_1 = \frac{a_1}{a_4}$ ,  $A_0 = \frac{a_0}{a_4}$ ,  $A$  — максимальний з модулів від'ємних коефіцієнтів.

Ця ж оцінка дозволяє встановити і нижню межу додатних коренів.

Для цього розглянемо многочлен  $\varphi(t) = t^4 f\left(\frac{1}{t}\right)$  при  $A_0 > 0$

чи  $\varphi(t) = -t^4 f\left(\frac{1}{t}\right)$  при  $A_0 < 0$ , після чого скористуємось наведеною нерівністю. Тут  $f(t) = t^4 + A_3 t^3 + A_2 t^2 + A_1 t_1$ . Якщо числа  $N_1$  і  $N_2$  будуть відповідно верхні межі коренів — многочленів  $f(t)$  і  $\varphi(t)$ , то всі дійсні додатні корені рівняння (8) задовольняють нерівностям  $\frac{1}{N_2} < t < N_1$ . Розв'язувати рівняння 4-го ступеня зручно методом половинного розв'язання.

Підставивши корінь рівняння (8) у (7), обчислимо кутовий коефіцієнт хорди  $AA_1$ . Після цього, розв'язавши сумісно рівняння

(2) і (3), знайдемо значення параметра  $t$  в точці  $A_1$ :  $t = \frac{kx_0}{y_B - kx_B}$ . Координати точки  $A_1$  одержимо з рівняння (2).

Тепер визначимо в інженерному варіанті задання дугу кривої другого порядку  $A_1C$ , в яку слід продовжити вписання ламаної з

стему двох рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} \frac{x_{B_1} - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y_{B_1} - y_B}{y_C - y_B}; \\ y_{B_1} - y_{A_1} = k_1 (x_{B_1} - x_B), \end{cases} \quad (9)$$

знаходимо координати точки  $B_1$  перетину прямих  $BC$  і  $A_1B_1$ :

$$x_{B_1} = \frac{x_B y_C - x_C y_B + (y_{A_1} - k_1 x_{A_1})(x_C - x_B)}{y_C - y_B - k_1 (x_C - x_B)}, \quad (10)$$

$$y_{B_1} = y_{A_1} + k_1 (x_{B_1} - x_{A_1}).$$

Проективний коефіцієнт  $\gamma_1$  дуги  $A_1C$  визначимо, скориставшись формулою радіуса кривизни в крайній точці  $C/t = 0/R_C = \frac{BC^3}{2\gamma P}$ , де  $P = 2S$  — подвоєна площа базисного трикутника  $ABC$ . Змінною на дузі  $AC$  є точка  $A$ , точка  $C$  — стала, тому  $R_C = \text{const}$  і в кожному окремому випадку

$$\gamma_1 = \frac{B_1 C^3}{2R_C P_i}, \quad (11)$$

де

$$B_1 C = (x_{B_1} - x_C)^2 + (y_{B_1} - y_C)^2, \quad P_i = (x_{A_1} - x_C)(y_{B_1} - y_C) - (x_{B_1} - x_C)(y_{A_1} - y_C).$$

Далі цикл обчислень повторюється. Шляхом перетворення координат переходимо від репера  $R_0$  до репера  $R = \{A_1, i_1, j_1\}$ , вісь абсцис котрого містить хорду  $A_1C$  і аналогічно попередньому, знаходимо координати наступного вузла апроксимації точки  $A_2$  і т. д. Якщо на  $j$ -му кроці виявиться, що параметр  $t$  точки  $K_{j-1}$  або точки  $A_j$  належить множині від'ємних чисел, то останньою вузловою точкою апроксимації дуги  $AC$  хордами буде точка  $C$ .

На завершення відзначимо, що наведений алгоритм реалізований на персональних ЕОМ «Ямаха» і запропонований для впровадження як елемент автоматизованої системи підготовки виробництва на Бердичевській швейній фабриці ім. 60-річчя Радянської України.

Надійшла до редколегії 14.12.89

УДК 515.2

І.В. Сафронєв, канд. техн. наук

# СТАТИКО-ГЕОМЕТРИЧНИЙ СПОСІБ ФОРМУВАННЯ ДИСКРЕТНОЇ КРИВОЇ З ЛАНКАМИ ЗАДАНОЇ ДОВЖИНИ

Процес реалізації алгоритму формування кусочно-лінійної сітки Чебишева [2] організований за ітеративно-рекурсійним принципом: виконується послідовний (у заданому порядку) перебір вузлів, при цьому у розрахунку координат поточного вузла роз-