УДК 515.2:687.022.001.5

Аппроксимация контуров кривыми второго порядка в задачах автоматизации раскроя

Инж. И. Г. ЛЕНЧУК

Житомирский филиал Киевского ордена Ленина политехнического института

Канд. техн. наук доц. Ю. С. ПАВЛЕНКО

Киевский технологический институт легкой промышленности

Докт. техн. наук проф. А. В. ПАВЛОВ

Киевский ордена Ленина политехнический институт

Одним из наиболее эффективных методов повышения производительности труда, улучшения качества выпускаемой продукции, экономии материалов на предприятиях швейной промышленности страны является автоматизация раскроя текстильных материалов безнастильным поточным методом на базе числового программного управления.

Создание автоматизированного комплекса для раскроя текстильных материалов на детали швейных изделий с широким размеро-ростовочным ассортиментом представляет собой достаточно сложную научно-техническую проблему, требующую решения целого ряда задач. Работы, проводимые на кафедре начертательной геометрии и инженерной графики Киевского политехнического института в творческом содружестве с кафедрой автоматизации химико-технологических процессов Киевского технологического института легкой промышленности, являются частью решаемой проблемы.

Разработка систем программного управления процессами раскроя выдвигает на первый план задачу математического описания контуров раскраиваемых деталей с максимально возможным уплотнением информации о них в программах автоматизированного раскроя.

В настоящее время вся информация о деталях швейных изделий задается в аналоговых формах в виде лекал или их рисунков. Контур детали состоит из отрезков прямых и дуг незакономерных кривых.

В зависимости от сложности криволинейных срезов возможны два метода подготовки контуров деталей швейных изделий к считыванию числовых исходных данных посредством КСУ, а равно две системы математического обеспечения станков с программным управлением или автоматических раскройных машин:

простотой программ выгодно отличается от других существующих методов. Для контуров с криволинейными срезами небольшой кривизны (кривизна оценивается визуально по чертежу детали) этот метод вполне приемлем и с точки зрения небольшого количества узлов аппроксимации при достаточно высокой степени точности приближения к исходному контуру. На криволинейных срезах, у которых кривизна в отдельных точках сравнительно большая, для поддержания необходимой точности приходится значительно уменьшать шаг кусочно-линейной аппроксимации, что влечет за собой увеличение количества узловых точек, а значит, увеличение количества замеров координат этих точек на координатно-считывающем устройстве, и соответственно размеров входных массивов.

2. В случае аппроксимации исходного контура кривыми второго порядка в инженерном варианте задания [1] информация о нем задается либо в виде одномерных массивов: $x[j]$, $y[j]$ — координаты вершин исходного n-угольника; $x_в[j]$, $y_в[j]$ — координаты вершин каждого из базисных треугольников, не являющиеся вершинами контура; $f[j]$ — значения дискриминантов кривой второго порядка на каждом участке контура ($j=1, 2, 3, \ldots, n$), либо в виде одномерного массива:
$P[R]=x_{A_1}, y_{A_1}, x_{B_1}, y_{B_1}, f_1, x_{C_1}, y_{C_1}, x_{B_2}, y_{B_2}, f_2, x_{C_2}, y_{C_2}, \ldots, x_{B_n}, y_{B_n}, f_n, x_{A_1}, y_{A_1}$, где $R=5n+2$; x_{A_j}, y_{A_j} и x_{C_j}, y_{C_j} — координаты точек A и C, ограничивающих дугу кривой второго порядка; x_{B_j}, y_{B_j} — координаты точки B пересечения касательных к кривой второго порядка, проведенных в точках A и C; f_j — дискриминант кривой. Прямая задается аналогично кривой второго порядка, то есть точки A и C — граничные точки отрезка прямой; B — точка на прямой (например, середина отрезка), а дискриминант f равен нулю (рис. 1).

Экспериментально установлено, что контуры деталей швейных изделий выгоднее аппроксимировать кривыми второго порядка, так как при этом количество замеров координат точек при последовательном обходе по периметру контура в среднем на 37,3% меньше, чем при кусочно-линейной аппроксимации. При этом процесс подготовки контура к считыванию значительно упрощается ввиду того, что на каждом криволинейном срезе замеру подлежат координаты строго определенного количества точек — x_{ji}, y_{ji}, где $i=1, 2, 3$.

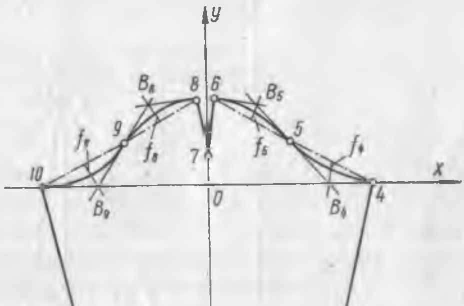

Рис. 1. Контур детали аппроксимированный кривыми 2-го порядка.

С целью оценки погрешностей результатов приведения криволинейных срезов деталей швейных изделий к кривым второго порядка разработан алгоритм вычисления отклонений точек исходной незакономерной кривой от соответствующих точек аппроксимирующей линии — по нормалям к последней. При этом криволинейный срез контура задается ряуравнениями [6]

$$x = \frac{x_A \gamma t^2 + x_B t + x_C}{\gamma t^2 + t + 1},$$
$$y = \frac{y_A \gamma t^2 + y_B t + y_C}{\gamma t^2 + t + 1}, \qquad (1)$$

где t — параметр;

$\gamma = \left(\frac{1-f}{2f}\right)^2$ — проективный коэффициент кривой.

Уравнение нормали (рис. 2), проведенной из произвольной точки $\bar{K}$ $(\bar{x}, \bar{y})$, ряда 1, 2, 3, ..., m к кривой (1), имеет вид

$$x'_t(\bar{x} - x) + y'_t(\bar{y} - y) = 0. \qquad (2)$$

Для определения координат x, y точки K — основания нормали на кривой второго порядка — решаем совместно уравнение нормали (2) с параметрическим уравнением кривой (1). Длину отрезка $\overline{KK}$ определяем по известной из курса аналитической геометрии формуле

$$K\bar{K} = \sqrt{(\bar{x} - x)^2 + (\bar{y} - y)^2}.$$

Результаты счета на конкретных изделиях показывают, что точность аппроксимации в среднем в 10 раз точнее допусков, установленных техническими условиями на раскладку лекал и выкроенные детали [8].

В связи с тем, что в системах с программным управлением в течение одного кадра универсальный режущий инструмент перемещается пря-

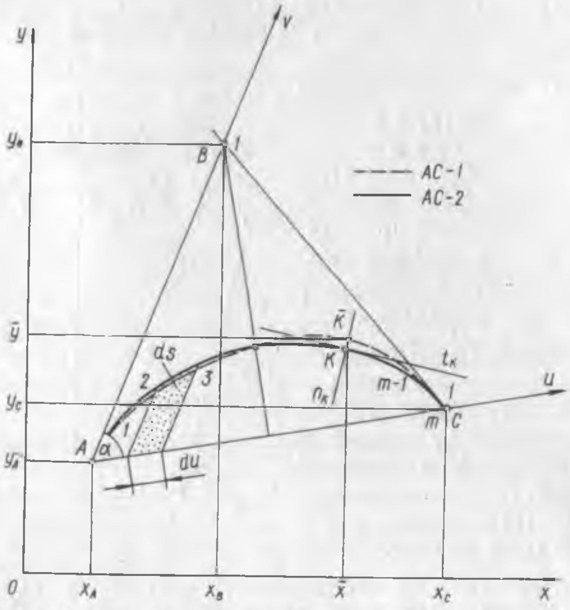

Рис. 2. Площадь сегмента кривой 2-го порядка. Оценка погрешностей аппроксимации кривыми 2-го порядка.

Вычислительная схема алгоритма [illegible] упорядоченной последовательности точек с наперед заданным допуском [2] представлена на рис. 3.

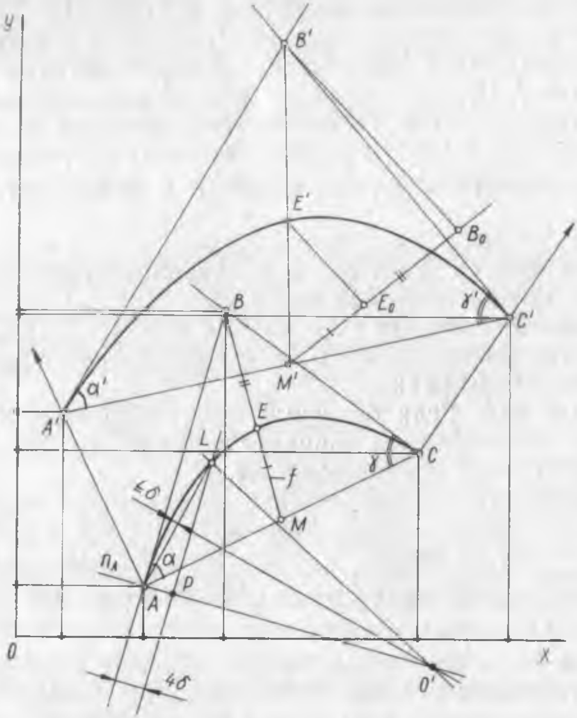

Рис. 3. Вписание в кривую 2-го порядка ломаной с допуском δ. Техническое размножение деталей.

В точке $A(x_A, y_A)$, с которой начинается процесс вписания точек — узлов аппроксимации, восстанавливаем нормаль к кривой второго порядка (рис. 3). Откладываем на нормали отрезок 4δ и определяем точку $P(x_P, y_P,$ Через точку P проводим секущую, перпендикулярную нормами. Находим точку L пересечения секущей с кривой второго порядка. Тогда стрелка прогиба на участке AL не превышает δ. Так как величина допуска задается исполнителем с учетом необходимой степени точности, погрешностями такой аппроксимации можно пренебречь.

Одной из задач математического обеспечения автоматизированных систем раскроя материалов на детали швейных изделий является задача технического размножения деталей. Решение ее предусматривает машинное получение геометрической информации о деталях изделий конструктивной группы всех размеров и ростов.

Разработанные графический и аналитический алгоритмы технического размножения для случая аппроксимации деталей кривыми второго порядка [1] значительно проще, чем при кусочно-линейной аппроксимации [4] тех же контуров. В основу их положено простейшее преобраконтуре (например, среднего размера и определенного роста) в виде массивов: $x_м[j]$, $y_м[j]$, $x_{B_м}[j]$, $y_{B_м}[j]$, $F[j]$, предполагается известным закон перемещения каждой из вершин контура $j=1, 2, 3, \ldots, n$ в плоскости чертежа. Например, координаты этих точек для произвольного размера выше среднего в ранее выбранном росте: $x_к[j], y_к[j]$.

Рассмотрим кривую второго порядка (рис. 3), заданную координатами вершин $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ и $C(x_C, y_C)$ базисного треугольника ABC и дискриминантом f. Пусть каждая из точек A и C, перемещаясь равномерно и прямолинейно в плоскости чертежа, занимает в конечном счете положение $A'(x'_A, y'_A)$ и $C'(x'_C, y'_C)$ соответственно. Требуется построить кривую второго порядка, подобную заданной и проходящую через точки A' и C'.

Доказываются следующие утверждения.

Лемма. В гомотетии касательная к заданной кривой преобразуется в касательную к кривой, подобной заданной.

Теорема прямая. Если две дуги кривых второго порядка в инженерном варианте задания подобны, то их базисные треугольники тоже подобны, а дискриминанты равны.

Теорема обратная. Если базисные треугольники двух дуг кривых второго порядка в инженерном варианте задания подобны, а их дискриминанты равны, то такие кривые подобны.

Таким образом, критерием решения поставленной задачи является: постоянство углов между хордой, стягивающей дугу в начальной и конечной точках, и касательными к ней в этих точках соответственно, а также равенство дискриминантов — $\alpha(AB,\hat{}AC)=\alpha'(A'B',\hat{}A'C')$; $\gamma(CB,\hat{}AC)=\gamma'(C'B',\hat{}A'C')$, $f=f'$.

Алгоритм технического размножения деталей швейных изделий в комплексе с алгоритмом кусочно-линейной аппроксимации приведенных контуров дает возможность с помощью автоматических систем с программным управлением вычерчивать разводки деталей или вырезать последовательно все детали одной и той же разводки.

Одним из основных метрических параметров, которые следует учитывать при нормировании расхода тканей и других вспомогательных материалов на швейные изделия, является параметр площади детали изделия. От этого параметра в значительной степени зависит правильность расчетов при планировании и использовании швейных материалов.

Сущность разработанного графоаналитического метода определения площади деталей швейных изделий заключается в следующем:

контур детали дополняют до прямолинейного, заменив криволинейные участки хордами, стягивающими их в крайних точках (рис. 1);

методом треугольников (трапеций) находят площадь прямолинейного n-угольника;

находят площади сегментов кривых второго порядка, к которым приведены криволинейные срезы;

вычисляют алгебраическую сумму найденных площадей.

Задача определения площади треугольника, одна сторона которого есть дуга кривой второго порядка, а также задача определения площади сегмента кривой, предварительно решены в классическом варианте.

Выведены также формулы для определения площади сегмента кривой второго порядка для инженерного варианта задания кривой, в завиместной единичной системе координат uAv имеет вид [6]

$$u^2 + \gamma v^2 + uv - u = 0. \qquad (3)$$

Из рисунка видно, что $ds_s = du(AC)v(AB)\sin\alpha$, но так как $AC \times AB \cdot \sin\alpha = 2S_t$ — удвоенная площадь базисного треугольника ABC, то $dS_s = 2S_t v du$, откуда $S_s = 2S_t \int_0^1 v du$. Из уравнения кривой (3) находим выражение для v и подставляем в последнюю формулу:

$$S_s = \frac{S_t}{\gamma} \int_0^1 \left(-u + \sqrt{u^2(1-4\gamma) + 4\gamma u}\right) du. \qquad (4)$$

Формула (4) дала возможность разработать простые алгоритмы для определения площадей деталей, а также площадей разводок деталей швейных изделий.

Другим не менее важным метрическим параметром в швейной промышленности является параметр длины контура детали — периметр. Для решения этой задачи с достаточно высокой степенью точности использован алгоритм вписания в кривую второго порядка упорядоченной последовательности точек с наперед заданным допуском δ. Длина прямолинейных участков контура вычисляется по известной формуле (указанной ранее). На криволинейных участках между двумя смежными узлами кусочно-линейной аппроксимации приведенного контура дуга кривой второго порядка заменяется дугой окружности со стрелкой прогиба, равной допуску δ на аппроксимацию. Длина дуги окружности определяется по формуле Чебышева. Алгебраическая сумма длин прямолинейных участков контура детали и длин отрезков дуг кусочно-линейной аппроксимации всех криволинейных срезов дает искомую величину длины контура детали.

Метод кусочно-линейной аппроксимации контуров, составленных из отрезков прямых и дуг кривых второго порядка, позволил разработать алгоритм определения габаритных размеров деталей швейных изделий в произвольно выбранной прямоугольной системе координат.

Алгоритмы решения описанных в настоящей работе задач доведены до машинных программ, составленных на языке АЛМИР. Программы реализованы на малых ЭЦВМ типа «МИР».

ВЫВОДЫ

При условии минимума исходной информации о контурах деталей швейных изделий значительно выгоднее аппроксимировать их кривыми второго порядка в инженерном варианте задания.

Метод кривых второго порядка позволяет с использованием малых ЭЦВМ сравнительно просто решать следующие задачи швейной промышленности:

подготовки формообразующих программ для автоматического раскроя тканей;

технического размножения швейных деталей;

определения основных метрических параметров деталей швейных изделий.