Житомирський державний університет імені Івана Франка
Студентське наукове товариство
фізико-математичного факультету

НАУКОВИЙ ПОШУК МОЛОДИХ ДОСЛІДНИКІВ

Випуск VIII

Житомир
Видавництво ЖДУ імені Івана Франка
2015

УДК 378.937
Н32

Рекомендовано вченою радою Житомирського державного університету імені Івана Франка, протокол № 8 від 27 березня 2015 року

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Лось Л. В. – заслужений діяч науки і техніки України, доктор технічних наук, академік Інженерної академії України, професор, Житомирський агроекологічний університет;

Антонова О. Є. – доктор педагогічних наук, професор, Житомирський державний університет імені Івана Франка.

Н32 Науковий пошук молодих дослідників: збірник наукових праць студентів, магістрантів та викладачів / за ред. доц. О. М. Королюк. – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2015. – Вип. 8. – 166 с.

У збірнику представлено результати науково-дослідницької роботи за актуальними напрямками фізико-математичних, психолого-педагогічних наук та інформаційних технологій магістрантів, студентів-дипломників, членів проблемних груп та наукових гуртків, здобувачів і викладачів фізико-математичного факультету Житомирського державного університету імені Івана Франка.

УДК 378.937

ЗМІСТ

ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ НАУКИ

РОЗДІЛ II. НАУКОВІ ДОРОБКИ ВИКЛАДАЧІВ

Для нотаток:

доданки описують відносний рух частинок із хвильовою функцією $\psi(r)$ [1]. Повна хвильова функція є їхнім добутком. Тому підстановка цього виразу в стаціонарне рівнянні Шредінгера $\hat{H}\psi = E\psi$ приводить до рівняння для однієї частинки маси m з координатою r, що рухається в полі $U = U(r)$:

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(r)\right\}\psi(r) = E\psi(r) \qquad (4),$$

внаслідок сферичної симетрії потенціалу, зручно перейти від декартових координат x, y, z до сферичних r, θ, φ. В нових координатах вираз для лапсасіана матиме вигляд:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \qquad (5).$$

Вираз в квадратних дужках – оператор квадрата моменту кількості руху $\hat{L}^2$ у сферичних координатах. Рівняння Шредінгера матиме вигляд:

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\hat{L}^2}{2mr} + U(r)\right\}\psi(r) = E\psi(r) \qquad (6).$$

Змінні в рівнянні розділяються, і, відповідно до цього, хвильові функції зображаються як добуток функції $R(r)$, яка залежить лише від r, на хвильову функцію $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$, що залежить лише від кутових змінних і є власною функцією операторів $\hat{L}^2$ та $\hat{L}_z$ [3].

$$\psi(r) = R(r)Y_{l,m}(\theta,\varphi) \qquad (7),$$

де $R = R(r)$ – радіальна функція.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rR) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}R + U(r)R = ER \qquad (8).$$

(8) - радіальне рівняння Шредінгера, для якого умова нормування:

$$\int_0^\infty r^2 R^2(r) = 1.$$

Після підстановки $rR(r) = \chi(r)$ отримаємо одновимірне рівняння Шредінгера:

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + U_l(r)\right\}\chi = E\chi \qquad (9),$$

З ефективною потенціальною енергією $U_l(r) = U(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}$ за умови, що $0 \le r < \infty$. Другий доданок у цьому виразі – відцентрова енергія, яка має відштовхувальний характер і не дозволяє частинці впасти на силовий центр. Функція χ нормується без вагового множника:

$$\int_0^\infty \chi^2(r)dr = 1.$$

Дослідивши поведінку функції χ на малих і великих відстанях отримаємо, що при $r \to 0$ $\chi = const * r^{l+1}$, а при $r \to \infty$ $\chi \sim \exp\left[-r\sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}\right]$.

Отже, для зв'язаних станів з урахуванням поведінки функції χ на малих та великих відстанях радіальну функцію записуємо у вигляді:

$$R(r) = r^l e^{-r\sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}}\omega(r) \qquad (10).$$

Такий запис забезпечує необхідну поведінку функції R на границях області значень r, $0 \le r < \infty$. Функція $\omega(r)$відповідає за характер радіальної функції в області проміжних значень r, який, зрозуміло, диктується конкретним виглядом потенціальної енергії $U = U(r)$.

Дуже важливим випадком руху в центрально-симетричному полі являється рух в кулонівському полі, де потенціальна енергія $U = -\frac{\alpha}{r}$.

Рівняння (8) для радіальних функцій матиме вигляд:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}R + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)R = 0 \qquad (11).$$

В якості одиниць вимірювання маси, довжини і часу виберемо відповідно $m, \frac{\hbar^2}{m\alpha}, \frac{\hbar^3}{m\alpha^2}$ [4]. Рівняння (11) в нових одиницях набуде вигляду:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}R + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{1}{r}\right)R = 0 \qquad (12)$$

Замість параметра E і змінної r введемо нові величини $n = \frac{1}{\sqrt{-2E}}, \rho = \frac{2r}{n}$

Після підстановки нових величин рівняння (12) набуде вигляду:

$$R'' + \frac{2}{\rho}R' + \left[-\frac{1}{4} + \frac{n}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R = 0. \qquad (13)$$

При малих ρ розв'язок пропорційний ρ^l. Для вияснення асимптотичної поведінки R при великих ρ опускаємо члени з $\frac{1}{\rho}$ і $\frac{1}{\rho^2}$, отримуємо рівняння $R'' = \frac{R}{4}$, звідки $R = e^{-\rho/2}$.

Отже, $R = \rho^l e^{-\rho/2}\omega(\rho)$, а рівняння (13) набуде вигляду:

$$\rho\omega'' + (2l + 2 - \rho)\omega' + (n - l - 1)\omega = 0 \qquad (14)$$

З рівняння (14) можна зробити висновок, що число n повинно бути цілим і додатнім, а число l повинно задовольняти умові $n \ge l + 1$.

Література

1. Савельев И. В. Основы теоретической физики: квантовая механика / Савельев И. В. – М. : Гл. ред. физ-матем лит-ры изд-ва «Наука», 1977. – Т. II.
2. Ландау Л. Д. Теоретическая фізика: квантовая механика (нерелятивистская теория) / Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. – [6-е изд.]. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – Т. III.
3. Вакарчук І. О. Квантова механіка / І. О. Вакарчук. – [3-тє вид., доп.]. – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2007.
4. Елютин П. В. Квантовая механика / Елютин П. В., Кривченков В. Д. – М. : Наука, 1976.

Кицан Андрій,

студент V курсу, спеціальність «Математика та економіка».

*Науковий керівник – **Прус А. В.**,*

кандидат педагогічних наук, доцент

ВИВЧЕННЯ КОМБІНАЦІЙ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ У СТАРШІЙ ШКОЛІ

Повсякденне життя людини, побут, професійна діяльність і вся навколишня природа пов'язані з просторовими об'єктами, ідеальними образами яких є геометричні тіла: призми, піраміди, конуси, циліндри, кулі тощо. Часто виникає практична необхідність визначати об'єм і площу поверхні об'єктів природи, побуту, виробництва, досліджувати їх розміри, взаємне розташування. З погляду на це процес навчання стереометрії, зокрема вивчення комбінації геометричних тіл, потрібно найперше розглядати як надбання учнями необхідних загальнолюдських знань і цінностей, а тому спрямувати на розвиток навчально-пізнавальної та творчої активності учнів.

Огляд наукової та науково-методичної літератури, зокрема [1, 2, 3, 4], свідчить про значущість вивчення розділу "Комбінації геометричних тіл" для розвитку логічного і просторового мислення, для демонстрації прикладної спрямованості геометрії і в той же час про стурбованість науковців, методистів та вчителів недостатнім рівнем геометричних знань учнів.

Актуальність проблеми вивчення геометричних тіл також зумовлена реальним станом вивчення розділу " Комбінації геометричних тіл" учнями старшої школи. Більшість учнів не можуть застосувати набуті знання та вміння під час розв'язування нових, нестандартних задач, припускаються помилок у побудові малюнків геометричних тіл, виділенні істотних властивостей, що визначають вид геометричного тіла. Про це свідчать результати державної підсумкової атестації випускників шкіл, зовнішнього незалежного оцінювання, анкетування вчителів, бесіди з учителями та учнями.

Питаннями, пов'язаними із методикою вивчення даної теми займалися такі науковці: В. Г. Бевз, Г. П. Бевз, О. Б. Василевський, А. В. Грохольська, Я. М. Жовнір, В. Г. Коровіна, І. А. Кушнір, М. І. Лисова, Д. С. Людміл ов та ін.

У дані статті ми розглянемо комбінацію призми та кулі.

Мета статі – ознайомити з тим, як дана тема представлена в окремих діючих підручниках зі стереометрії.

Згідно програми академічного рівня учень (учениця): розпізнає види тіл обертання, їхні елементи; обчислює основні елементи тіл обертання: обґрунтовує властивості тіл обертання, застосовує їх до розв'язання задач: розпізнає многогранники і тіла обертання у їх комбінаціях; розв'язує нескладні задачі на комбінацію просторових фігур.

У ЗОШ використовуються підручники зі стереометрії наступних авторів: Г. П. Бевза, Г. В. Апостолової, В. О Тадеєва, А. П. Єршова, Н. І. Бурди.

Надамо коротку характеристику двох діючих підручників, щодо даної теми, авторських груп Г. П. Бевза [1] та В. О. Тадеєва [4].

У підручнику [4] розглядається тема, яка пов'язана з комбінаціями кулі та різних просторових тіл, зокрема призми. Наводиться ряд означень та теорем. А саме такі:

Означення 1. Куля називається описаною навколо призми, якщо всі вершини призми належать поверхні кулі.

Теорема 1 (про існування сфери, описаної навколо прямої призми). Якщо навколо основи прямої призми можна описати коло, то навколо самої призми можна описати сферу, причому така сфера єдина

Доведення: див. [4].

Наслідок 1 (з теореми 1). Якщо навколо призми можна описати сферу, то її центр збігається із серединою відрізка, що з'єднує центри кіл, описаних навколо основ.

Наслідок 2 (з теореми 1). Центр сфери описаної навколо прямокутного паралелепіпеда, збігається з точкою перетину його діагоналей.

Наслідок 3 *(з теореми 1).* Не існує жодної похилої призми навколо якої можна було б описати сферу.

Означення 2. Куля називається вписаною в призму, якщо її поверхня дотикається до всіх граней многогранника.

Теорема 2 (про існування сфери вписаної у пряму призму). У пряму призму можна вписати сферу тоді і тільки тоді, коли в її основу можна вписати коло, а діаметр цього кола дорівнює висоті призми. Центр вписаної сфери збігається із серединою відрізка, що з'єднує центри кіл, вписаних в основи призми, її радіус дорівнює радіусу цих кіл, а точки дотику з основами призми збігаються з центрами вписаних кіл

Доведення: див. [3].

Наслідок 4 (з теореми 2). У правильну призму можна вписати сферу тоді і тільки тоді, коли висота призми дорівнює діаметру кола, вписаного в основу. Ця умова, зокрема, виконується для куба.

Для розв'язування учням запропоновано 18 задач, які пов'язані з комбінацією призми та кулі. Розглянемо одну з них.

Приклад 1. В прямокутному паралелепіпеді діагональ утворює з площиною основи кут α, а діагональ основи утворює з однією з сторін основи кут β. Знайти площі бічної поверхні паралелепіпеда, якщо радіус кулі, описаної навколо нього дорівнює R (рис. 1).

Розв'язання: Нехай відрізок O_1O_2 – висота паралелепіпеда.

O – центр кулі, описаної навколо паралелепіпеда. Тому $OA = OB = OC = OD = OA_1 = OB_1 = OC_1 = OD_1 = R$.

Розглянемо ΔODO_1. У ньому $\angle O_1 = 90^\circ, \angle D = \alpha$. $OO_1 = R sin\alpha$. За теоремою Піфагора: $OD^2 = DO_1^2 + OO_1^2$. Звідси $DO_1 = R cos\alpha$.

Оскільки $ABCD$ – прямокутник, то $AO_1 = BO_1 = CO_1 = DO_1 = R cos\alpha$.

Розглянемо ΔAO_1D. У ньому $AO_1 = DO_1 = R cos\alpha$, $\angle O_1DA = \angle O_1AD = \beta$.

За теоремою косинусів маємо: $AD^2 = AO_1^2 + DO_1^2 - 2AO_1DO_1 cos(180^\circ - 2\beta)$. Звідси $AD = 2R cos\alpha cos\beta$.

Розглянемо ΔABD, $\angle A = 90^\circ$. За теоремою Піфагора маємо: $BD^2 = AB^2 + AD^2$. Звідси $AB = 2R cos\alpha sin\beta$.

Відомо, що $S_б = P_{осн} \cdot h$, $P_{осн} = 2(AB + AD)$.
Отже, $S_б = 4R^2 sin2\alpha(sin\beta + cos\beta)$.

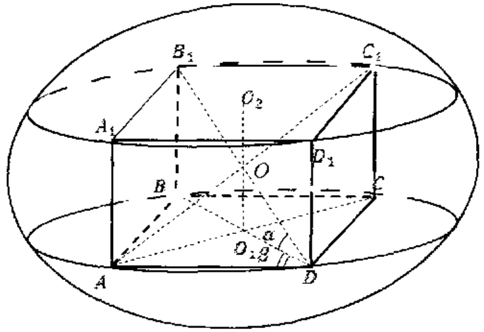

Рис. 1.

У підручнику [1] надається значно менше, у порівнянні з [4], інформації з даної теми. Не подано жодної теореми, лише два означення, які аналогічні попереднім. Для розв'язування учням запропоновано тринадцять задач. Розглянемо одну з них.

Приклад 2. Ребро куба дорівнює a. У цей куб вписано сферу. Знайдіть довжину хорди цієї сфери, яку вона відтинає на відрізку, що сполучає середини мимобіжних ребер куба (рис. 2).

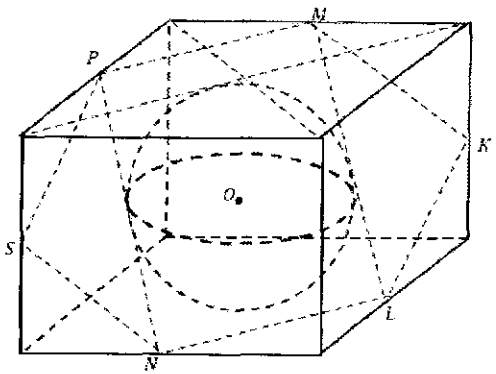

Рис. 2

Розв'язання: Розглянемо переріз куба площиною, що проходить через точки M, N, K – середини ребер куба (рис. 3).

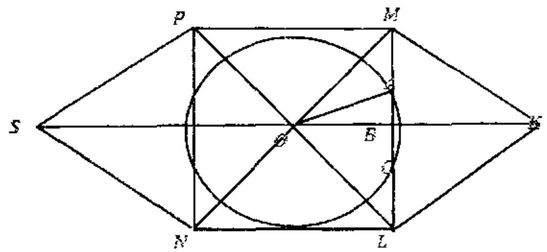

Рис. 3.

Нехай ребро куба дорівнює a, тоді $PM = MK = KL = LN = NS = SP = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (за теоремою Піфагора). Радіус вписаної кулі в куб дорівнює $\frac{a}{2}$, тоді $OA = \frac{a}{2}$, $OB = \frac{PM}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. З $\Delta OAB, \angle B = 90^\circ$ маємо: $AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{8}} = \sqrt{\frac{a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Звідси $AC = 2AB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Відповідь: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

У подальшому ми плануємо розглянути задачі, пов'язані з комбінацією кулі з іншими многогранниками та тілами обертання.

Література

1. Геометрія. 11 кл. : підруч. для загальноосвіт. навчал. закл. : академ. рівень, профіл. рівень / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова, В. М. Владіміров. – К. : Генеза, 2011. – 336 с.

2. Людмилов Д. С. Задачи без числовых данных : пособ. для учит. / Д. С. Людмилов. – М. : Учпедгиз, 1961.

3. Ленчук І. Г. Методичні аспекти погодження в наочній стереометрії з практикою теорії комбінацій геометричних тіл : [Електрон. ресурс]. – Режим доступу: http://eprints.zu.edu.ua/766/1/01ligkdt.pdf.

4. Тадеєв В. О. Геометрія. Фігури обертання. Векторно-координатний метод : дворів. підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Тадеєв В. О. – Тернопіль: Навч. книга - Богдан, 2004. – 480 с.

Грицай Наталія,
студентка V курсу, спеціальність «Математика і економіка».
*Науковий керівник – **Сверчевська І. А.**,*
кандидат педагогічних наук, доцент

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ В ЗАДАЧАХ З ЕКОНОМІЧНИМ ЗМІСТОМ

Диференціальне числення дає змогу розв'язувати великий спектр задач економічного змісту, досліджувати економічні процеси, явища [1].