ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
ТЕХНОЛОГИЯ ЛЕГКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ, № 4, 1977

УДК 515.2:687.022.001.5

Кусочно-линейная аппроксимация контуров деталей швейных изделий с заданным допуском

Инж. И. Г. ЛЕНЧУК
Житомирский филиал
Киевского политехнического института
Канд. техн. наук доц. Ю. С. ПАВЛЕНКО
Киевский технологический институт
легкой промышленности
Канд. техн. наук В. И. ЗАЛЕВСКИЙ,
докт. техн. наук проф. А. В. ПАВЛОВ
Киевский политехнический институт

Автоматизация процесса раскроя материалов в легкой промышленности безнастильным методом с помощью универсального режущего инструмента предполагает предварительную разработку алгоритмов вычислений для систем или станков с программным управлением, а также подготовку исходных данных для реализации этих алгоритмов воспроизводящими органами автоматических устройств.

Можно предложить два режима работы автоматических систем или станков с программным управлением в зависимости от сложности криволинейных срезов контура детали, выкройку которой следует получить.

Метод кусочно-линейной аппроксимации исходного контура детали изделия швейной промышленности простотой программы выгодно отличается от других существующих до настоящего времени методов. Для контуров, у которых криволинейные срезы имеют сравнительно небольшую кривизну, этот метод вполне приемлем и с точки зрения небольшого количества узлов аппроксимации (точек, координаты которых следует замерять считывающим устройством), при достаточно высокой степени точности приближения к исходному контуру.

Но с увеличением кривизны криволинейных срезов, для поддержания необходимой точности, приходится значительно уменьшать шаг кусочно-линейной аппроксимации, что, в свою очередь, приводит к резкому увеличению количества узловых точек, а это не совсем выгодно при подготовке исходной информации, в смысле большого количества замеров.

В этом случае предполагается предварительно аппроксимировать исходный криволинейный контур детали кривыми второго порядка в инженерном варианте задания. Информация о плоском контуре задается в виде одномерного массива F, независимо от его сложности,

$$F(N) = x_{A_1},\ y_{A_1},\ x_{B_1},\ y_{B_1},\ f_1,\ x_{C_1},\ y_{C_1},\ x_{B_2},\ y_{B_2},\ f_2,\ x_{C_2},\ y_{C_2},\ \ldots,\ x_{B_N},\ y_{B_N},\ f_N,\ x_{C_N},\ y_{C_N}, \tag{1}$$

(x_{B_j}, y_{B_j}) — координаты точки B пересечения касательных к кривой второго порядка, проведенных в точках A и C;

f_j — проективный дискриминант (различитель) кривой (рис. 1).

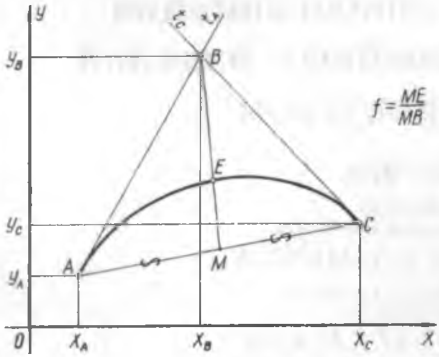

Рис. 1.

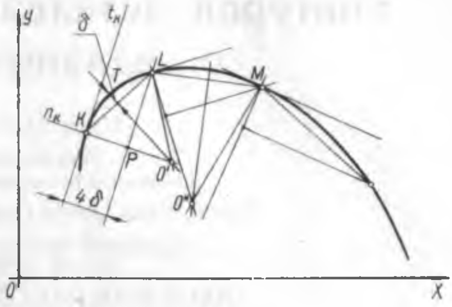

Рис. 2.

Прямая задается аналогично кривой второго порядка, то есть точки A и C — граничные точки отрезка прямой; B — точка на прямой $\left(\text{например, } x_B = \frac{x_A + x_C}{2},\ y_B = \frac{y_A + y_C}{2}\right)$, а дискриминант f равен нулю. В дальнейшем предполагается осуществить кусочно-линейную аппроксимацию криволинейных срезов приведенного контура детали.

Рассмотрим вычислительную схему вписания в кривую второго порядка упорядоченной последовательности точек с наперед заданным допуском δ. В точке $K(x_i, y_i)$ (рис. 2), с которой начинается процесс вписания точек, восстанавливаем нормаль к кривой второго порядка. Откладываем на нормали отрезок 4δ и определяем точку $P(x_p, y_p)$ на нормали — конец отрезка 4δ. Через точку P проводим секущую перпендикулярно нормали. Находим точку L пересечения секущей с кривой второго порядка. Тогда стрелка прогиба на участке KL не превышает δ.

Действительно, если предположить, что для достаточно малого δ кривизна кривой в точках K и T одинакова, то можно записать

$$\frac{KL}{2} = \sqrt{R^2 - (R-\delta)^2}, \text{ или } KL = 2\sqrt{2R\delta - \delta^2},$$

где R — радиус кривизны кривой второго порядка в точке K.

Из треугольников KLP и PLO имеем:

$$PL^2 = KL^2 - KP^2 \text{ и } PL^2 = R^2 - (R-KP)^2,$$

откуда

$$KL^2 - KP^2 = R^2 - (R-KP)^2,$$

$$KP = \frac{4R\delta - 2\delta^2}{R} = 4\delta - \frac{2\delta^2}{R}.$$

Но так как $\delta \ll R$, то $KP \approx 4\delta$.

$$x_t'(x_P - x_i) + y_t'(y_P - y_i) = 0,$$
$$(4\delta)^2 = (x_P - x_i)^2 + (y_P - y_i)^2, \quad (2$$

где первое уравнение — уравнение нормали к кривой второго порядка точке $K\ (x_i,\ y_i)$; второе — расстояние между точками K и P, выражен ное через координаты этих точек. Здесь

$$x_P = x_i - 4\delta \frac{y_t'}{\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}},$$

$$y_P = y_i + 4\delta \frac{x_t'}{\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}}, \quad (3$$

где x_t', y_t' — производные от x и y по параметру t, вычисленные в точк $K\ (x_i,\ y_i)$.

Если учесть, что параметрическое уравнение кривой второго поряд ка имеет вид (алгоритм В. А. Надолинного)

$$x = \frac{x_A\,\gamma t^2 + x_B\,t + x_C}{1 + t + \gamma t^2},$$

$$y = \frac{y_A\,\gamma t^2 + y_B\,t + y_C}{1 + t + \gamma t^2}, \quad (4$$

где $\gamma = \left(\frac{1 - f}{2f}\right)^2$, то

$$x_t' = \frac{(x_A - x_i)(1 + 2\gamma t) + (x_B - x_A)}{1 + t + \gamma t^2},$$

$$y_t' = \frac{(y_A - y_i)(1 + 2\gamma t) + (y_B - y_A)}{1 + t + \gamma t^2}. \quad (5$$

Очевидно, чтобы выполнялся процесс вписания точек в кривую, н обходимо, чтобы точка $P\ (x_p,\ y_p)$ всегда была отложена на нормали направлении к центру кривизны заданной кривой в точке $K\ (x_i,\ y$ (противоположном направлению выпуклости). Известно, что если кр визна положительна ($k > 0$), то центр кривизны лежит на положительн полупрямой нормали, а если кривизна отрицательна ($k < 0$) — на отр цательной. Поэтому формулы (3), которые зависят от направления вы пуклости дуги кривой второго порядка, перепишем в виде

$$x_P = x_i - 4\delta \frac{y_t'}{\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}} \cdot \operatorname{sign}(k),$$

$$y_P = y_i + 4\delta \frac{x_t'}{\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}} \cdot \operatorname{sign}(k), \quad ($$

где

$$k = \frac{y_t''\,x_t' - x_t''\,y_t'}{\sqrt{[(x_t')^2 + (y_t')^2]^3}} \quad \text{и}$$

$$\operatorname{sign}(k) = \begin{cases} \ldots \\ 0 \text{ при } k=0, \\ -1 \text{ при } k<0. \end{cases}$$

Причем в формуле кривизны следует вычислять только числитель, так как нам важен знак ее, а не значение. При этом

$$x_t'' = 2 \cdot \frac{\gamma(x_A - x_t) - x_t'(1+2\gamma t)}{1+t+\gamma t^2},$$

$$y_t'' = 2 \cdot \frac{\gamma(y_A - y_t) - y_t'(1+2\gamma t)}{1+t+\gamma t^2}. \tag{7}$$

Уравнение нормали (2) к кривой второго порядка в точке K можно переписать в виде

$$y_P = \frac{y_t' y_t + x_t' x_t}{y_t'} - \frac{x_t'}{y_t'} \cdot x_P. \tag{8}$$

Так как прямая, проходящая через точку P, перпендикулярна нормали (8), то, согласно условию перпендикулярности двух прямых $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, уравнение этой прямой может быть представлено выражением

$$y - y_P = \frac{y_t'}{x_t'}(x - x_P), \tag{9}$$

где x, y — текущие координаты прямой.

Или в параметрическом виде

$$\begin{aligned} x &= x_P + x_t' \cdot u, \\ y &= y_P + y_t' \cdot u. \end{aligned} \tag{10}$$

Для определения координат точки L пересечения прямой, перпендикулярной нормали, с кривой второго порядка, решаем совместно уравнение (9) с параметрическим уравнением кривой (4). Подставляем в (9) вместо x и y их значения из (4):

$$y_t' \cdot \frac{x_A \gamma t^2 + x_B t + x_C}{1+t+\gamma t^2} - x_t' \frac{y_A \gamma t^2 + y_B t + y_C}{1+t+\gamma t^2} + x_t' y_P - y_t' x_P = 0.$$

Избавившись от знаменателя и приведя подобные члены, получим

$$[(x_A - x_P)y_t' - (y_A - y_P)x_t']\gamma t^2 + [(x_B - x_P)y_t' - (y_B - y_P)x_t']t + \\ + [(x_C - x_P)y_t' - (v_C - y_P)x_t'] = 0. \tag{11}$$

Решив квадратное уравнение относительно t, будем иметь

$$t_1 = A + \sqrt{A^2 + B^2}, \quad t_2 = A - \sqrt{A^2 + B^2},$$

где

$$A = \frac{(y_B - y_P)x_t' - (x_B - x_P)y_t'}{2\gamma[(x_A - x_P)y_t' - (y_A - y_P)x_t']};$$

$$B = \frac{(y_C - y_P)x_t' - (x_C - x_P)y_t'}{\gamma[(x_A - x_P)y_t' - (y_A - y_P)x_t']}. \tag{12}$$

Таким образом, из уравнения (11) можно получить два, один или ни одного действительного параметра t, что свидетельствует о пересечересекается не со всей кривой, а только с ее дугой AC, то значение параметра t необходимо выбирать из условия $0 \leqslant t \leqslant \infty$. Если оба значения t удовлетворяют этому условию, то это означает, что обе точки пересечения прямой с кривой второго порядка принадлежат дуге AC. В этом случае выбираем меньшее из них, так как при разбиении кривой движемся от точки A к точке C, то есть в направлении убывания параметра t. Если одно значение t удовлетворяет этому условию, то прямая пересекает дугу AC в одной точке. И если оба значения t_1 и t_2 отрицательны, то прямая с дугой АС не пересекается.

Проверка знаменателя в (12) на равенство нулю не нужна, так как в нашем случае прямая всегда пересекает кривую второго порядка в двух точках. Подставив значение t, вычисленное из (11), в уравнение кривой второго порядка (4), получим искомые координаты точки L.

В дальнейшем аналогично находятся координаты последующей узловой точки M упорядоченного ряда с тем же допуском δ. И так далее. Так как контур детали швейной промышленности всегда замкнутый, то координаты начальной и конечной точек аппроксимации должны совпадать.

Таким образом, на криволинейных участках дуга кривой второго порядка заменяется ломаной и воспроизводящий орган универсального режущего инструмента передвигается между узловыми точками по отрезкам прямых.

Имея все необходимые вычислительные формулы, составляем алгоритм разбивки контуров, составленных из отрезков прямых и дуг кривых второго порядка, точками с наперед заданным допуском. Блок-схема алгоритма представлена на рис. 3.

В комплексе с алгоритмом кусочно-линейной аппроксимации исходного контура детали алгоритм аппроксимации приведенного контура дает возможность, при незначительных затратах времени на подготовку исходной информации, успешно осуществлять воспроизведение контуров деталей швейных изделий посредством автоматических систем или станков с программным управлением.

Следует также отметить, что предложенный алгоритм может быть использован для вычисления длины приведенного контура детали изделия швейной промышленности. В этом случае при определении координат каждой последующей узловой точки кусочно-линейной аппроксимации необходимо находить расстояние к ней от соответствующей предыдущей точки по формуле

$$d_i = \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2}. \qquad (1$$

Опытным путем установлено, что при допуске $\delta = 0{,}1$ мм на участках контура, где кривизна криволинейного среза сравнительно не большая, длина каждой из хорд аппроксимации не превышает $d_i = 15$ м. При этом $d_i \ll R$. С увеличением кривизны эти прямолинейные отрезки значительно уменьшаются. Это допускает между каждой парой соседних узловых точек аппроксимации дугу кривой второго порядка заменить дугой окружности, проходящей через три точки K, T и L (рис. 2). И длину дуги KL определить либо по формуле П. Л. Чебышева

$$l_i = \sqrt{d_i^2 + 5\frac{1}{3}\delta^2}, \qquad (1$$

$$l_i = \frac{4}{3}\sqrt{d_i^2 + 4\delta^2} - \frac{d_i}{3}. \tag{15}$$

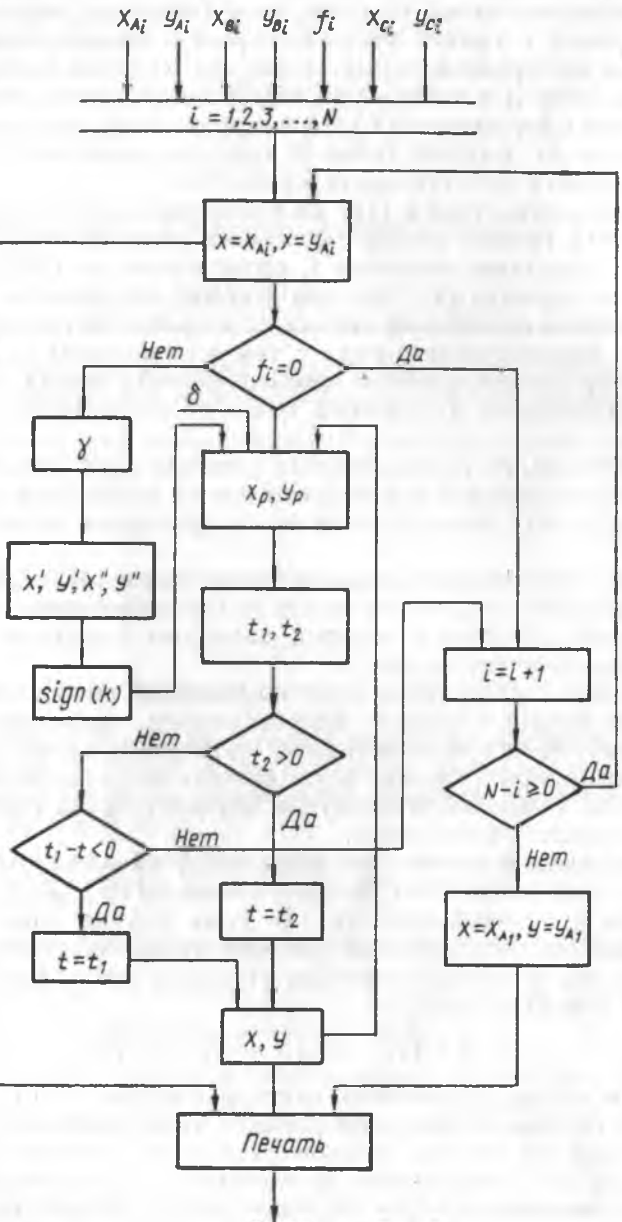

Рис. 3.

Алгебраическая сумма длин прямолинейных участков контура детали d_i и длин отрезков дуг кусочно-линейной аппроксимации всех криволинейных срезов l_i даст искомую величину длины контура детали

денного контура задается исполнителем с учетом требуемой точности, т
погрешностями такой аппроксимации можно пренебречь.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Андреев, В. А. Зворыкин и др., Расчет и построение контуров са молета на плазе, Оборонгиз, 1960.

2. А. Н. Дыков, Ю. С. Павленко, Известия вузов, «Технология легкой про мышленности», № 3, 1971.

3. П. К. Рашевский, Дифференциальная геометрия, Физматгиз, 1956.

4. И. И. Привалов, Аналитическая геометрия, «Наука», 1964.

Рекомендована кафедрой инженерной графики ЖФ КПИ

Поступила в редакцию 19 марта 1976 г.