Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, Т. 12, № 4, 138-143

УДК 517.54

**В. Є. В'юн[1], І. В. Денега[1], А. Л. Таргонський[2]**
([1] Інститут математики, Київ; [2] Житомирський державний університет, Житомир)

# Екстремальне розбиття комплексної площини і нерівності для добутків внутрішніх радіусів областей

*The paper is devoted to extremal problems of the geometric function theory of complex variable associated with estimates of functionals defined on systems of partially intersection domains. We generalize some known results in this theory.*

*Робота присвячена дослідженню екстремальних задач геометричної теорії функцій комплексної змінної, пов'язаних з оцінками функціоналів, заданих на системах частково налягаючих областей. Зокрема, посилено і узагальнено деякі відомі результати даної тематики.*

Задачі про екстремальне розбиття займають важливе місце в геометричній теорії функцій комплексної змінної і мають багату історію (див., наприклад, [1–15]). Ця тематика бере початок зі статті М. О. Лаврєнт'єва 1934 року [1], де екстремальні розбиття розглядались при отриманні оцінок добутку степенів конформних радіусів неперетинних областей, і далі розвивалась в дослідженнях багатьох авторів (див., наприклад, [2–15]). Важливим елементом дослідження таких екстремальних задач є глибокі результати теорії квадратичних диференціалів [3]. В даній роботі отримані оцінки добутків внутрішніх радіусів частково налягаючих областей.

**1. Постановка задачі та основні результати.** Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множини натуральних і дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ — комплексна площина, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — її одноточкова компактифікація, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Нехай $r(B, a)$ — внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ (див., наприклад, [5, с. 14]; [7, с. 71]).

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Систему точок $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C} : k = \overline{1,n}\right\}$ таку, що $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1,n}$ та $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi$, будемо називати $n$-променевою. Позначимо

$$P_k = P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\},$$

$\theta_k := \arg a_k$, $a_{n+1} := a_1$, $\theta_{n+1} := 2\pi$. Величини $\alpha_k := \frac{1}{\pi}\left[\theta_{k+1} - \theta_k\right]$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$, будемо називати кутовими параметрами $n$-променевої системи точок $A_n$.

Нехай $D$ — довільна відкрита множина в $\overline{\mathbb{C}}$, яка містить променеву систему точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$. Якщо $a \in D$, то будемо говорити, що $D(a)$ є зв'язна компонента $D$, що містить точку $a$; $D_k(a_p)$ — зв'язна компонента множини $D(a_p) \cap \overline{P_k(A_n)}$, що містить точку $a_p$, $p \in \{k, k-1\}$, $k = \overline{1,n}$; $D_k(0)$ – зв'язна компонента множини $D(0) \cap \overline{P_k(A_n)}$, що містить точку $w = 0$; $D_k(\infty)$ — зв'язна компонента множини $D(\infty) \cap \overline{P_k(A_n)}$, що містить нескінченно віддалену точку.

Внутрішнім радіусом $r\,(D, a)$ відкритої множини $D$ відносно точки $a$ називається внутрішній радіус зв'язної компоненти множини $D$, що містить точку $a$.

Нехай відкрита множина $D$ містить точки $w = 0$, $w = \infty$ і довільну $n$-променеву систему точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, тоді будемо говорити, що така множина задовольняє умову налягання відносно системи точок $A_n$, якщо множини $D_k(a_k)$, $D_k(a_{k+1})$, $D_k(0)$ і $D_k(\infty)$ попарно не перетинаються для кожного $k = \overline{1,n}$.

Нехай $\{B_k\}_{k=1}^n$, $B_\infty$, $B_0$ — довільний набір областей таких, що $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$. Позначимо $\widetilde{D} = B_0 \bigcup B_\infty \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$. Будемо говорити, що система $B_\infty$, $B_0$, $\{B_k\}_{k=1}^n$ задовольняє умову часткового налягання відносно деякої системи $A_n$, якщо відкрита множина $\widetilde{D}$ задовольняє умову налягання відносно цієї ж $n$-променевої системи точок $A_n$. Із означення випливає, що довільна система взаємно неперетинних областей задовольняє умову часткового налягання.

Метою даної роботи є отримання точних оцінок зверху для функціонала наступного вигляду:

$$J_n(\gamma) = [r\,(B_0, 0)\, r\,(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\,(B_k, a_k)\,, \tag{1}$$

де $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ — $n$-променева система точок, яка розташована на одиничному колі, система областей $B_0$, $B_\infty$, $\{B_k\}_{k=1}^n$ задовольняє умову часткового налягання відносно $A_n$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, $0 \in B_0$, $\infty \in B_\infty$.

В роботі [4] була отримана оцінка функціоналу (1) для системи неперетинних областей при $n \geq 2$ і для $\gamma = \frac{1}{2}$. Цей результат було посилено в роботі [6] і показано, що дана оцінка справедлива при $\gamma \in \left(0, \frac{n^2}{8}\right]$, $n \geq 2$. Дана задача досліджувалася також в роботах [13] — [15].

В даній роботі задача про оцінку функціоналу (1) розглядається при $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$.

**Теорема.** *Нехай* $0 < \gamma \leq \gamma_p$, $p \in \{4, 5, 6\}$, $\gamma_4 = 2{,}25$, $\gamma_5 = 3{,}3$, $\gamma_6 = 4{,}6$. *Тоді для довільної $p$-променевої системи точок $A_p = \{a_k\}_{k=1}^p$ такої, що $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,p}$, і довільної системи областей $B_0$, $B_k$, $B_\infty$ ($0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,p}$), що задовольняє умову часткового налягання відносно $A_p$, справедлива нерівність*

$$[r\,(B_0, 0)\, r\,(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{p} r\,(B_k, a_k) \leqslant$$

$$\leqslant [r\,(D_0, 0)\, r\,(D_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{p} r\,(D_k, d_k)\,, \tag{2}$$

*де області $D_0$, $D_\infty$, $D_k$ — кругові області, а точки $0$, $\infty$, $d_k$, $k = \overline{1,p}$, $p \in \{4, 5, 6\}$, — полюси квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2p} + (p^2 - 2\gamma)w^p + \gamma}{w^2(w^p - 1)^2}\, dw^2. \tag{3}$$

**3. Доведення теореми 1.** Використовуючи нерівності

$$r\,(B_k, a_k) \leqslant r\left(\widetilde{D}, a_k\right) = r\left(\widetilde{D}(a_k), a_k\right),$$

отримуємо

$$[r\,(B_0,0)\,r\,(B_\infty,\infty)]^\gamma\prod_{k=1}^{p}r\,(B_k,a_k)\leqslant$$

$$\leqslant\left[r\left(\widetilde{D},0\right)r\left(\widetilde{D},\infty\right)\right]^\gamma\prod_{k=1}^{p}r\left(\widetilde{D},a_k\right).$$

Застосовуючи методи і результати, представлені в роботах [7, с. 262], [7, с. 167], [9, с. 871], приходимо до нерівності

$$J_p(\gamma)\leqslant\left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^p\cdot\left(\prod_{k=1}^{p}\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\left[\prod_{k=1}^{p}\Phi(\tau_k)\right]^{1/2}= \tag{4}$$

$$=\left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^p\cdot\left[\prod_{k=1}^{p}\left(\tau_k^{2\tau_k^2+2}\cdot|1-\tau_k|^{-(1-\tau_k)^2}\cdot(1+\tau_k)^{-(1+\tau_k)^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

де $\tau_k=\sqrt{\gamma}\cdot\alpha_k$, $k=\overline{1,p}$.

Далі проведемо доведення теореми лише у випадку $p=6$, враховуючи умови теореми 1, із нерівності (4) маємо співвідношення

$$J_6(\gamma)\leqslant\frac{64}{\gamma^3}\left(\prod_{k=1}^{6}\left(\tau_k^{2\tau_k^2+2}\cdot|1-\tau_k|^{-(1-\tau_k)^2}\cdot(1+\tau_k)^{-(1+\tau_k)^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Нехай $\Psi(x)=x^{2x^2+2}\cdot|1-x|^{-(1-x)^2}\cdot(1+x)^{-(1+x)^2}$, $F(x)=\ln(\Psi(x))$.

Розглянемо екстремальну задачу

$$\prod_{k=1}^{6}\Psi(x_k)\longrightarrow\max;\quad\sum_{k=1}^{6}x_k=2\sqrt{\gamma},\quad x_k=\alpha_k\sqrt{\gamma}.$$

Нехай $X^{(0)}=\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{6}$ — її довільна екстремальна система точок.

Повторюючи міркування, проведені в роботі [12], приходимо до висновку, що має місце твердження:

$$F'(x_k^{(0)})=F'(x_j^{(0)}),\quad k,j=\overline{1,6},\quad k\neq j, \tag{5}$$

де $F'(x) = 4x \ln x - 2(x-1)\ln|1-x| - 2(x+1)\ln(x+1) + \frac{2}{x}$.

На основі співвідношення (5), а також використовуючи ідеї робіт [12] — [15], покажемо що $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_6^{(0)}$.

Нехай $F'(x) = t$, де $y_0 \leqslant t < 0$. Для $\forall t \in [y_0, 0)$ дане рівняння має 2 корені $x_1(t) \in (0, x_0]$ та $x_2 \in [x_0, \infty)$. Розглянемо наступні значення параметра $t$: $t_1 = -0,1,\ t_2 = -0,2, \ldots, t_{10} = -1,\ t_{11} = y_0$. Проводячи розрахунки, отримуємо наступну таблицю:

| k | $t_k$ | $x_1(t_k)$ | $x_2(t_k)$ | $5x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | -0,1 | 0,595614 | 1,588941 | |
| 2 | -0,2 | 0,610729 | 1,310498 | 4,288568 |
| 3 | -0,3 | 0,626917 | 1,184045 | 4,23769 |
| 4 | -0,4 | 0,644375 | 1,110153 | 4,244738 |
| 5 | -0,5 | 0,663378 | 1,062338 | 4,284213 |
| 6 | -0,6 | 0,684325 | 1,030184 | 4,347074 |
| 7 | -0,7 | 0,707842 | 1,008999 | 4,430624 |
| 8 | -0,8 | 0,735017 | 0,997389 | 4,536599 |
| 9 | -0,9 | 0,768137 | 0,979982 | 4,655067 |
| 10 | -1 | 0,814378 | 0,947119 | 4,787804 |
| 11 | -1,06 | 0,884406 | 0,884406 | 4,956296 |

Враховуючи властивості функції $F'(x)$ і умови теореми, отримуємо наступну нерівність $5x_1(t) + x_2(t) > 5x_1(t_k) + x_2(t_{k+1}) > 2\sqrt{\gamma_6}$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = \overline{1, 10}$. Звідси, використовуючи відповідні значення із вище наведеної таблиці, отримуємо, що теорема 1 має місце при $\gamma = \gamma_6$.

Для всіх $\gamma < \gamma_6$ всі попередні міркування зберігаються. Реалізація знака рівності перевіряється безпосередньо. Доведення теореми 1 для значень параметра $p = 4$ і $p = 5$ повторюють проведені міркування з урахуванням деяких особливостей. *Теорема 1 доведена.*

Висловлюємо подяку О.К. Бахтіну за постановку задачі та увагу до роботи.

**Література.**

1. *Лаврентьев М.А.* К теории конформных отображений//Тр. физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159–245.
2. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 628 с.

3. *Дженкинс Дж.А.* Однолистные функции и конформные отображения. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
4. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении// Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168**. – С. 48–66.
5. *Дубинин В.Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного// Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1(295). – С. 3–76.
6. *Кузьмина Г.В.* Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы//Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2001. –**276**. – С. 253–275.
7. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе// Праці ін-ту мат-ки НАН України. – 2008. –**73**. – 308 с.
8. *Бахтин А.К., Таргонский А.Л.* О произведении внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств //Доп. НАН України. – 2008. – № 5. – С. 7–12.
9. *Бахтин А.К.* Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности//Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 7. – С. 867–886.
10. *Кузьмина Г.В.* Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров// Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2003. – **302**. – С. 52–67.
11. *Емельянов Е.Г.* К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей// Зап. науч. сем. ПОМИ.– 2002. – **286**. – С. 103–114.
12. *Ковалев Л.В.* К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности. // Дальневосточный матем. сборник. – 1996. – 2. – С. 96 – 98.
13. *Денега И. В.* Некоторые неравенства для внутренних радиусов частично неналегающих областей// Доп. НАН України. — 2012. — №5. — С. 19 – 22.
14. *Бахтин А.К., Денега И.В.* Некоторые оценки функционалов для $N$-лучевых систем точек // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2011. – Т.8, №1. – С. 12 – 21.
15. *Бахтін О.К., В'юн В.Є.* Про деякі нерівності в теорії неперетинних областей // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2014. – Т.11, №1. – С. 141 – 152.