УДК 511:378.147

Т. В. Дідківська,
кандидат фізико-математичних наук, доцент;
І. А. Сверчевська,
кандидат педагогічних наук, доцент
(Житомирський державний університет імені Івана Франка)
iryna_sver@ukr.net

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ МЕТОДАМИ ГЕОМЕТРИЧНОЇ АЛГЕБРИ В ІСТОРІЇ МАТЕМАТИКИ

Геометричну алгебру розглянуто як інтеграційну основу навчання курсу алгебри майбутніх учителів математики. Серед різних підходів до використання історії математики вибрано дослідження розв'язань визначних математичних задач на обчислення коренів алгебраїчних рівнянь. Рекомендовано використовувати геометричні методи, які роблять розв'язання наочним, цікавим і зрозумілішим. До кожної задачі запропоновано історичну довідку, яка дає можливість вивчити діяльність автора задачі докладніше, зацікавити задачею та, можливо, заохотити до відшукання свого методу розв'язування.

Ключові слова: *математична задача, рівняння, геометрична алгебра, геометричні методи, історія математики, інтеграційна основа, нетрадиційні методи.*

Постановка проблеми. Важливим завданням при навчанні математики є вироблення вмінь розв'язувати задачі, зокрема задачі, які зводяться до розв'язування рівнянь. Для розв'язування математичних задач у процесі розвитку математики вироблено різноманітні методи. Вдосконаленню цих методів сприятиме їх візуалізація. Цей підхід нетрадиційний, хоча дозволяє побачити розв'язання та одержаний розв'язок. Для втілення цієї ідеї ми звертаємося до геометричної алгебри, яка була побудована грецькими математиками в школі Піфагора. Особливістю геометричної алгебри було те, що всі доведення ґрунтувалися на геометричній основі. Якраз введення цих доведень і дало можливість створити математику як науку. Звернення до геометричної алгебри в історії математики є інтеграційною основою вивчення питань алгебри, які передбачені навчальним планом.

Метою статті є розгляд геометричної алгебри як інтеграційної основи навчання курсу алгебри майбутніх учителів математики.

Виклад основного матеріалу.

1. Задача геометричної алгебри піфагорійців. Розв'язати рівняння $ax = x^2 + b^2$ [1: 49].

Грецькі математики будували математику на основі геометрії. У результаті було побудовано геометричну алгебру, характерною ознакою якої було те, що всі її висновки ґрунтувалися на геометричних образах. Так, формули скороченого множення доводилися за допомогою геометричних побудов. Можливо, що в школі Піфагора квадратні рівняння розв'язувалися геометричним шляхом.

Розв'язання. Будуємо відрізок $AB = a$, точкою C ділимо AB навпіл, проводимо в точці C перпендикуляр CD до AB довжини *b*. Проводимо $DE = BC = \frac{a}{2}$. Одержаний відрізок $BE = x$ буде розв'язком рівняння $x^2 + b^2 = ax$. Доведення (рис. 1).

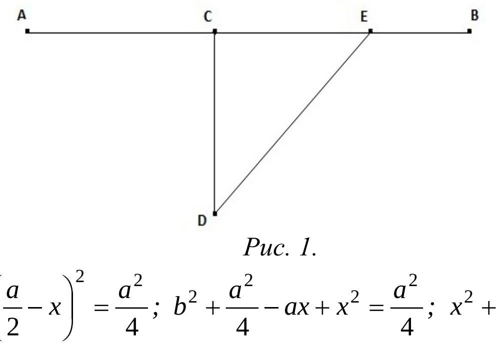

Рис. 1.

З трикутника $CDE: \; b^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \frac{a^2}{4}; \; b^2 + \frac{a^2}{4} - ax + x^2 = \frac{a^2}{4}; \; x^2 + b^2 = ax$.

2. Задача Евкліда. Розв'язати рівняння $x^2 + ax = b^2$ [2: 43].

Для роботи в математичній школі в Александрії був запрошений Евклід. Відомо, що він жив у III ст. до нашої ери, яке ввійшло в історію математики під назвою "золотого століття". Головна праця Евкліда "Основи", де він на дедуктивній основі подає геометричний матеріал, відомий до нього і доповнений ним самим. В "Основах" Евкліда рівняння $x^2 + ax = b^2$ подається так: "Площа квадрата з невідомою стороною складена з площею прямокутника, в якого одна сторона *a*, а друга дорівнює стороні квадрата, рівновелика площі квадрата зі стороною b. Знайдіть площу першого квадрата".

Розв'язання. Будується квадрат зі стороною $\frac{a}{2}+x$, де x – це невідомий відрізок. Він розбивається на два квадрати, площами x^2 та $\left(\frac{a}{2}\right)^2$, та два прямокутники площею $\frac{a}{2}x$ (рис. 2). Загальна площа квадрата дорівнює $S = x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{a}{2}x = \left(\frac{a}{2}+x\right)^2$. Перетворимо ліву частину: $S = x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2$. За умовою $x^2 + ax = b^2$, тому $S = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Отже, маємо $\left(\frac{a}{2}+x\right)^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

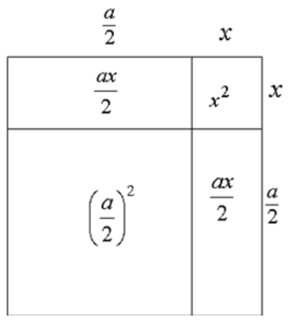

Рис. 2.

Геометричний зміст одержаної рівності: в прямокутному трикутнику з катетами b та $\frac{a}{2}$ гіпотенуза дорівнює $\frac{a}{2}+x$. Тому очевидна побудова відрізка x (рис. 3).

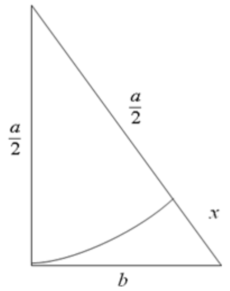

Рис. 3.

3. Задача ал-Хорезмі. Розв'язати рівняння $x^2 + ax = b$ [2: 52].

Середньоазіатський математик Мухаммед бен-Муса ал-Хорезмі (IX ст.) першим відділив алгебру від арифметики. Сам термін "алгебра" ввійшов у математику завдяки його книзі "Кітаб ал-джебр ал-мукабала" ("Про відновлення і протиставляння"), яка була присвячена розв'язуванню рівнянь 1-го і 2-го степенів. Розв'язування рівнянь певного типу обґрунтовувалося за допомогою геометричних побудов.

Розв'язання. На кожній стороні квадрата зі стороною x добудовуємо чотири прямокутники зі сторонами x та $\frac{a}{4}$ і чотири малі квадрати зі стороною $\frac{a}{4}$ (рис. 4).

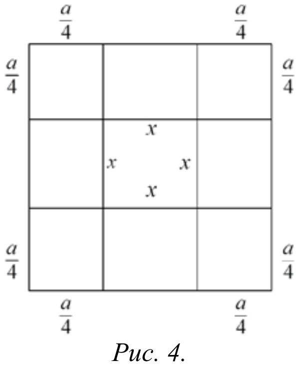

Рис. 4.

Одержаний квадрат складається з малого квадрата площею x^2, чотирьох малих квадратів площею $\frac{a^2}{16}\cdot 4=\frac{a^2}{4}$ та чотирьох прямокутників площею $\frac{a}{4}\cdot x\cdot 4=ax$. Отже, площа квадрата, одержаного в результаті побудов, дорівнює: $\left(x+\frac{a}{4}\cdot 2\right)^2=x^2+ax+\frac{a^2}{4}$. За умовою задачі $x^2+ax=b$, тому маємо $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2=b+\frac{a^2}{4}$, $x+\frac{a}{2}=\sqrt{b+\frac{a^2}{4}}$. Побудувавши $\sqrt{b+\frac{a^2}{4}}$, можна визначити x. Що і обґрунтовує розв'язування рівняння типу "квадрат і корені дорівнюють числу".

4. Задача ал-Хорезмі. Розв'язати рівняння $x^2+10x=39$.

Ця задача є окремим випадком попередньої задачі при $a=10,\ b=39$. Ал-Хорезмі цю задачу формулює так: "Квадрат невідомого і десять невідомих становлять 39 дирхемів (дирхем – срібна монета середньовічного Сходу). Чому дорівнює невідоме?"

Розв'язання. Будуємо квадрат зі стороною x і добудовуємо два прямокутники зі сторонами x та 5, одержана фігура називається "гномон" (рис. 5). Доповнюємо цей гномон до квадрата зі стороною $x+5$. Тоді площа побудованого квадрата $S=(x+5)^2$.

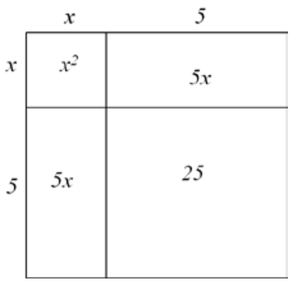

Рис. 5.

За рис. 5 визначаємо $S=x^2+2\cdot 5x+25=x^2+10x+25$. Маємо $(x+5)^2=x^2+10x+25$. За умовою задачі $x^2+10x=39$, отже: $(x+5)^2=39+25=64$, $x+5=8$, $x=3$ Ал-Хорезмі визначає додатній корінь.

Це рівняння можна розв'язати іншим способом, використавши побудову попередньої задачі (рис.4).

Питанням розв'язування алгебраїчних рівнянь займався також Омар Хайям (1048-1131), персидський математик і поет. Він вважав, що алгебра – це теорія рівнянь. У математичному трактаті "Про доведення задач алгебри і алмукабали" він дає класифікацію алгебраїчних рівнянь першого, другого і третього степенів та геометричні побудови коренів. Розглянемо спосіб розв'язування рівняння "квадрат і десять коренів дорівнює тридцяти дев'яти" ($x^2+10x=39$) [3:112]. Наводимо розв'язання автора, подаючи в дужках деякі пояснення (рис. 6).

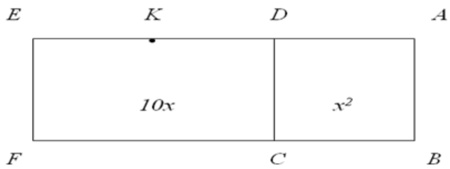

Рис. 6.

"Нехай квадрат буде ABCD [x^2], збільшений на десять коренів [$10x$], він дорівнює 39. Десять коренів подаються у вигляді прямокутника CDEF. Пряма DE=10. Розділимо її в точці K навпіл. Добуток EA [$10+x$] на AD [x], що дорівнює прямокутнику ABFE, доданий до квадрата DK [25], буде дорівнювати квадрату AK [$(10+x)x+25=(x+5)^2$]. Але квадрат DK відомий [25], а також відомий прямокутник ABFE, який виражає дане число [39]. Отже, квадрат AK [$(x+5)^2=(10+x)x+25=39+25=64$] та лінія AK [$x+5=8$] відомі, а коли віднімемо DK [5] із AK [8], то остача AD буде відома [$x=3$]".

Дамо коментарі до розв'язання Омара Хайяма (рис. 7). Будуємо квадрат ABCD, площа якого x^2 і доповнюємо прямокутником CDEF зі сторонами 10 та x, площа якого $10x$. Тоді за умовою $x^2+10x=39$, тобто площа прямокутника ABFE дорівнює 39. DE=10, розділимо цей відрізок навпіл в точці K і побудуємо квадрат AKNQ зі стороною $x+5$. Площа прямокутника ABFE дорівнює $(10+x)x$, якщо додати площу квадрата CGNM, що дорівнює 25, то одержимо площу квадрата AKNQ (тому що площі прямокутників MKEF і BCGQ рівні).

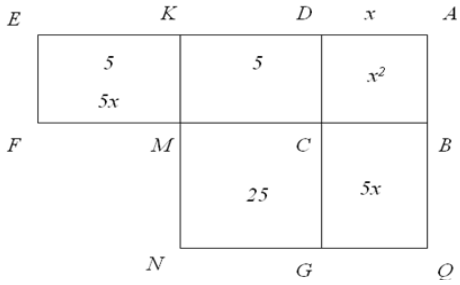

Рис. 7.

Тобто $(10+x)x+25=(x+5)^2$. Площа прямокутника ABFE за побудовою дорівнює x^2+10x (що за умовою задачі дорівнює 39) і дорівнює $(10+x)x$. Отже, $39+25=(x+5)^2$; $(x+5)^2=64$, звідки $x+5=8$, $x=3$.

5. Задача Омара Хайяма. Розв'язати рівняння $x^3+ax=b$ [2: 53].

Розв'язання. Омар Хайям, дотримуючись принципу однорідності розмірності, приводить дане рівняння до виду $x^3+p^2x=p^2q$ $(a=p^2, b=p^2q)$ та розв'язує за допомогою побудови кола $x^2+y^2=qx$ і параболи $x^2=py$, знаходячи точку перетину цих кривих (рис. 8).

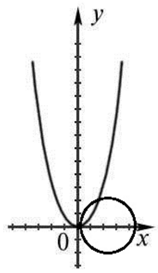

Рис. 8.

Зробимо перетворення отриманого рівняння, що приводять до рівнянь вказаних кривих. Множимо на x, маємо $p^2x^2+x^4=p^2qx$. Ділимо на p^2, отримали $x^2+\frac{x^4}{p^2}=qx$. Перейдемо до системи умов:

$\begin{cases} \frac{x^4}{p^2}=y^2, \\ x^2+y^2=qx \end{cases}$. Звідки $\begin{cases} x^2=py, -\text{парабола} \\ \left(x-\frac{q}{2}\right)^2+y^2=\frac{q^2}{4}-\text{коло.} \end{cases}$

6. Задача Кардано. Розв'язати рівняння $x^2+6x=91$ [3: 46].

Джіроламо Кардано (1501-1576) – італійський математик, філософ і лікар. У своїй роботі "Велике мистецтво або про правило алгебри" він вперше опублікував формули для розв’язування кубічних рівнянь, хоча головна формула запозичена у Тартальї. Кардано вперше ввів в алгебру "неіснуючі числа", так він назвав комплексні числа.

Розв'язання. Будуємо квадрат ACEF зі стороною $x+3$, виділяємо в ньому квадрат BCGD зі стороною 3 і продовжуємо його сторони (рис. 9).

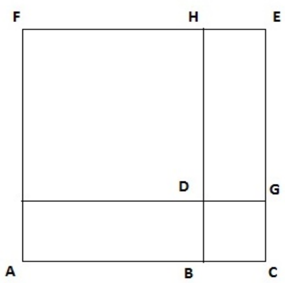

Рис. 9.

Тоді площа квадрата ACEF складається з площ двох квадратів і двох прямокутників, тобто $x^2+2\cdot 3x+9$. За умовою $x^2+6x=91$, тобто площа квадрата ACEF дорівнює $91+9=100$. Сторона побудованого квадрата дорівнює 10, а за побудовою $x+3$. Маємо $x+3=10$, $x=7$.

Висновки. Оскільки при навчанні математики важливо розвинути вміння розв’язувати задачі різними способами, то доцільно використати можливості визначних історичних задач. Зокрема, звернути увагу на застосування геометричних методів в алгебрі, що було запропоновано видатними математиками минулого. Ми розглянули визначні історичні задачі, в яких алгебраїчні рівняння розв'язуються геометрично, але методи геометричної алгебри потребують подальшого дослідження. А саме, їх застосування до розв'язування алгебраїчних задач різних видів: задач на доведення, дослідження, текстових задач. Причому варто звернути увагу як на визначні історичні задачі, так і на задачі, до яких були застосовані методи геометричної алгебри в різні періоди розвитку математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ЛІТЕРАТУРИ

1. Вивальнюк А. М. Елементи історії математики / А. М. Вивальнюк, М. Я. Ігнатенко. – К. : ІЗМН, 1996. – 180 с.
2. Бевз В. Г. Практикум з історії математики / В. Г. Бевз. – К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2004. – 312 с.
3. Попов Г. Н. Сборник исторических задач по элементарной математике / Г. Н. Попов. – М.-Л. : ОНТИ, 1938. – 216 с.

REFERENCES (TRANSLATED & TRANSLITERATED)

1. Vyvalnyuk A. M. Elementy istoriyi matematyky [Elements of the Mathematics History] / A. M. Vyvalnyuk, M. Ya. Ignatenko. – K. : IZMN, 1996. – 180 s.
2. Bevz V. G. Praktykum z istoriyi matematyky [Practicum on Mathematics History] / V. G. Bevz. – K. : NPU im. M. P. Dragomanova, 2004. – 312 s.
3. Popov G. N. Sbornik istoricheskikh zadach po elementarnoy matematike [The Workbook of Historical Problems on Elementary Mathematics] / G. N. Popov. – M.-L. : ONTI, 1938. – 216 s.

Матеріал надійшов до редакції 05.11. 2014 р.

Дидковская Т. В., Сверчевская И. А. Решение уравнений методами геометрической алгебры в истории математики.

Геометрическая алгебра рассматривается как интеграционная основа обучения курсу алгебры будущих учителей математики. Среди различных подходов к использованию истории математики выбрано исследование решений знаменитых математических задач на вычисление корней алгебраических уравнений. Рекомендуется использовать геометрические методы, которые делают решение наглядным, интересным и более понятным. К каждой задаче предложена историческая справка, которая дает возможность изучить деятельность автора задачи подробнее, заинтересовать задачей и, возможно, подтолкнуть к поиску своего метода решения.

Ключевые слова: *математическая задача, уравнение, геометрическая алгебра, геометрические методы, история математики, интеграционное основание, нетрадиционные методы.*

Didkivska T. V., Sverchevska I. A. Equation Solving Using Geometric Algebra Methods in the Mathematics History.

Geometric algebra is considered as an integrative base of teaching algebra to future mathematics teachers. Among various approaches to using of mathematics history we chose the research of famous tasks solving which include the roots of algebraic equations calculation. We also give the recommendation to use geometric methods to make solving more demonstrative, interesting and clear. The geometric solutions of equations, suggested by outstanding mathematicians, are given. Pythagoras of Samos, Ionian Greek philosopher and mathematician (c. 570 – c. 495 BC), gives the solving based on plotting (division of segment, plotting the right-angle triangle by cathetus and hypotenuse). Euclid, famous mathematician of Golden Age of Greece (fl. 300 BC) to solve a quadratic equation plots squares and rectangles, which the given square consists of, and compares their areas. Muhammad al-Khwarizmi (c. 780 – c. 850), Uzbek mathematician, astronomer and doctor, plots squares, which the given square consists of, and calculates their areas. We compare the geometric solving of the quadratic equation with given coefficients, which were advised by al-Khwarizmi and Omar Khayyam (1048 – 1131), Persian mathematician, philosopher, astronomer and poet. The comments are also adduced. The Omar Khayyam's solving of the cubic equation, using the cycle and parabola intersection, is considered. Gerolamo Cardano (1501 – 1576), Italian mathematician, philosopher and doctor, plots square using equation coefficients and separates two squares and two rectangles inside it. As far as it's often hard to understand the language of these works and the explanation they contain, some tasks are also attended by comments. Every task is followed by historical reference, which gives the opportunity to estimate the task of the author's work at greater length and may incite students to seek for their own alternative methods of solving. Since the importance of students' ability to solve tasks by different methods, it's reasonable to use famous historical tasks potential. In particular, it makes sense to pay attention on applying geometric methods in algebra, advised by notable mathematicians of the past.

Key words: *mathematical task, equation, geometric algebra, geometric methods, history of mathematics, integrative base, alternative methods.*