УДК 621.317.63

Аппроксимация функций преобразования первичных измерительных преобразователей кривыми второго порядка

Ленчук И. Г., Ляшенко Б. Н.

Разработка универсальных методов и средств измерений является неизменной тенденцией развития электроизмерительной техники. Сложные современные объекты исследования, многопараметрические системы автоматического регулирования, управления и контроля, научные эксперименты, производственная практика, пуско-наладочные и ремонтные работы предполагают измерение большого количества физических величин в широком динамическом диапазоне. Эти измерения зачастую выполняются с незначительным разнесением во времени и территориально. Нередко возникает необходимость одновременного измерения как одинаковых, так и различных по своей природе физических величин. Этим обусловлено создание большого ассортимента многофункциональных электроизмерительных устройств (МЭУ): комбинированных и многофункциональных приборов, информационно-измерительных систем (ИИС), измерительно-вычислительных комплексов (ИВК) и др. Такие устройства структурно насыщены значительным количеством различных измерительных преобразователей (ИП).

Существенная составляющая погрешностей МЭУ обусловлена нелинейностью функции преобразования измерительных преобразователей (ФПИП). В работе [2] предложен эффективный метод для ее уменьшения, основанный на полиномиальной линеаризации функции. Сущность метода заключается в приближении функции, заданной таблично, полиномом с последующей заменой его аппроксимирующей ломаной линией (АЛЛ). По координатам вершин АЛЛ синтезируются корректирующие цепи, уменьшающие погрешности ИП. Однако в МЭУ применяются преобразователи, имеющие функции преобразования различной геометрической формы, для которых пока не разработаны универсальные и простые алгоритмы выполнения упомянутых двух аппроксимаций. Недостаточная научная обоснованность существующих унифицированных методов определения координат узлов аппроксимации приводит к неоправданному аппаратурному усложнению МЭУ, увеличению их стоимости, снижению надежности. Для этих целей приходится использовать разноплановые алгоритмы в пределах одного средства измерения, что не позволяет технически широко использовать универсальность МЭУ.

В настоящей работе предлагается алгоритм перехода от таблично заданной функции преобразования к координатам узловых точек ломаной путем предварительной аппроксимации этой функции не полиномом, а кривыми второго порядка.

Отметим, что под погрешностью аппроксимации закономерной кривой касательными, хордами или секущими подразумевается отклонение кривой от отрезков ломаной не по ординате для одного и того же значения аргумента, как это требуется для целей измерительной техники, а по нормалям к кривой. Последнее оказалось удобным для учета особенностей раскроя многокоординатными станками с числовым программным управлением (ЧПУ) листовых и рулонных материалов [3, 5], обработки фасонных поверхностей станками с ЧПУ [1, 4], определения ряда метрических параметров деталей, а также для решения других задач науки и техники, однако не приемлемым для измерительной практики. В приведенном далее алгоритме учитываются специфические требования измерительной техники.

Пусть функция преобразования измерительного преобразователя получена экспериментально в виде таблицы координат x, y дискретного ряда n точек. Особенностью рассматриваемой функции является наличие в общем случае точки перегиба. Поэтому будем применять кусочную аппроксимацию этой функции кривыми второго порядка с соблюдением заданного порядка плавности на стыке.

Для выделения точки перегиба воспользуемся достаточным условием ее принадлежности некоторому участку заданного ряда точек. Определяем значение детерминанта

$$D = \begin{vmatrix} x_{i-1} - x_{i+1} & y_{i-1} - y_{i+1} \\ x_i - x_{i+1} & y_i - y_{i+1} \end{vmatrix}$$

для трех точек дискретного ряда, последовательно придавая i значения 2, 3, 4.... до тех пор, пока знак определителя не изменится на противоположный. На участке $[i,\ i+1]$ располагается искомая точка перегиба. В окрестности ее при фиксированном i выбираем множество из четырех точек функции преобразования $[i-2,\ i+1]$ и заменяем этот участок кубической параболой

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d. \tag{1}$$

Координаты четырех выбранных точек удовлетворяют уравнению (1). Поэтому, составив и решив методом Гаусса систему

$$\begin{cases} y_{i-2} = ax_{i-2}^3 + bx_{i-2}^2 + cx_{i-2} + d; \\ y_{i-1} = ax_{i-1}^3 + bx_{i-1}^2 + cx_{i-1} + d; \\ y_i = ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d; \\ y_{i+1} = ax_{i+1}^3 + bx_{i+1}^2 + cx_{i+1} + d, \end{cases}$$

найдем коэффициенты параболы a, b, c, d. Воспользовавшись известными формулами

$$x_k = -\frac{b}{3a}; \quad y_k = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{cb}{3a} + d; \quad y' = c - \frac{b^2}{3a}, \tag{2}$$

определим координаты точки перегиба и угловой коэффициент касательной в этой точке.

Зная координаты точки перегиба, разбиваем исходный дискретный контур на две части:

$$\begin{aligned} &x_1' = x_k,\ x_2' = x_i,\ x_3' = x_{i-1},\ \ldots,\ x_p' = x_1; \\ &y_1' = y_k,\ y_2' = y_i,\ y_3' = y_{i-1},\ \ldots,\ y_p' = y_1; \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &x_1'' = x_k,\ x_2'' = x_{i+1},\ x_3'' = x_{i+2},\ \ldots,\ x_q'' = x_n; \\ &y_1'' = y_k,\ y_2'' = y_{i+1},\ y_3'' = y_{i+2},\ \ldots,\ y_q'' = y_n, \end{aligned} \tag{3a}$$

где $p = i + 1$, $q = n - i + 1$.

Затем будем кусочно аппроксимировать каждую часть дискретно заданного контура кривыми второго порядка:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{4}$$

при условии, что указанная кривая проходит через первую и последнюю точки рассматриваемого участка функции преобразования, наиболее близко располагается от остальных точек контура и имеет заданную касательную (2) в точке стыка двух соседних участков. Для определения коэффициентов кривой (4) решаем систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} x_j^4 A + 2\sum_{j=1}^{m} x_j^3 y_j B + \sum_{j=1}^{m} x_j^2 y_j^2 C + 2\sum_{j=1}^{m} x_j^3 D + 2\sum_{j=1}^{m} x_j^2 y_j E +$$

$$+ \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_m^2 + \lambda_3 x_1 = -F\sum_{j=1}^{m} x_j^2,$$

$$2\sum_{j=1}^{m} x_j^3 y_j A + 4\sum_{j=1}^{m} x_j^2 y_j^2 B + 2\sum_{j=1}^{m} x_j y_j^3 C + 4\sum_{j=1}^{m} x_j^2 y_j D + 4\sum_{j=1}^{m} x_j y_j^2 E + 2\lambda_1 x_1 y_1 +$$

$$+ 2\lambda_2 x_m y_m + \lambda_3 (x_1 y' + y_1) = -2F\sum_{j=1}^{m} x_j y_j;$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_j^2 y_j^2 A + 2\sum_{j=1}^{m} x_j y_j^3 B + \sum_{j=1}^{m} y_j^4 C + 2\sum_{j=1}^{m} x_j y_j^2 D + 2\sum_{j=1}^{m} y_j^3 E + \lambda_1 y_1^2 +$$

$$+ \lambda_2 y_m^2 + \lambda_3 y_1 y' = -F\sum_{j=1}^{m} y_j^2; \qquad (5)$$

$$2\sum_{j=1}^{m} x_j^3 A + 4\sum_{j=1}^{m} x_j^2 y_j B + 2\sum_{j=1}^{m} x_j y_j^2 C + 4\sum_{j=1}^{m} x_j^2 D + 4\sum_{j=1}^{m} x_j y_j E +$$

$$+ 2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_2 x_m + \lambda_3 = -2F\sum_{j=1}^{m} x_j;$$

$$2\sum_{j=1}^{m} x_j^2 y_j A + 4\sum_{j=1}^{m} x_j y_j^2 B + 2\sum_{j=1}^{m} y_j^3 C + 4\sum_{j=1}^{m} x_j y_j D + 4\sum_{j=1}^{m} y_j^2 E +$$

$$+ 2\lambda_1 y_1 + 2\lambda_2 y_m + \lambda_3 y' = -2F\sum_{j=1}^{m} y_j,$$

$$x_1^2 A + 2x_1 y_1 B + y_1^2 C + 2x_1 D + 2y_1 E = -F;$$

$$x_m^2 A + 2x_m y_m B + y_m^2 C + 2x_m D + 2y_m E = -F;$$

$$x_1 A + (x_1 y' + y_1) B + y_1 y' C + D + y' E = 0,$$

выбрав F так, чтобы коэффициенты A, B, C, D и E принимали числовые значения, подходящие для практических расчетов. Здесь $m=p$ на первом участке и $m=q$ — на втором.

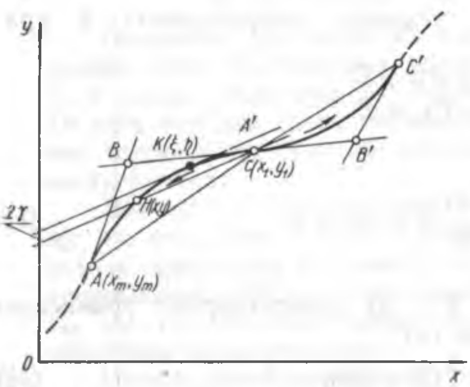

Рис. 1

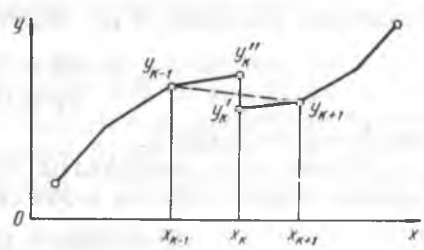

Рис. 2

Таким образом, от дискретного задания функции преобразования переходим к ее кусочному представлению кривыми второго порядка в общем виде. Теперь каждую дугу от точки перегиба графика (рис. 1) следует аппроксимировать секущими с допуском γ вдоль координатной оси Oy.

Первоначально в дугу кривой второго порядка CA впишем ломаную с допуском 2γ вдоль указанной координатной оси. Пусть первый участок ломаной — хорда CH принадлежит точке $C(x_1, y_1)$ и имеет угловой коэффициент k. Тогда уравнение прямой, содержащей хорду, можно записать в виде

$$y-y_1=k(x-x_1), \tag{6}$$

а уравнение касательной к дуге кривой второго порядка CA, параллельной хорде CH, будет представлено выражением

$$Y-\eta=k(X-\xi), \tag{7}$$

где ξ, η — координаты точки касания K.

Если из равенства (6) вычесть равенство (7), то при фиксированном $x=X$ получим формулу разности начальных ординат рассматриваемых секущей и касательной:

$$y-Y=y_1-\eta+k(\xi-x_1). \tag{8}$$

Очевидно, что начальная ордината касательной больше начальной ординаты секущей в случае, когда дуга кривой второго порядка выпуклая, и меньше — для вогнутой дуги кривой. Абсолютная величина их разности равна 2γ. С целью машинного определения выпуклости (вогнутости) закономерной линии найдем площадь S базисного треугольника ABC, описанного около дуги кривой второго порядка CA, где B — точка пересечения касательных к указанной дуге в граничных точках A и C. После чего (8) перепишем в виде

$$\eta-k(\xi-x_1)=y_1-2\gamma\,\mathrm{sign}\,S, \tag{9}$$

где

$$S=\frac{1}{2}[(x_m-x_1)(y_B-y_1)-(x_B-x_1)(y_m-y_1)];\quad x_B=\frac{\Delta_1}{\Delta};\quad y_B=\frac{\Delta_2}{\Delta};$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}P & P'\\ R & R'\end{vmatrix};\qquad \Delta_1=-\begin{vmatrix}Q & Q'\\ R & R'\end{vmatrix};\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}Q & Q'\\ P & P'\end{vmatrix};$$

$$P=Ax_m+By_m+D;\quad R=Bx_m+Cy_m+E;\quad Q=Dx_m+Ey_m+F;$$

$$P'=y';\quad R'=-1;\quad Q'=y_1-y'x_1.$$

С другой стороны, уравнение касательной к дуге кривой второго порядка в точке с координатами ξ, η имеет вид

$$(A\xi+B\eta+D)\,x+(B\xi+C\eta+E)\,y+(D\xi+E\eta+F)=0. \tag{10}$$

Отсюда легко находим величину углового коэффициента k прямой (10):

$$k=-\frac{A\xi+B\eta+D}{B\xi+C\eta+E}.$$

Подставив последнее в (9), получим

$$\eta+\frac{A\xi+B\eta+D}{B\xi+C\eta+E}(\xi-x_1)=\lambda, \tag{11}$$

где $\lambda=y_1-2\gamma\,\mathrm{sign}\,S$.

Кроме того, координаты точки $K(\xi,\ \eta)$ удовлетворяют уравнению кривой второго порядка в общем виде (4):

$$A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2+2D\xi+2E\eta+F=0. \tag{12}$$

Решив систему двух уравнений (11) и (12), найдем координаты точки касания K:

$$\xi_{1,2}=\frac{-R\pm\sqrt{R^2-LT}}{L};\qquad \eta_{1,2}=M\xi_{1,2}+N, \tag{13}$$

где

$$M=-\frac{Ax_1+B\lambda+D}{E+Bx_1+C\lambda};\qquad N=-\frac{Dx_1+E\lambda+F}{E+Bx_1+C\lambda},$$

$$L=A+2BM+CM^2;\quad R=BN+CMN+D+EM;$$

$$T=CN^2+2EN+F.$$

Известно, что в общем случае к кривой второго порядка можно провести две касательные с одним и тем же угловым коэффициентом. В данном случае из двух найденных точек касания $K(\xi, \eta)$ следует выбрать точку, принадлежащую внутренней области треугольника, одной вершиной которого является начало искомой аппроксимирующей хорды — переменная точка в процессе аппроксимации, а две другие — ранее определенные вершины базисного треугольника ABC, отличные от точки перегиба. Необходимым и достаточным условием принадлежности точки $K(\xi, \eta)$ треугольнику CBA (к примеру) является условие

$$K(\xi, \eta) \in \Delta CBA \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \delta_{1,2}(\xi, \eta)\, \delta_{1,2}(x_C, y_C) \geqslant 0; \\ \delta_{1,3}(\xi, \eta)\, \delta_{1,3}(x_B, y_B) \geqslant 0; \\ \delta_{2,3}(\xi, \eta)\, \delta_{2,3}(x_A, y_A) \geqslant 0, \end{array} \right. \tag{14}$$

где

$$\delta_{i,j}(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} \xi - x_i & \eta - y_i \\ x_j - x_i & y_j - y_i \end{vmatrix}.$$

Зная координаты точки касания и принимая во внимание, что искомая хорда параллельна касательной к кривой второго порядка в точке $K(\xi, \eta)$, решаем совместно уравнение прямой, содержащей хорду CH с известным уже угловым коэффициентом k:

$$Y - y_1 = -\frac{A\xi + B\eta + D}{B\xi + C\eta + E}(X - x_1), \tag{15}$$

и уравнение линии второго порядка, которому удовлетворяют координаты точки $H(X, Y)$ — второй узловой точки аппроксимации:

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DX + 2EY + F = 0. \tag{16}$$

Находим

$$X_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - LT}}{L}; \qquad Y_{1,2} = kx_{1,2} + Z, \tag{17}$$

где

$$Z = y_1 - kx_1; \quad L = A + 2Bk + Ck^2;$$
$$R = BZ + CkZ + D + Ek; \quad T = CZ^2 + 2EZ + F.$$

Очевидно, что одна из двух найденных точек уже известна на кривой. Это предыдущая узловая точка аппроксимации. Координаты X, Y точки, отличной от указанной, принадлежат искомой точке H. То есть эти две точки определяют хорду, которая заменяет дугу кривой второго порядка на данном участке с погрешностью 2γ по разности ординат.

Все прочие вершины вписанной ломаной определяем согласно тому же алгоритму, положив каждый раз $x_1 = X$ и $y_1 = Y$. Если на каком-то шаге одна из точек $H(X, Y)$ окажется за пределами базисного треугольника ABC, то последней узловой будет точка с координатами x_m, y_m. Полученный таким образом ряд точек фиксируем в порядке, обратном аппроксимации.

Используя эти правила, впишем ломаную в дугу кривой второго порядка $A'C'$, представляющую собой второй участок контура от точки перегиба. Здесь узловые точки фиксируем в порядке аппроксимации.

От аппроксимации дуг кривых второго порядка хордами с допуском 2γ к аппроксимации секущими с допуском γ переходим, воспользовавшись элементарным преобразованием плоскости — параллельным переносом по направлению оси (Oy):

$$\bar{x}_i = x_i;$$

$$\bar{y}_i = y_i + \gamma \text{ для выпуклых участков } (\operatorname{sign} S = -1);$$

$$\bar{y}_i = y_i - \gamma \text{ для вогнутых участков } (\operatorname{sign} S = 1).$$

Здесь i изменяется от 1 до n, где n — количество всех узловых точек.

Заметим, что вследствие последнего преобразования результирующая дискретная функция будет иметь точку разрыва с абсциссой точки перегиба. То есть одному и тому же значению x_k соответствуют два разных значения y'_k и y''_k. С целью достижения взаимно однозначного соответствия между абсциссами и ординатами узловых точек аппроксимации два участка ломаной $[k—1, k]$ и $[k, k+1]$ заменяем одним $[k—1, k+1]$. Очевидно, что последний отрезок прямой не может выйти за пределы полосы допуска в 2γ (рис. 2).

В случае, когда исходная функция преобразования не имеет точки перегиба, алгоритм решения поставленной задачи несколько упрощается. В частности, аппроксимация кривой второго порядка осуществляется исходя из требования ее прохождения через первую и последнюю точки дискретно заданного контура. При этом для определения коэффициентов A, B, C, D и E линии (4) достаточно решить соответствующую систему семи уравнений с семью неизвестными. Несколько иной вид примут также формулы (9): значения P', R' и Q' определим согласно выражениям

$$P' = Ax_1 + By_1 + D; \quad R' = Bx_1 + Cy_1 + E; \quad Q' = Dx_1 + Ey_1 + F.$$

Таким образом, приведенная в настоящей работе вычислительная схема позволяет унифицировать процесс линеаризации ФПИП, т. е. независимо от ее геометрической формы можно пользоваться единым алгоритмом перехода от таблично заданной функции к координатам узлов аппроксимации секущими посредством промежуточного приближения ФП кривыми второго порядка. Компактность вычислительной схемы позволила авторам реализовать указанный алгоритм на ЭВМ.

1. *Бадаев Ю. И.* Аппроксимация выпуклых поверхностей отсеками плоскостей.— Прикл. геометрия и инженерная графика, 1975, вып. 19, с. 133—135.
2. *Гринберг И. П.* Теоретические основы полиномиальной линеаризации функции преобразования измерительных преобразователей.— Техн. электродинамика, 1981, № 5, с. 96—101.
3. *Ленчук И. Г., Павленко Ю. С., Павлов А. В.* Аппроксимация контуров кривыми второго порядка в задачах автоматизации раскроя.— Изв. вузов. Технология легкой промышленности, 1978, № 4, с. 120—126.
4. *Павлов А. В., Бадаев Ю. И.* Аппроксимация поверхностей с отрицательной гауссовой кривизной отсеками плоскостей.— Прикл. геометрия и инженерная графика, 1976, вып. 21, с. 3—6.
5. *Павлов А. В., Ленчук И. Г., Павленко Ю. С.* Подготовка формообразующих программ для автоматического раскроя материалов на детали швейных изделий.—Там же, 1979, вып. 27, с. 25—28.
6. *Родин П. Р., Линкин Г. А., Татаренко В. Н.* Обработка фисонных поверхностей на станках с числовым программным управлением.— Киев : Техніка, 1976.—198 с.

Поступила 31.05.82 г.

ПОПРАВКА

В журнале № 1 за 1983 г. в списке авторов номера следует читать Михайлов Валерий Михайлович, канд. техн. наук, доцент Харьковского политехнического института.