

Міністерство освіти і науки України  
Житомирський державний університет імені Івана Франка

**Я. Б. Сікора**

# **МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ**

**НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК  
ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ 6.040302 „ІНФОРМАТИКА\*”**

Житомир – 2013

ББК 22.183.4р  
С35  
УДК 519.85(07)

*Затверджено Вченою радою Житомирського державного університету  
імені Івана Франка протокол № 2 від 27 вересня 2013 р.*

Рецензенти:

*доктор технічних наук, професор Л. В. Лось;  
кандидат педагогічних наук, доцент О. В. Струтинська.*

**Сікора Я. Б.**  
С35      Методи оптимізації. Навчально-методичний посібник для студентів напряму 6.040302 Інформатика\*. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. Івана Франка, 2012. – 82 с.

Посібник призначений для використання студентами під керівництвом викладача на лабораторних заняттях. Містить лабораторний практикум з методів оптимізації. Викладений матеріал відповідає діючій програмі з «Методів оптимізації» для спеціальності «Інформатика\*».

Посібник адресований студентам фізико-математичного факультету, учителям інформатики.

**УДК 519.85(07)  
ББК 22.183.4р**

## ЗМІСТ

Пояснювальна записка.....	4
Алгоритм виконання лабораторної роботи .....	6
<i>Модуль 1. Основні поняття та принципи математичних методів оптимізації .....</i>	<i>7</i>
<i>Модуль 2. Лінійні оптимізаційні моделі.....</i>	<i>41</i>
Вимоги до екзамену.....	78
Критерії оцінювання .....	80
Список рекомендованої літератури .....	81

## Пояснювальна записка

Нині жодний нетривіальний прогноз розвитку будь-якої реальної соціально-економічної системи без застосування математики вже не вважається науково обґрунтованим, жодна пропозиція щодо управління такою системою без всебічного попереднього математичного аналізу не сприймається (адже наслідки управління хоча б приблизно мають відповідати бажаним!). Акумуляований людством досвід свідчить, що саме математика є основою постановки й подальшого дослідження чітко окреслених проблем, систематизованим комплексом ефективних методів розв'язання прикладних задач і виконання кількісних розрахунків.

Обсяг засвоєння студентами змісту базових розділів методів оптимізації має бути достатнім для розуміння основних понять, що застосовуються при постановці й розв'язанні типових задач. Крім того, здобуті знання сприятимуть кращому сприйманню інших навчальних дисциплін теорії систем і системного аналізу, дослідження операцій, методів обчислень.

### Мета і завдання курсу

Основною **метою** викладання є ознайомлення студентів з основними моделями задач оптимального планування та особливостями їх застосування, загальними принципами побудови та можливостями розробленого інструментарію, який застосовують в усіх сучасних системах підтримки прийняття рішень. Оволодіння теорією дослідження операцій дасть змогу визначати найкращі рішення типових економічних задач, аналізувати альтернативні варіанти, обґрунтовано приймати управлінські рішення на різних економічних рівнях.

Основними **завданнями**, що мають бути вирішені у процесі викладання дисципліни, є надання студентам систематизованих знань з основних математичних методів розв'язування оптимізаційних задач та формування умінь:

- постановки та формалізації економіко-управлінських задач;
- здійснювати лінійне програмування, нелінійне програмування;
- використовувати ПЕОМ і відповідне програмне забезпечення при проведенні оптимізаційних розрахунків та аналізі результатів цих розрахунків.

У результаті вивчення курсу студент повинен знати:

- математичні моделі операцій;
- означення аналітичних та статистичних моделей, моделей індивідуального та колективного вибору рішення, статичних та динамічних моделей;
- класифікацію задач і методів математичного програмування;
- суть геометричного методу розв'язування задач лінійного програмування;
- правила переходу від загальної задачі лінійного програмування до стандартної;
- поняття опорного плану, базису;
- ознаки оптимальності або необмеженості цільової функції на множині допустимих значень;
- суть симплекс-методу та його реалізацію за допомогою симплекс-таблиць;
- означення прямої задачі та двоїстої до неї;
- поняття симетричних двоїстих задач, взаємозв'язок між ними;
- економічне тлумачення теорем двоїстості;
- поняття про двоїстий симплекс-метод;
- класи задач нелінійного програмування;
- поняття про окремі підкласи задач;
- класичну схему пошуку стаціонарних точок;
- поняття про непрямі та прямі методи розв'язування нелінійних оптимізаційних задач;

- метод Лагранжа;
- постановку задачі квадратичного програмування;
- поняття опуклої функції та множини;
- постановку задачі опуклого програмування;
- теорему Куна-Такера.

У процесі вивчення курсу „Методи оптимізації” студент повинен вміти:

- будувати математичні моделі операцій;
- розв’язувати задачі лінійного програмування, використовуючи геометричний метод;
- записувати задачу ЛП у стандартній формі;
- знаходити оптимальний розв’язок задачі ЛП, використовуючи симплекс-таблиці;
- обґрунтовувати оптимальність та існування розв’язку ЗЛП;
- навести економічні приклади ЗЛП;
- записувати двоїсту задачу до заданої прямої;
- формулювати теорему двоїстості;
- розв’язувати ЗЛП, використовуючи симплекс-метод;
- застосовувати метод Лагранжа до розв’язування нелінійних оптимізаційних задач.

## Алгоритм виконання лабораторної роботи

1. Уважно прочитайте план лабораторного заняття, особливу увагу зверніть на пункт «Зміст звіту».
2. Користуючись літературою, зазначеною у плані лабораторного заняття, знайдіть потрібний теоретичний матеріал та перегляньте його.
3. Детально ознайомтеся з інструкцією до лабораторного заняття.
4. Якщо Ви виконували подібні завдання, перегляньте їх.
5. Виконуйте завдання лабораторного заняття, дотримуючись інструкції.
6. Результати виконаної роботи Ви маєте представити у вигляді звіту. Вимоги до оформлення звіту зазначені в інструктивно-методичних матеріалах.
7. Порівняйте, чи відповідає зміст Вашого звіту тим вимогам, які зазначені у плані лабораторного заняття пункт «Зміст звіту». Якщо Ваш звіт неповний, допрацюйте його.
8. Здайте звіт викладачу по завершенню лабораторного заняття (*для студентів денної форми навчання*).
9. Оформіть звіти, зазначені у пункті «Вимоги до екзамену», по порядку в окремому зошиті та здайте їх у термін, вказаний викладачем (*для студентів заочної форми навчання*).

**Пам'ятайте:** якщо Ви не змогли самостійно знайти відповіді на питання, поставте їх викладачеві на лабораторному занятті або на консультації. Ставити питання на МКР або екзамені вже запізно.

## ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ ЗВІТУ ЗА ЛАБОРАТОРНЕ ЗАНЯТТЯ

1. Результати виконаної роботи оформлюються в зошиті у вигляді письмового звіту.
2. Звіт за лабораторне заняття включає:
  - тему роботи;
  - вхідні дані варіанту завдання;
  - побудовану модель задачі зі вказаними одиницями вимірювання;
  - результати розв'язання завдання;
  - висновки за результатами розв'язання;
  - інші дані, які вимагає процедура виконання завдання.

## Зразок оформлення титульної сторінки звіту

<p style="text-align: center;"><b>ЗВІТ</b> за результатами лабораторної роботи №2 Тема. <i>Методи одновимірної оптимізації</i> студентки 24 групи заочної форми навчання фізико-математичного факультету САЄНКО СВІТЛАНИ ПЕТРІВНИ</p>
---

## МОДУЛЬ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ПРИНЦИПИ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ ОПТИМІЗАЦІЇ

№	Теми	Всього	Аудиторні заняття				Самостійна робота	Форма контролю
			лекції	практичні	лабораторні	підсумкові модульні роботи		
1.	Предмет та задачі дисципліни.	6	4	-	4		4	
2.	Нелінійне програмування.	13	16	-	10		7	
	<b>Всього (1,44 кредити)</b>	<b>52</b>	<b>12</b>	<b>-</b>	<b>14</b>	<b>2</b>	<b>24</b>	<b>ПМР</b>

### ЛЕКЦІЙНИЙ КУРС

#### Тема 1. Предмет та задачі дисципліни

Загальна постановка оптимізаційної задачі, її структура: цільова функція, обмеження як спосіб опису множини допустимих планів.

Змістовні приклади задач математичного програмування в економіці.

Означення розв'язку задачі математичного програмування: оптимальний план, оптимальне значення цільової функції, точка оптимуму; проблема його пошуку.

Геометричне тлумачення простих оптимізаційних задач з однією та двома змінними.

Класифікація задач і методів математичного програмування: лінійне та нелінійне, цілочислове (дискретне). Поняття про дробово-лінійне, квадратичне, геометричне, опукле, динамічне, потокове, параметричне та стохастичне програмування.

#### Тема 2. Нелінійне програмування

Причини виникнення і приклади нелінійностей в оптимізаційних економічних задачах.

Класи задач нелінійного програмування: одновимірні та багатовимірні, з обмеженнями або без обмежень.

Поняття про окремі підкласи задач: квадратичного, геометричного, дробово-лінійного, опуклого програмування тощо.

Різниця між глобальним та локальним оптимумами, точним та наближеним розв'язками задач.

Методи одновимірної оптимізації: непрямі (класична схема пошуку стаціонарних точок, половинного поділу) та прямі (рівномірний пошук, рівномірний випадковий пошук, пошук за золотим перерізом).

Багатовимірна задача оптимізації без обмежень, її основні властивості.

Класична схема багатовимірної оптимізації без обмежень за теоремою Ферма; обмеженість класичної схеми. Непрямі (градієнтний та його різновиди, метод Ньютона та квазіньютонівські методи) та прямі методи (покоординатного підйому).

Властивості багатовимірної задачі оптимізації з обмеженнями; достатні умови існування розв'язку; необхідна умова локального екстремуму в термінах можливих напрямків і напрямків зростання цільової функції; особливості задачі опуклого програмування.

Функція Лагранжа та її сідлові точки; двоїстість у нелінійному програмуванні. Умови оптимальності, засновані на застосуванні диференціального числення; теорема Куна — Танкера.

Поняття про методи багатовимірної оптимізації з обмеженнями (проекування можливих напрямків, лінеаризації, штрафних функцій). Розв'язування задач нелінійного програмування на ПЕОМ.

## ЛАБОРАТОРНІ ЗАНЯТТЯ

### ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1

#### Використання систем комп'ютерної математики для розв'язування оптимізаційних задач

**Мета:** ознайомитися з системами комп'ютерної математики Mathcad, Maple, Mathematica і Excel та їх структурою; інтерфейсом, вбудованими функціями.

#### Хід виконання роботи

1. Засвоєння теоретичних і практичних знань: системи комп'ютерної математики Mathcad, Maple, Mathematica і Excel їх структура; інтерфейс користувача комп'ютерної математики; засоби спілкування із системами комп'ютерної математики: поняття про мови програмування їх алфавіт і синтаксис; поняття про константи і змінні, поняття про оператори і функції; вбудовані функції систем комп'ютерної математики, їх виклик; елементи графічної візуалізації в системах комп'ютерної математики Mathcad, Maple, Mathematica і Excel.

2. Виконання практичних завдань графічної візуалізації в системах комп'ютерної математики Mathcad і Excel.

3. Оформлення результатів роботи.

4. Задача лабораторної роботи.

#### Теоретичні відомості

Для скорочення запису позначимо клавіші, які потрібно натискувати на клавіатурі, кутовими дужками: наприклад  $\langle x \rangle$  означає, що необхідно натискати клавішу  $x$ ;  $\langle \text{Shift} \rangle + \langle x \rangle$  означає, що потрібно натискати клавішу Shift і, не відпускаючи її, - клавішу  $x$ ;  $\langle \text{Space} \rangle$  - пробіл;  $\langle \text{Backspace} \rangle$  - видалення вліво.

Отже, на робочому столі клацніть мишею кнопку Пуск, наведіть мишу на рядок Програми, далі – на рядок Mathsoft Apps і клацніть по рядку MathCAD 2000 Professional. З'явиться заставка програми. Потім з'явиться робоче вікно пакету, і приступайте до роботи. Якщо після заставки на фоні робочого документа з'явиться вікно Tip Day, закрийте його. Зверніть увагу на білий простір на екрані. Це вікно робочого документа MathCAD – простір, в якому розташовуються всі введені команди і вирази, куди MathCAD виводить результати обчислень і графіки. Зміст цього вікна можна редагувати, форматувати, зберігати у файлах, друкувати і ін.

**Задача 1.** Обчислити арифметичні вирази  $22 + \frac{15}{3} - \frac{7}{2}$  і  $22 + \frac{15}{5} - \frac{7}{2}$ .

*Розв'язання:*

1. Клацніть мишею по будь-якому місцю в робочому документі. Ви побачите хрестик, що позначає позицію, з якою починається введення.
2. Введіть перший арифметичний вираз, послідовно натискаючи клавіші на клавіатурі  $\langle 2 \rangle \langle 2 \rangle \langle + \rangle \langle 1 \rangle \langle 5 \rangle \langle / \rangle \langle 3 \rangle \langle \text{Space} \rangle \langle - \rangle \langle 7 \rangle \langle / \rangle \langle 2 \rangle$ . Зверніть увагу на екран. Ви повинні побачити заданий вираз, обрамлений прямокутною рамкою, причому число 2 виділено кутовою рамкою (синього кольору).
3. Введіть з клавіатури знак рівності, натискаючи клавішу  $\langle = \rangle$ , ви побачите після знака рівності миттєво обчислене значення виразу 23,5.
4. Клацніть мишею справа внизу біля цифри 3. Ви побачите, що 3 виділено синьою кутовою рамкою. Натискуйте  $\langle \text{Backspace} \rangle$ . Ви побачите, що тепер значення виразу не визначено, місце введення помічено чорною міткою і обмежено кутовою рамкою.
5. Введіть з клавіатури цифру 5 і клацніть мишею зовні виділеної рамки (або натискуйте  $\langle \text{Enter} \rangle$ ). Ви побачите змінений вираз і його значення 21,5.
6. Тепер видаліть вираз. Клацніть мишею по будь-якому місцю у виразі і натискайте клавішу  $\langle \text{Space} \rangle$  до тих пір, поки весь вираз не буде виділений кутовою синьою



рамкою. Натискайте <Backspace> (поле введення забарвиться в чорний колір) і, натискаючи клавішу <Del>, видаліть виділене. Вираз зникне з екрану.

7. Введіть з клавіатури другий арифметичний вираз.
8. Знайдіть на екрані панель математичних інструментів MathCAD (група з 8 кнопок із зображенням калькулятора, графіка, матриці і т.п.). Якщо такий не виявиться, то клацніть по пункту меню View, в меню, що відкрилося, наведіть мишу на рядок Toolbar і помітьте рядок Math. В панелі математичних інструментів клацніть по кнопці із зображенням чорної шапочки. Відкриється панель символічних обчислень. Клацніть по кнопці із зображенням стрілки (ліва верхня кнопка). Ви побачите відповідний знак після виразу. Натискайте <Enter>. В результаті ви побачите обчислене значення виразу у вигляді звичайного дробу.

**Зауваження 1.** Якщо при введенні виразу була допущена помилка, виділіть неправильний символ кутовою рамкою (клацніть справа внизу біля символу), видаліть виділений символ (<Backspace>) і введіть в поміченій позиції виправлення.

**Задача 2.** Обчислити значення виразу  $\sqrt{a} + \frac{b+c^2}{2}$  при  $a=2$ ,  $b=3$ ,  $c=4$ .

*Розв'язання:*

1. Клацніть мишею по вільному місцю в робочому документі.
2. Введіть значення змінної a, натискаючи послідовно клавіші <a> <Shift>+<:;>, <2>. Ви побачите після a знак привласнення “:=”.
3. Аналогічно введіть значення змінних b і c.
4. Нижче введених значень a, b і c введіть даний вираз, виконуючи наступні дії:
  - по-перше, клацніть по кнопці із зображенням калькулятора панелі математичних інструментів і в панелі, що відкрилася, клацніть по кнопці із зображенням квадратного кореня; ви побачите на екрані відповідний символ з поміченим місце введення підкореневого виразу;
  - натискайте клавіші <a> <Space> <+> <b> <+> <c> <Shift>+<6> <2> <Space> <Space> </> <2> <=>; і клацніть по вільному місцю зовні поля введення.

**Зауваження 2.** MathCAD читає і виконує введені вирази зліва направо і зверху вниз, тому стежите, щоб вираз для обчислення розташовувався правіше або нижче за визначених для нього значення змінних.

**Задача 3.** Побудувати графік функції  $f(x) = x^2 + 8x + 1$ .

*Розв'язання:*

1. Клацніть по вільному місцю в робочому документі.
2. Введіть функцію, послідовно натискаючи клавіші <f> <( <x <)> <Shift>+<:;> <x> <Shift>+<6> <2> <Space> <+> <8> <\*> <x> <+> <1>.
3. Клацніть по вільному місцю в робочому документі нижче введеної функції, потім – по кнопці із зображенням графіка в панелі математичних інструментів і в панелі, що відкрилася, клацніть по лівій верхній кнопці. З'явиться поле для побудови графіка.
4. В нижню помічену позицію введіть з клавіатури ім'я аргументу x, потім клацніть по поміченій позиції з лівого боку, введіть з клавіатури f(x) і клацніть зовні прямокутної рамки.
5. Клацніть по пункту X-Y-Plot рядка Graph меню Format. У вікні настройки параметрів зображення, що з'явилося, помітьте пункти Crossed (Пересечение) і Equal Scales (Равные масштабы) і клацніть ОК.
6. Клацніть по полю графіка, потім – по числу, що задає якнайменше значення аргументу (число в лівому нижньому кутку обмеженого рамкою поля графіків), натискайте <Backspace> і введіть з клавіатури -20. Аналогічно змініте праву межу аргументу і межі зміни функції f(x). Клацніть зовні поля графіка.

**Задача 4.** Обчислити значення функції  $f(t) = \frac{t+1}{t+2}$  при  $t=2$ . Обчисліть значення функції для всіх  $t=0,1,2,..,9$ .

*Розв'язання:*

1. Клацніть по вільному місцю в робочому документі.
2. Введіть функцію. <Enter>.
3. Введіть з клавіатури <f> <( <2 > <)> <=> <Enter>.
4. Введіть з клавіатури <t> <Shift>+<:> <0 > <:> <9 > <Enter>.
5. Введіть з клавіатури <f> <( <t > <)> <=>. В результаті під ім'ям функції з'явиться таблиця значень функції.

**Задача 5.** Розв'яжіть рівняння  $x^2 + 2x + 3 = 0$ .

*Розв'язання:*

1. Клацніть по вільному місцю в робочому документі.
2. Введіть ключове слово Given.
3. Нижче введіть з клавіатури рівняння, причому при введенні знака рівності натискайте <Ctrl>+<=>.
4. Нижче введіть Find(x)→ (стрілка з панелі символічних обчислень) і клацніть <Enter>. В результаті з'явиться стовпець, що містить значення коренів рівняння.

**Зауваження 3.** Збереження робочого документа у файлі, відкриття нового робочого документа, читання робочого документа з файлу виконуються стандартним для WINDOWS-додатків чином (за допомогою меню File).

**Задача 6.** Побудувати графік функції  $z = \sin(x^2 + y^2)$  для  $x$  від  $-2$  до  $2$  і  $y$  від  $-2$  до  $2$ . Фрагмент виконання завдання наведено нижче.

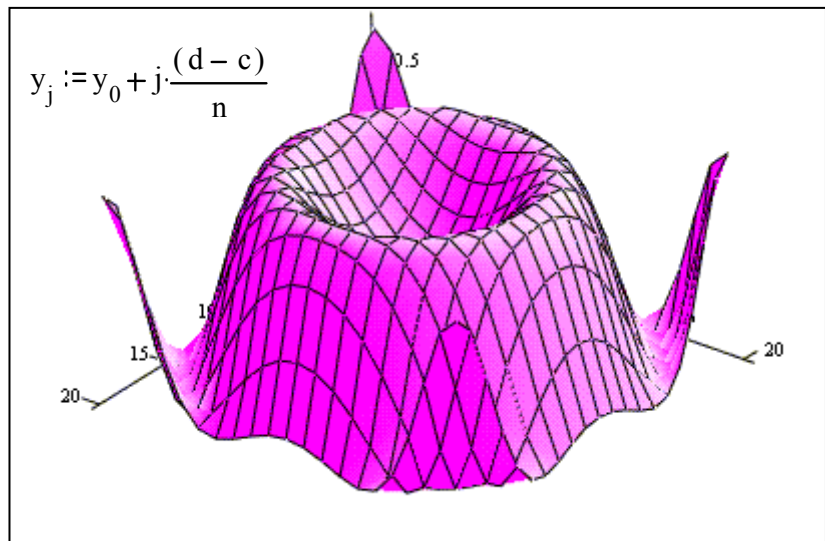
$$z(x, y) := \sin(x^2 + y^2)$$

$$n := 20 \quad i := 0.. n \quad j := 0.. n$$

$$a := -2 \quad b := 2 \quad x_0 := a \quad x_i := x_0 + \frac{i \cdot (b - a)}{n}$$

$$c := -2 \quad d := 2 \quad y_0 := c \quad y_j := y_0 + j \cdot \frac{(d - c)}{n}$$

$$Z_{i,j} := z(x_i, y_j)$$



Z

## ЗАВДАННЯ ДО АУДИТОРНОЇ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ 1

### I. Репродуктивно-понятійне завдання (оцінюється від 0 до 10 балів).

Максимальна кількість балів – 10.

1. Дайте означення опуклої функції.
2. Дайте означення сідлової точки функції Лагранжа.
3. Дайте означення функції Лагранжа.
4. Для яких функцій ефективно застосування методів типу дихотомії, золотого перетину, Фібоначчі?
5. Загальна постановка задач оптимізації.
6. Загальна постановка задачі нелінійного програмування.
7. Змінні і параметри математичних моделей. Наведіть приклад математичної моделі.
8. Кількість обчислень функції, що мінімізується, на одну ітерацію в методі дихотомії? В методі золотого перетину? В методі Фібоначчі?
9. Коли застосовується метод множників Лагранжа до розв'язування нелінійних задач? Наведіть приклад постановки таких задач.
10. Метод Ньютона.
11. Метод рівномірного пошуку.
12. Сформулюйте задачу опуклого програмування.
13. Сформулюйте критерій Сильвестра.
14. Сформулюйте необхідні і достатні умови існування екстремуму для задач безумовної оптимізації.
15. Сформулюйте необхідні і достатні умови існування екстремуму для задач умовної оптимізації.
16. Сформулюйте необхідні і достатні умови існування екстремуму для задач умовної оптимізації.
17. Сформулюйте теорему Куна-Таккера.
18. Що називається градієнтом, гессіаном, стаціонарною точкою?
19. Як здійснити перехід від задачі умовної оптимізації до задачі безумовної оптимізації?
20. Який вигляд має функція Лагранжа для задачі опуклого програмування?

### II. Практичні завдання (кожне завдання оцінюється від 0 до 30 балів).

Максимальна кількість балів – 90.

Приклади завдань:

1. Для даної цільової функції знайти розв'язок задачі одновимірної оптимізації  $f(x) \rightarrow \min, x \in X (X \subset R)$  і знайти проміжок  $(X \subset R)$ , на якому функція унімодальна. Здійснити графічний аналіз функції з відображенням її першої і другої похідної.

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2, x^0 = 10, \varepsilon = 0,06.$$

2. Знайти мінімум функції із заданою точністю градієнтним методом.

$$f(x) = x_1^3 + 8x_2^3 - 6x_1x_2 + 1, x^0 = (5;10), \varepsilon = 0,1.$$

3. Розв'яжіть задачу методом множників Лагранжа з використанням MathCad.

$$Z = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2, \\ -x_1 + 2x_2 = -5.$$

## ВИМОГИ ДО ЕКЗАМЕНУ

- Володіння теоретичним матеріалом з тем курсу.
- Зараховано усі звіти за лабораторні заняття, передбачені робочою програмою та інструктивно-методичними матеріалами.
- Пройдено перевірку рівня засвоєння знань з тем, які виносилися на самостійне опрацювання, на індивідуальній консультації у викладача.

### Структура екзаменаційного білету

Екзаменаційний білет включає два види завдань.

**I. Теоретичні питання** (максимальна кількість балів – 60).

**II. Практичне завдання** (максимальна кількість балів – 40).

## ПИТАННЯ ДО ЕКЗАМЕНУ

### Теоретичні питання

1. Загальна постановка оптимізаційної задачі, її структура: цільова функція, обмеження як спосіб опису множини допустимих планів.
2. Означення розв'язку задачі математичного програмування: оптимальний план, оптимальне значення цільової функції, точка оптимуму; проблема його пошуку.
3. Геометричне тлумачення простих оптимізаційних задач з однією та двома змінними.
4. Класифікація задач і методів математичного програмування: лінійне та нелінійне, цілочислове (дискретне). Поняття про дробово-лінійне, квадратичне, геометричне, опукле, динамічне, потокове, параметричне та стохастичне програмування.
5. Загальна задача нелінійного програмування. Форми запису задач нелінійного програмування.
6. Класифікація задач нелінійного програмування.
7. Геометрична інтерпретація задачі нелінійного програмування.
8. Методи одновимірної оптимізації: непрямі (класична схема пошуку стаціонарних точок, половинного поділу) та прямих (рівномірний пошук, рівномірний випадковий пошук, пошук за золотим перерізом).
9. Класичні методи оптимізації задач нелінійного програмування. Основні принципи.
10. Метод Лагранжа розв'язування задачі нелінійного програмування.
11. Опукле програмування. Означення задачі опуклого програмування. Функція Лагранжа.
12. Теорема Куна-Таккера.
13. Теорема про оптимальний розв'язок задачі опуклого програмування.
14. Задача опуклого квадратичного програмування.
15. Квадратичний симплекс-метод.
16. Постановка загальної задачі лінійного програмування.
17. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування на площині.
18. Стандартна задача лінійного програмування. Базисні розв'язки. Теорема про базисний розв'язок.
19. Перехід від загальної до стандартної задачі лінійного програмування.
20. Теорема про оптимальне значення цільової функції задачі лінійного програмування.
21. Канонічна задача лінійного програмування.
22. Метод виключення Жордана-Гауса перебору вершин допустимої області задачі лінійного програмування.
23. Симплекс-метод розв'язування Канонічної задачі лінійного програмування.
24. Критерій оптимальності базисного розв'язку задачі лінійного програмування.
25. М-метод розв'язування стандартної задачі лінійного програмування.
26. Перехід від стандартної до канонічної задачі лінійного програмування у вигляді М-задачі.

27. Двоїсті задачі лінійного програмування.
28. Лема про цільові функції двоїстих задач лінійного програмування.
29. Множники Лагранжа. Симетричні двоїсті задачі лінійного програмування.
30. Теорема двоїстості. Двоїстий критерій оптимальності.

### Практичні завдання

1. Для даної цільової функції знайти розв'язок задачі одновимірної оптимізації  $f(x) \rightarrow \min, x \in X (X \subset R)$  і знайти проміжок  $(X \subset R)$ , на якому функція унімодальна. Здійснити графічний аналіз функції з відображенням її першої і другої похідної.

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2, x^0 = 10, \varepsilon = 0,06.$$

2. Знайти мінімум функції із заданою точністю градієнтним методом.

$$f(x) = x_1^3 + 8x_2^3 - 6x_1x_2 + 1, x^0 = (5;10), \varepsilon = 0,1.$$

3. Розв'яжіть задачу методом множників Лагранжа з використанням MathCad.

$$Z = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2, \\ -x_1 + 2x_2 = -5.$$

4. Графічним методом визначити оптимальний план задачі лінійного програмування.

$$4x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

5. Розв'язати симплексним методом задачу лінійного програмування:

$$L(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \leq 3 \\ -x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ x_2 \geq 0, x_1 \geq 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу лінійного програмування:

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min,$$

$$-2x_1 + 4x_2 \geq 5,$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

7. Скласти двоїсту задачу лінійного програмування і розв'язати пару взаємодвоїстих задач:

$$z = x_1 + x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ 2x_1 + x_2 \leq 13, \\ 3x_1 - x_2 \leq 12, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

## КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ

Сума балів за 100-бальною шкалою	Оцінка в ЄКТС	Значення оцінки ЄКТС	Критерії оцінювання	Рівень компетентності	Оцінка за національною шкалою
90-100	A	відмінно	Студент виявляє особливі творчі здібності, вміє самостійно здобувати знання, без допомоги викладача знаходить та опрацьовує необхідну інформацію, вміє використовувати набуті знання і вміння для прийняття рішень у нестандартних ситуаціях, переконливо аргументує відповіді, самостійно розкриває власні обдарування і нахили	Високий (творчий)	відмінно
82-89	B	дуже добре	Студент вільно володіє вивченим обсягом матеріалу, застосовує його на практиці, вільно розв'язує вправи і задачі у стандартних ситуаціях, самостійно виправляє допущені помилки, кількість яких незначна	Достатній (конструктивно-варіативний)	добре
75-81	C	добре	Студент вміє зіставляти, узагальнювати, систематизувати інформацію під керівництвом викладача; в цілому самостійно застосовувати її на практиці; контролювати власну діяльність; виправляти помилки, серед яких є суттєві, добирати аргументи для підтвердження думок		
69-74	D	задовільно	Студент відтворює значну частину теоретичного матеріалу, виявляє знання і розуміння основних положень; з допомогою викладача може аналізувати навчальний матеріал, виправляти помилки, серед яких є значна кількість суттєвих	Середній (репродуктивний)	задовільно
60-68	E	достатньо	Студент володіє навчальним матеріалом на рівні, вищому за початковий, значну частину його відтворює на репродуктивному рівні		
35-59	FX	незадовільно з можливістю повторного складання семестрового контролю	Студент володіє матеріалом на рівні окремих фрагментів, що становлять незначну частину навчального матеріалу	Низький (рецептивно-продуктивний)	незадовільно
1-34	F	незадовільно з обов'язковим повторним вивченням залікового кредиту	Студент володіє матеріалом на рівні елементарного розпізнавання і відтворення окремих фактів, елементів, об'єктів		

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

### Базова

1. Егоршин А. А. Математическое программирование: [учеб. пособие] / А. А. Егоршин, Л. М. Малярец. – Х.: ИД «ИНЖЭК», 2003. – 240 с.
2. Ермольев Ю. М., Ляшко И. И., Михалевич В. С., Тюптя В. И. Математические методы исследования операций: учеб. пособие для вузов. — К., 1979.
3. Кулян В. Р. Математическое программирование с элементами информационных технологий / В. Р. Кулян, Е. А. Юнькова, А. Б. Жильцов. – К.: МАУП, 2000. – 124 с.
4. Кутковецкий В. Я. Дослідження операцій: [навч. посіб.] / В. Я. Кутковецкий. – [2-ге видання, виправлене]. – К.: ВД «Професіонал», 2005. – 264 с.
5. Ляшенко И. Н., Карагодова Е. А., Черникова Н. В., Шор Н. З. Линейное и нелинейное программирование / Под ред. И. Н. Ляшенка. – К.: Вища школа, 1975. – 372 с.
6. [http://stud.zu.edu.ua/study/Methods\\_Optimization/Methods\\_Optimization\\_Theory.pdf](http://stud.zu.edu.ua/study/Methods_Optimization/Methods_Optimization_Theory.pdf)
7. [http://stud.zu.edu.ua/study/Methods\\_Optimization/Linear\\_Programming.pdf](http://stud.zu.edu.ua/study/Methods_Optimization/Linear_Programming.pdf)
8. [http://stud.zu.edu.ua/study/Methods\\_Optimization/Dynamic\\_Nonlinear\\_Programming.pdf](http://stud.zu.edu.ua/study/Methods_Optimization/Dynamic_Nonlinear_Programming.pdf)

### Допоміжна

9. Бугір М. К. Математика для економістів. Лінійна алгебра, лінійні моделі / М. К. Бугір. – К., 1998. – 272 с.
10. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій: підручник / Ю. П. Зайченко. – К.: ВІПОЛ, 2000.
11. Исследование операций / Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – Т. 1,2. – М.: Мир, 1981. – 712 с.
12. Конюховский П. В. Математические методы исследования операций в экономике / П. В. Конюховский. – СПб.: Изд-во «Питер», 2000. – 208 с.
13. Плис А. И. МАТНСАД: математический практикум для экономистов и инженеров: [учеб. пособие] / А. И. Плис, Н. А. Сливина. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 656 с.
14. Таха Х. Введение в исследование операций / Х. Таха. – 6-е изд.; пер. с англ. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2001. – 912 с.