Про добуток періодичних функцій

О.А. Сарана[1]

У даній статті розглядадається важливе питання теорії функцій дійсної змінної — періодичність функцій, зокрема задача про періодичність функції, яка є добутком періодичних функцій. В основі дослідження лежить використання загальних властивостей періодичних функцій, теореми Кронекера та елементів математичного аналізу. Дану статтю можна вважати логічним продовженням робіт [1], [2], [3].

1. Період функції.

Означення 1. Функція f називається *періодичною*, якщо існує число $T \neq 0$ таке, що для кожного x із області визначення виконуються такі умови:
а) числа $x - T$ та $x + T$ також належать цій області;
б) $f(x + T) = f(x)$.

З умови б) випливає також рівність $f(x - T) = f(x)$.

Число T називається *періодом* функції. Очевидно, якщо числа T_1 та T_2 є періодами функції, то при всіх $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$ число $mT_1 + nT_2$ теж є її періодом.

Означення 2. Нехай f — періодична функція. Найменший додатний період цієї функції називається її *головним періодом*(або основним періодом).

Якщо функція f періодична з головним періодом T, то функції $y = f(-x)$, $y = af(x)$, де $a \neq 0$, $y = a + f(x)$, $y = f(x + a)$ також періодичні з головним періодом T, а функція $y = f(ax)$, де $a \neq 0$, періодична з головним періодом $T_1 = \frac{T}{|a|}$.

Не кожна періодична функція має головний період. Прикладом періодичної функції без головного періоду є добре відома функція Діріхле $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{якщо } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$ періодами якої є всі відмінні від нуля раціональні числа.

Наведемо деякі важливі твердження про властивості та умови існування головного періоду, які детально висвітлено в [1], [2].

Теорема 1 ([1]). *Нехай неперервна періодична функція f задана на множині $A \subset \mathbb{R}$ і не є сталою. Тоді вона має головний період.*

Теорема 2 ([2]). *Якщо періодична функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має хоча б одну точку неперервності, то або функція f є сталою, або ця функція має головний період.*

Теорема 3 ([1]). *Якщо функція f періодична і має головний період, то всі її періоди є кратними головному періоду.*

2. Всюди щільні множини та теорема Кронекера.

[1]Доцент кафедри математичного аналізу Житомирського державного університету імені Івана Франка, кандидат фізико-математичних наук.

Означення 3. Множина $M \subset \mathbb{R}$ називається всюди щільною в множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, якщо кожний інтервал $(\alpha;\beta) \subset \mathbb{R}$ містить хоча б один елемент множини M.

Найпростішими прикладами всюди щільних в $\mathbb{R}$ множин є множина $\mathbb{Q}$ раціональних чисел, множина $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ірраціональних чисел. Цікавий приклад всюди щільних в $\mathbb{R}$ множин дає наступна теорема.

Теорема 4 (Кронекера). *Для довільного ірраціонального числа α множина*

$$\{m\alpha + n,\ m, n \in \mathbb{Z}\}$$

є всюди щільною в $\mathbb{R}$.

Доведення цієї теореми наводяться в [2], [4].

Очевидно, якщо множина M є всюди щільною в $\mathbb{R}$, то при довільному дійсному значенні $a \neq 0$ всюди щільними в $\mathbb{R}$ також є множини $\{a + x,\ x \in M\}$, $\{ax,\ x \in M\}$.

Означення 4. Відмінні від нуля числа T_1, T_2 називаються сумірними, якщо їх відношення є раціональним числом. У протилежному випадку числа T_1, T_2 називаються несумірними.

При дослідженні задачі про періодичність добутку двох періодичних функцій будемо використовувати таке твердження, яке є наслідком теореми Кронекера.

Теорема 5. *Нехай числа $T_1 \in \mathbb{R}, T_2 \in \mathbb{R}$ є несумірними. Тоді множина*

$$\{mT_1 + nT_2;\ m, n \in \mathbb{Z}\}$$

є всюди щільною в $\mathbb{R}$.

3. Періодичні функції, які не мають головного періоду.

У випадку, коли періодична функція не має головного періоду, множина її періодів є всюди щільною в $\mathbb{R}$ (див. [2]). Наприклад, множиною періодів функції Діріхле є множина всіх раціональних чисел.

Переконатись у тому, що періодична функція не має головного періоду, можна за допомогою твердження, яке випливає з теореми 5.

Теорема 6. *Нехай несумірні числа $T_1 \in \mathbb{R}$, $T_2 \in \mathbb{R}$ є періодами функції $f(x)$. Тоді функція $f(x)$ не має головного періоду.*

Приклад 1. Функція

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \in \{a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Z}\}, \\ 0, \text{ якщо } x \notin \{a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

не має головного періоду, оскільки серед її періодів є несумірні числа $T_1 = 1,\ T_2 = \sqrt{2}$.

З теорем 2 та 6 безпосередньо випливає таке твердження.

Теорема 7 ([3]). *Нехай несумірні числа $T_1 \in \mathbb{R}$, $T_2 \in \mathbb{R}$ є періодами функції f. Тоді або $f(x) = \mathrm{const}$, або $f(x)$ розривна в кожній точці.*

4. Задача про періодичність суми функцій.

Нехай f і g — визначені на множині $D \subset \mathbb{R}$, відмінні від сталих періодичні функції. Нехай головний період функції f дорівнює T_1, а головний період функції g дорівнює T_2. Можливі такі випадки.

1) Нехай відношення $\frac{T_1}{T_2} = r$ є раціональним числом. Подамо це число у вигляді нескоротного дробу: $r = \frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді число $T = nT_1 = mT_2$ є одночасно періодом як функції f, так і функції g. Тому це число також є періодом функцій $f \pm g$, $f \cdot g$ та $\frac{f}{g}$ (на множині $\{x \in D : g(x) \neq 0\}$). Отже, якщо функції $f(x)$, $g(x)$ є періодичними, то умова сумірності їх періодів є достатньою умовою періодичності їх суми, різниці, добутку, частки.

Знайдене число T є найменшим, для якого числа $\frac{T}{T_1}$ та $\frac{T}{T_2}$ є натуральними. Його називають найменшим спільним кратним сумірних додатних чисел T_1, T_2 та позначають НСК(T_1, T_2). Цікаво, що число $T =$ НСК(T_1, T_2) не обов'язково є головним періодом функцій $f \pm g$, $f \cdot g$ та $\frac{f}{g}$.

Приклад 2. Функція $y = \sin 3x$ має головний період $T_1 = \frac{2\pi}{3}$, функція $y = \sin 5x$ має головний період $T_2 = \frac{2\pi}{5}$, НСК$(T_1, T_2) = 2\pi$. Але головним періодом функції $y = \sin 3x \sin 5x$ є число $T = \pi$ (покажіть це самостійно).

Нехай $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — визначені на множині $D \subset \mathbb{R}$, відмінні від сталих періодичні функції, головні періоди яких відповідно дорівнюють $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Нехай числа T_1, T_2, …, T_n є сумірними, тобто відношення будь-яких двох із цих чисел є раціональним числом. Очевидно, що будь-яка функція, отримана за допомогою скінченної кількості арифметичних операцій над функціями $f_1, f_2, \ldots, f_n$ також є періодичною. Одним з її періодів є число $T =$ НСК$(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ (див. також [1]).

2) Нехай відношення $\frac{T_1}{T_2} = r$ є ірраціональним числом. У цьому випадку сума функцій $f(x)$, $g(x)$ може бути як періодичною, так і неперіодичною. Для побудови прикладів ми використаємо допоміжну множину. Позначимо

$$M = \left\{k + l\sqrt{3} + m\sqrt{5} + n\sqrt{7};\ k, l, m, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Множина M є всюди щільною в $\mathbb{R}$. Кожне її число єдиним способом подається у вигляді $x = k + l\sqrt{3} + m\sqrt{5} + n\sqrt{7};\ k, l, m, n \in \mathbb{Z}$ (покажіть це самостійно), тому функції у наступних прикладах визначені коректно.

Приклад 3. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} k^2 + l^2 + m^2, \text{ якщо } x \in M, \\ 0, \text{ якщо } x \in \mathbb{R} \backslash M. \end{cases}$$

Дослідимо цю функцію на періодичність. Якщо $f(x) \neq 0$, то $f(x+T) \neq 0$, тобто $x, x+T \in M$. Звідси $T \in M$, а отже будь-який період $f(x)$ слід шукати у вигляді $T = a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} + d\sqrt{7}$, де $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Неважко перевірити, що рівність $f(x+T) = f(x)$ буде тотожністю лише при $T = d\sqrt{7}$, $d \in \mathbb{Z}$. Отже, функція $f(x)$ періодична, її головний період $T_1 = \sqrt{7}$.

Нехай $g(x) = \begin{cases} l^2 - m^2 + n^2, \text{ якщо } x \in M, \\ 0, \text{ якщо } x \in \mathbb{R} \backslash M. \end{cases}$ Ця функція теж періодична, її головний період $T_2 = 1$. Функція $f(x) + g(x) = \begin{cases} k^2 + 2l^2 + n^2, \text{ якщо } x \in M, \\ 0, \text{ якщо } x \in \mathbb{R} \backslash M \end{cases}$ теж є періодичною, а її головний період $\sqrt{5}$ є несумірним з числами T_1, T_2. При цьому функція $f(x) - g(x) = \begin{cases} k^2 + 2m^2 - n^2, \text{ якщо } x \in M, \\ 0, \text{ якщо } x \in \mathbb{R} \backslash M \end{cases}$ теж є періодичною, а її головний період $\sqrt{3}$ теж є несумірним з числами T_1, T_2.

Приклад 4. Нехай $f(x) = \begin{cases} k^2 + l^2, \text{ якщо } x \in M, \\ 0, \text{ якщо } x \in \mathbb{R} \backslash M. \end{cases}$ Ця функція періодична та не має головного періоду. Її періодами є всі числа вигляду $c\sqrt{5} + d\sqrt{7}$, де $c, d \in \mathbb{Z}$, $c^2 + d^2 \neq 0$. Нехай $g(x) = \begin{cases} m^2 - l^2, \text{ якщо } x \in M, \\ 0, \text{ якщо } x \in \mathbb{R} \backslash M. \end{cases}$ Ця функція теж не має головного періоду, її періодами є всі числа вигляду $a + d\sqrt{7}$, де $a, d \in \mathbb{Z}$, $a^2 + d^2 \neq 0$. Функція $f(x) + g(x) = \begin{cases} k^2 + m^2, \text{ якщо } x \in M, \\ 0, \text{ якщо } x \in \mathbb{R} \backslash M \end{cases}$ є періодичною та не має головного періоду, її періодами є всі числа вигляду $b\sqrt{3} + d\sqrt{7}$, де $b, d \in \mathbb{Z}$, $b^2 + d^2 \neq 0$.

У прикладах 3, 4 функції $f(x), g(x)$ є розривними на всій числовій прямій. У випадку, коли функції $f(x), g(x)$ є неперервними на всій числовій прямій, правильне наступне твердження.

Теорема 8. *Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — неперервні на $\mathbb{R}$, відмінні від сталих та періодичні функції. Якщо головні періоди цих функцій несумірні, то функція $f(x) + g(x)$ неперіодична.*

Різні доведення цього твердження містяться в [2], [3].

5. Задача про періодичність добутку періодичних функцій.

Наступні приклади показують, що добуток та частка функцій з несумірними періодами також можуть бути періодичними функціями.

Знову використаємо множину

$$M = \left\{ k + l\sqrt{3} + m\sqrt{5} + n\sqrt{7};\ k, l, m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Приклад 5. Нехай $f(x) = \begin{cases} \frac{k^2+1}{l^2+m^2+1}, \text{ якщо } x \in M, \\ 0, \text{ якщо } x \in \mathbb{R} \backslash M. \end{cases}$ Ця функція періодична, її головний період $T_1 = \sqrt{7}$. Нехай $g(x) = \begin{cases} \frac{l^2+m^2+1}{n^2+1}, \text{ якщо } x \in M, \\ 0, \text{ якщо } x \in \mathbb{R} \backslash M. \end{cases}$ Головний період цієї функції $T_2 = 1$. Функція $f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} \frac{k^2+1}{n^2+1}, \text{ якщо } x \in M, \\ 0, \text{ якщо } x \in \mathbb{R} \backslash M \end{cases}$ теж є періодичною, але не має головного періоду, її періодами є всі числа вигляду $b\sqrt{3} + c\sqrt{5}$, де $b, c \in \mathbb{Z}$, $b^2 + c^2 \neq 0$.

Приклад 6. Нехай $f(x) = \begin{cases} \frac{k^2+1}{l^2+m^2+1}, \text{ якщо } x \in M, \\ 1, \text{ якщо } x \in \mathbb{R} \backslash M. \end{cases}$ Ця функція періодична, її головний період $T_1 = \sqrt{7}$. Нехай $g(x) = \begin{cases} \frac{n^2+1}{l^2+m^2+1}, \text{ якщо } x \in M, \\ 1, \text{ якщо } x \in \mathbb{R} \backslash M. \end{cases}$ її головний період $T_2 = 1$. Функція $\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{k^2+1}{n^2+1}, \text{ якщо } x \in M, \\ 1, \text{ якщо } x \in \mathbb{R} \backslash M \end{cases}$ теж є періодичною, але не має головного періоду, її періодами є всі числа вигляду $b\sqrt{3} + c\sqrt{5}$, де $b, c \in \mathbb{Z}$, $b^2 + c^2 \neq 0$.

Функції з прикладів 5, 6 є розривними на всій числовій прямій. Якщо ж функції $f(x), g(x)$ є неперервними та періодичними, умова сумірності їх періодів є також необхідною умовою періодичності їх добутку. Доведемо це спочатку для випадку, коли кожна з цих функцій визначена та неперервна на всій числовій прямій.

Спочатку встановимо корисне твердження про множину значень добутку таких функцій.

Теорема 9. *Нехай $f(x)$ та $g(x)$ — відмінні від сталих неперервні на $\mathbb{R}$ періодичні функції, головні періоди яких дорівнюють T_1 та T_2 відповідно. Нехай числа T_1 та T_2 є несумірними. Позначимо*

$$m_1 = \min\{f(x),\ x \in \mathbb{R}\},\ m_2 = \min\{g(x),\ x \in \mathbb{R}\},$$
$$M_1 = \max\{f(x),\ x \in \mathbb{R}\},\ M_2 = \max\{g(x),\ x \in \mathbb{R}\}.$$

Нехай m — найменше, а M — найбільше з чисел $m_1m_2, m_1M_2, M_1m_2, M_1M_2$. Тоді множина значень функції $F(x) = f(x)g(x)$ містить інтервал $(m; M)$ та міститься у відрізку $[m; M]$.

Доведення. Оскільки функції $f(x)$ та $g(x)$ є періодичними, то множини їх значень збігаються з множинами їх значень на відрізках $[0; T_1]$ та $[0; T_2]$ відповідно. Тому ці функції є обмеженими та за другою теоремою Вейєрштрасса набувають свої найбільші та найменші значення, тобто числа m_1, m_2, M_1, M_2 в умові теореми визначені коректно.

Нехай $m_1 \geq 0$, $m_2 \geq 0$ (інші випадки розглядаються аналогічно, зробіть це самостійно). Тоді $m = m_1m_2$, $M = M_1M_2$. Очевидно, що $m_1m_2 \leq f(x)g(x) \leq M_1M_2$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, тому множина значень функції $f(x)g(x)$ міститься у відрізку $[m, M]$.

Нехай m', M' — довільні числа такі, що $m_1m_2 < m' < M' < M_1M_2$.

Виберемо число $\varepsilon > 0$ так, що виконується нерівність $(m_1 + \varepsilon) \cdot m_2 < m'$. Нехай x_1, x_2 — деякі точки, в яких функцій $f(x)$ та $g(x)$ набувають найменше значення, тобто $m_1 = f(x_1)$, $m_2 = g(x_2)$. З неперервності функції $f(x)$ випливає, що існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх $x \in (x_1 - \delta; x_1 + \delta)$ виконується нерівність $m_1 \leq f(x) < m_1 + \varepsilon$.

За теоремою Кронекера множина чисел $\{nT_1 + kT_2,\ n, k \in \mathbb{Z}\}$ всюди щільна в $\mathbb{R}$. Тому існують такі числа $n, k \in \mathbb{Z}$, що $x_2 + nT_1 + kT_2 \in (x_1 - \delta; x_1 + \delta)$. Тоді маємо

$$\begin{aligned} F(x_2 + kT_2) =& f(x_2 + kT_2) \cdot g(x_2 + kT_2) = f(x_2 + nT_1 + kT_2) \cdot g(x_2) = \\ =& f(x_2 + nT_1 + kT_2) \cdot m_2 < (m_1 + \varepsilon) \cdot m_2 < m', \end{aligned}$$

тобто функція $F(x)$ набуває значення менші за m'.

Аналогічно доводиться, що функція $F(x)$ набуває значення більші за M'. Отже, існують $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ такі, що $F(t_1) < m' < M' < F(t_2)$. Оскільки функція $F(x)$ є неперервною, то за теоремою Больцано-Коші вона набуває всі значення з відрізка $[m'; M'] \subset [F(t_1); F(t_2)]$. Оскільки числа m', M' довільні, то множина значень функції $F(x)$ містить інтервал $(m; M)$. Теорема доведена. $\square$

Зауваження. Якщо $m_1 < f(x) < M_1$ та $m_2 < g(x) < M_2$, то зрозуміло, що має місце нерівність $m < F(x) = f(x)g(x) < M$. Це допомагає перевіряти, чи належать множині значень функції $F(x)$ числа m та M.

Приклад 6. Нехай $F(x) = \sin x \sin(\sqrt{2}x)$. Тоді $\{F(x),\ x \in \mathbb{R}\} = (-1; 1)$. Справді, якщо $|F(x)| = 1$, то $|\sin x| = |\sin(\sqrt{2}x)| = 1$. Звідси $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ та $\sqrt{2}x = \frac{\pi}{2} + l\pi$, де $k, l \in \mathbb{Z}$, а отже $\sqrt{2} = \frac{2l+1}{2k+1} \in \mathbb{Q}$, дістали суперечність.

Приклад 7. Нехай $F(x) = \cos x \cos(\sqrt{3}x)$. Тоді $\{F(x),\ x \in \mathbb{R}\} = (-1; 1]$ (покажіть самостійно, що $F(x)$ набуває значення 1 та не набуває значення -1).

Твердження теореми 9 не можна поширити на функції, які є добутком двох періодичних функцій із сумірними періодами.

Приклад 8. Нехай $F(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$. Тоді для функцій $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ маємо $m_1 = m_2 = -1$, $M_1 = M_2 = 1$, але $\{F(x),\ x \in \mathbb{R}\} = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Теорема 10. *Нехай $f(x)$ та $g(x)$ — відмінні від сталих неперервні на $\mathbb{R}$ періодичні функції, головні періоди яких дорівнюють T_1 та T_2 відповідно. Нехай числа T_1 та T_2 є несумірними. Тоді функція $F(x) = f(x)g(x)$ є неперіодичною.*

Доведення. Припустимо, що функція $F(x)$ має деякий період T. Тоді множина її значень на $\mathbb{R}$ збігається з множиною її значень на відрізку $[0, T]$, а оскільки функція $F(x)$ неперервна, то за другою теоремою Вейєрштрасса вона набуває найбільше та найменше значення. Нехай $\max\{F(x),\ x \in \mathbb{R}\} = F(x_0)$. Згідно зауваження до теореми 9, у точках $x_0 + kT, k \in \mathbb{Z}$, кожна з функцій $f(x)$ та $g(x)$ набуває найменше або найбільше значення.

Припустимо, що $\frac{T}{T_1} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Нехай m_1, M_1 — найменше та найбільше значення функції $f(x)$. Розглянемо довільну точку t_0, в якій $m_1 < f(t_0) < M_1$. З неперервності $f(x)$ випливає, що існує окіл точки t_0, в якому виконується нерівність $m_1 < f(x) < M_1$. Але множина $\{x_0 + kT + nT_1,\ k, n \in \mathbb{Z}\}$ всюди щільна в $\mathbb{R}$, тому в цьому околі є точки вигляду $x_0 + kT + nT_1$, у яких $f(x_0 + kT + nT_1) = f(x_0 + kT) \in \{m_1, M_1\}$, суперечність. Отже, $\frac{T}{T_1} \in \mathbb{Q}$.

Аналогічно доводиться, що $\frac{T}{T_2} \in \mathbb{Q}$, а тому $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$, що суперечить умові теореми. Отже, припущення про періодичність функції $F(x)$ неправильне.

Теорема доведена. $\square$

Зауваження. У випадку, коли функції $f(x), g(x)$ є знакосталими, твердження теореми 10 випливає з теореми 8. Для визначеності припустимо, що $f(x) > 0$ та $g(x) > 0$ при всіх $x \in \mathbb{R}$ (інші можливі випадки зводяться до цього заміною деяких з функцій $f(x), g(x)$ на протилежні). Тоді $F(x) > 0$ при всіх $x \in \mathbb{R}$. Очевидно, що функції $F(x)$ та $\ln F(x)$ або одночасно періодичні з однаковими періодами, або одночасно неперіодичні. Але за теоремою 8 функція $\ln F(x) = \ln f(x) + \ln g(x)$ є неперіодичною.

Доведемо тепер необхідність умови сумірності періодів функцій $f(x), g(x)$ для періодичності їх суми, різниці та добутку у випадку, коли хоча б одна з функцій $f(x), g(x)$ визначена не на всій числовій прямій.

Теорема 11. *Нехай $f(x)$ — визначена на множині $D_1 \subset \mathbb{R}$ відмінна від сталої неперервна та періодична функція з головним періодом T_1, $g(x)$ — визначена на множині $D_2 \subset \mathbb{R}$ відмінна від сталої неперервна та періодична функція з головним періодом T_2, причому $\mathbb{R} \backslash D_1 \neq \varnothing$ або $\mathbb{R} \backslash D_2 \neq \varnothing$, а множина $D = D_1 \cap D_2$ має хоча б одну внутрішню точку. Нехай числа T_1 та T_2 є несумірними. Тоді функції $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ є неперіодичними.*

Доведення. Припустимо, що функція $F(x) = f(x)g(x)$ є періодичною (для функцій $f(x) \pm g(x)$ доведення є цілком аналогічним). Позначимо деякий її період T. Нехай точка x_0 є внутрішньою точкою області визначення D функції $F(x)$, тобто існує число $\delta > 0$ таке, що $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset D$.

Випадок 1. Нехай одночасно $\mathbb{R} \backslash D_1 \neq \varnothing$ та $\mathbb{R} \backslash D_2 \neq \varnothing$.

Нехай $x_1 \in \mathbb{R} \backslash D_1$. Тоді функція $f(x)$, а отже і функція $F(x)$, не визначена у точках вигляду $x_1 + kT_1,\ k \in \mathbb{Z}$. З періодичності функції $F(x)$ випливає, що ця функція також не визначена у точках вигляду $x_1 + kT_1 + nT,\ k, n \in \mathbb{Z}$.

Припустимо, що $\frac{T}{T_1} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Тоді множина $\{x_1 + kT_1 + nT,\ k, n \in \mathbb{Z}\}$ всюди щільна в $\mathbb{R}$, а тому в інтервалі $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ є точки, в яких функція $F(x)$ не визначена, суперечність. Отже, $\frac{T}{T_1} \in \mathbb{Q}$.

Аналогічно якщо $x_2 \in \mathbb{R} \backslash D_2$ та $\frac{T}{T_2} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, то функція $F(x)$ не визначена у точках всюди щільної в $\mathbb{R}$ множини $\{x_2 + mT_2 + nT,\ m, n \in \mathbb{Z}\}$, і знову маємо суперечність. Отже $\frac{T}{T_2} \in \mathbb{Q}$.

Оскільки $\frac{T}{T_1} \in \mathbb{Q}$ та $\frac{T}{T_2} \in \mathbb{Q}$, то $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$, що суперечить умові теореми.

Випадок 2. Нехай $\mathbb{R} \backslash D_1 \neq \varnothing$, $D_2 = \mathbb{R}$ (випадок $\mathbb{R} \backslash D_2 \neq \varnothing$, $D_1 = \mathbb{R}$, розглядається аналогічно). Тоді $\frac{T}{T_1} \in \mathbb{Q}$. Позначимо $T_0 = \text{НСК}(T, T_1)$. Число T_0 є спільним періодом функцій $f(x)$ та $F(x)$. Припустимо, що $\frac{T}{T_2} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, тоді також $\frac{T_0}{T_2} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Розглянемо довільну точку $t_0 \in D_1$, для якої $f(t_0) \neq 0$. Тоді при всіх $k, n \in \mathbb{Z}$ маємо

$$g(t_0 + kT_0 + nT_2) = g(t_0 + kT_0) = \frac{F(t_0 + kT_0)}{f(t_0 + kT_0)} = \frac{F(t_0)}{f(t_0)} = g(t_0).$$

Множина $\{t_0 + kT_0 + nT_2,\ k, n \in \mathbb{Z}\}$ всюди щільна в $\mathbb{R}$, тому в довільному інтервалі $(x - \delta; x + \delta)$ є точки цієї множини, в яких значення функції g дорівнює $g(t_0)$. Оскільки функція g неперервна, то $g(x) = g(t_0) = \text{const}$, $x \in \mathbb{R}$, що суперечить умові теореми.

Отже, $\frac{T}{T_2} \in \mathbb{Q}$. Але $\frac{T}{T_1} \in \mathbb{Q}$, тому $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$, що теж суперечить умові теореми. $\square$

Як наслідок з теорем 10, 11, отримуємо наступне твердження.

Теорема 12. *Нехай $f(x)$ — визначена на множині $D_1 \subset \mathbb{R}$ відмінна від сталої неперервна та періодична функція з головним періодом T_1, $g(x)$ — визначена на множині $D_2 \subset \mathbb{R}$ відмінна від сталої неперервна та періодична функція з головним* *періодом* T_2*, причому множина* $D = D_1 \cap \{x \in D_2 : g(x) \neq 0\}$ *має хоча б одну внутрішню точку. Нехай числа* T_1 *та* T_2 *є несумірними. Тоді функція* $F(x) = f(x)/g(x)$ *є неперіодичною.*

Для доведення достатньо зауважити, що $F(x) = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$, де $\frac{1}{g(x)}$ — визначена на множині $\{x \in D_2 : g(x) \neq 0\}$ відмінна від сталої неперервна та періодична функція з головним періодом T_2.

Література

1. О.Г. Кукуш, Р.П. Ушаков. *Як знайти головний період функції*, "У світі математики", 1999, № 2, с. 20–36.

2. І.М. Мітельман, *Дещо про всюди щільні множини та періодичні функції*, "У світі математики", 1996, № 4, с. 6–13.

3. О.А. Сарана, *Деякі нестандартні задачі, пов'язані з природою ірраціональних чисел*, "У світі математики", 1998, № 3, с. 26–29.

4. М.Й. Ядренко, *Принцип Діріхле та його застосування*, Київ, "Вища школа", 1985.